MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XIV. Band.

(Mit 8 lithographirten Tafeln und einer Tabelle.)

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Inhalt des vierzehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Hermann Grassmann.

Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten.

(Mit einem Verzeichnisse sämmtlicher Schriften Grassmann's.)

Am 26. September 1877 starb in Stettin im 69. Lebensjahre Hermann Günther Grassmann, Professor am Marienstiftsgymnasium daselbst, bald nach dem Erscheinen mehrerer Aufsätze (Crelle-Borchardt's Journal Bd. 83, S. 57, Math. Ann. Bd. XII, S. 222 und 375, Poggendorff-Wiedemann's Ann. der Physik Bd. I, S. 606), welches die Hoffnung erweckt hatte, dass dieser bedeutende Geist den mathematisch-physikalischen Wissenschaften wiedergegeben sei. Im Folgenden haben einige Verehrer Grassmann's (R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke) den Versuch einer Würdigung seiner Leistungen in diesen Wissenschaften gemacht.

In ungewöhnlichen Bahnen hat sich das in seinem äusseren Verlaufe stille Leben dieses Gelehrten bewegt, noch eigenthümlicher als das von Plücker. Der Hauptheil seiner mathematischen Thätigkeit insbesondere liegt schon weit zurück, er fällt in die Jahre 1840—60. Seine damaligen Productionen brachten eine Reihe „weitumfassender Ideen, welche der Process der mathematischen Entwickelung erst später ausgebildet, theilweise noch gar nicht berührt hat“, zudem in einer oft schwer verständlichen Form der Darstellung. Nur wenige von seinen Resultaten, am meisten noch die geometrischen, „das geometrische Beiwerk“, wie er sie selbst nennt, welche er zur Erläuterung seines Hauptwerkes im Crelle'schen Journale (Bd. 31, 36, 42, 44, 49, 52) veröffentlichte, sind bekannt geworden. Dieses Hauptwerk aber: die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die lineale Ausdehnungslehre (Leipzig, Wigand, 1844)*) blieb fast ganz unbeachtet, hat nirgends

---

*) Nach Abfassung dieser Besprechung erschien die zweite Auflage (Leipzig 1878) bei demselben Verleger, der von der ersten einen Theil hatte einstampfen lassen. Sie ist im Texte unverändert, aber durch Anmerkungen und Anhänge aus dem Jahre 1877, darunter einen Anhang über das Verhältniss der nicht-euklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre, bereichert. In der noch von Grassmann selbst geschriebenen Vorrede theilt er mit, dass der Physiologe Preyer in Jena in seinen „Elementen der reinen Empfindungslehre“ (Jena 1877) diese Wissenschaft auf den Principien der Ausdehnungslehre aufgebaut hat.

eine Besprechung gefunden oder gar zu verwandten Betrachtungen angeregt. Und dasselbe gilt im Allgemeinen auch von seiner mit demselben eng zusammenhängenden „geometrischen Analyse“ (Leipzig, Weidmann, 1847, mit einer erläuternden Abhandlung von Möbius versehen), trotzdem sie von der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig 1846 preisgekrönt worden war.

Von der Bedeutung seiner Ideen überzeugt, entschloss sich Grassmann zu einer vollständigen Umarbeitung des Hauptwerks, welche 1862 unter dem Titel: Die Ausdehnungslehre (Berlin, Enslin) erschien*). „Ich bin, sagt er in der vom August 1861 datirten Vorrede zu dieser Umarbeitung, der festen Zuversicht, dass die Arbeit, welche ich auf die vorgetragene Wissenschaft verwandt habe und welche einen bedeutenden Zeitraum meines Lebens und in demselben die gespannteste Anstrengung meiner Kräfte in Anspruch genommen hat, nicht verloren sein werde. Zwar weiss ich wohl, dass die Form, die ich der Wissenschaft gegeben habe, eine unvollkommene ist und sein muss. Aber ich weiss auch, dass, wenn dies Werk noch neue 17 Jahre oder länger hinaus müssig liegen sollte, ohne in die lebendige Entwickelung der Wissenschaft einzugreifen, dennoch eine Zeit kommen wird, wo es aus dem Staube der Vergessenheit gezogen werden wird und die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden.“

Während er in $\mathfrak{A}_1$ seine neue Wissenschaft unabhängig von andern Zweigen der Mathematik von Grund aus und in mehr philosophischer Form aufbaute, hat er in $\mathfrak{A}_2$ unter Voraussetzung wenigstens der mehr elementaren Theile der Mathematik in der Form der Darstellung gerade den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, indem er die Euklidische Form wählte, und vielleicht hat diese Form, in der sich Erklärung, Lehrsatz, Beweis ablösen, auch wieder etwas vom Studium des Werkes abgeschreckt: wir sind in der That noch nicht so weit, dass Grassmann's Ideen, wie er es gehofft hat, in lebendige Wechselwirkung mit der Zeitentwickelung getreten sind. Jedoch ein Umschwung ist erfolgt, die Anerkennung hat Grassmann in der letzten Zeit nicht mehr gefehlt, die Zahl derer, die in seine Ideen einzudringen suchen, nimmt zu.

Zuerst hat wohl H. Hankel in der 1867 erschienenen Theorie der complexen Zahlensysteme (S. 16, 105, 112, 119—140, insbesondere 140) auf die Bedeutung Grassmann's aufmerksam gemacht; dann aber hat Clebsch kurz vor seinem Tode in seiner dem Gedächtniss Plücker's gewidmeten ausgezeichneten Schrift (Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 15, S. 8, 28) auf

*) Nach Grassmann's eigenem Beispiele sollen diese beiden Ausdehnungslehren von 1844 (bez. 1878) und 1862 mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet werden.

die tiefsinnigen Arbeiten Grassmann's hingewiesen, in denen erst später erkannte geometrische Wahrheiten als Corollare viel allgemeinerer und sehr abstracter Untersuchungen auftreten. In der wissenschaftlichen Biographie von Clebsch (Math. Ann. Bd. VII, S. 12, 31) ist gleichfalls die Bedeutung Grassmann's hervorgehoben worden. Auf Clebsch's Veranlassung ist ihm auch die wissenschaftliche Auszeichnung zu Theil geworden, zum Correspondenten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erwählt zu werden.

Was jedoch Grassmann sehnlichst wünschte, wie er selbst in der Vorrede der Ausdehnungslehre von 1862 ausspricht, einen akademischen Lehrstuhl zu gewinnen und einen Kreis von Schülern um sich zu sammeln und zur weiteren Entwickelung und Bereicherung seiner Ideen anzuregen, das ist ihm versagt geblieben.

Der Mangel der Anerkennung seiner mathematischen Arbeiten hat Grassmann schon seit 1852 von der Mathematik, ähnlich wie Plücker, zu andern Studien, doch zu viel weiter abliegenden geführt. Er beschäftigte sich mit dem Sanskrit, dem Gothischen, dem Litthauischen, dem Zend, ja selbst dem Chinesischen, in dessen Anfangsgründen er Missionäre unterrichtete. In Kuhn's Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung veröffentlichte er seit 1859 mehrere linguistische Arbeiten. „Die Sprachwissenschaft und vor allem die Lautlehre zogen seinen mathematisch geschulten Geist mehr an als die eigentliche Philologie, weil da wissenschaftliche Gesetze gewonnen werden konnten. Hier kommt die Helligkeit seines Nachdenkens, das in alle Winkel des Gegenstandes dringt, die Beharrlichkeit, mit welcher dem Stoffe so lange zugesetzt wird, bis er sich die einfachste Formulirung des Gesetzes abringen lässt, zur Erscheinung.“ (B. Delbrück, Augsb. Allgem. Zeitung, Beilage, 18. Oct. 1877.) Grassmann überzeugte sich bald, wie wichtig für seine linguistischen Studien die Kenntniss der ältesten indischen Sprache sei, und ungesäumt ging der Ueberfünfzigjährige an eine grosse Arbeit, die ihn über ein Jahrzehnt beschäftigte: er verfasste ein Wörterbuch zum Rigveda und dann eine Uebersetzung desselben, der nun noch eine Rigveda-Grammatik folgen sollte. Das Wörterbuch war 1875, die Uebersetzung in seinem Todesjahre vollendet.

Die Philologen haben ihm schneller ihre Anerkennung zu Theil werden lassen als die Mathematiker: auf R. Roth's Vorschlag gab ihm („qui acutissima vedicorum carminum interpretatione nomen suum reddidit illustrissimum“) 1876 die philosophische Facultät in Tübingen den Doctortitel honoris causa; was zu thun von den Mathematikern verabsäumt war. Die American Oriental Society ernannte ihn ebenfalls 1876 zu ihrem Mitgliede. Und indem auch auf dem Gebiete derjenigen Wissenschaft, der er doch eigentlich angehörte und der er sich in seinen letzten Jahren wieder mit frischen Kräften zu widmen begann,

die Anerkennung endlich erfolgt war, war ihm wenigstens ein schöner Lebensabend bereitet worden. Weil aber diese Anerkennung so lange gefehlt, schien es um so mehr geboten, dass von Seiten seiner Fachgenossen in dieser Wissenschaft eine Würdigung seiner Leistungen versucht werde. Von dieser Ueberzeugung erfüllt und von befreundeter Seite mehrfach aufgefordert, fanden sich die Verfasser bereit, zum Zustandekommen einer solchen Würdigung zusammenzuwirken. Der oben zuerst genannte versuchte, seinen Lebenslauf zu schildern und die Ausdehnungslehre — mit besonderer Hervorhebung ihrer geometrischen Anwendungen — zu besprechen, der zweite lieferte ausser einem Beitrage über die Rechnungsoperationen der Ausdehnungslehre eine Besprechung der Lehrbücher und der dritte behandelte die physikalischen Schriften.

Den Arbeiten Grassmann's in ihrem ganzen Umfange gerecht zu werden, konnten sie allerdings nicht hoffen: sie mussten sich begnügen, durch ihre Darstellung eine Vorstellung seines Schaffens gegeben zu haben, und halten ihren Zweck für erreicht, wenn sie dazu beigetragen haben, zum Studium der Arbeiten Grassmann's anzuregen. —

Am 15. April 1809 ist Grassmann geboren als Sohn des Professors Justus Günther Grassmann zu Stettin, der selbst sich als Mathematiker und Physiker durch seine Schriften*), die sich durch Gedankenschärfe, exacte Methode und sinnreiche Erfindung auszeichnen, einen Namen erworben hat. Er besuchte das vereinigte Königliche und Stadt-Gymnasium in Stettin, an dem sein Vater wirkte, ging dann auf die Universität Berlin, jedoch um Theologie zu studiren, und hörte dort Vorlesungen bei Boeckh, Hengstenberg, Marheinecke, Neander, Schleiermacher, Raumer, Ritter; besonders scheint er sich an Schleiermacher angeschlossen zu haben. Er hat lange noch an dem Gedanken, Prediger zu werden, festgehalten, bestand seine beiden theologischen Examina mit guten Zeugnissen und hat sein ganzes Leben der positiven Theologie eine warme Neigung bewahrt; er war zuletzt Vorsitzender des pommerschen Hauptvereins für die Evangelisirung China's und aus seinem Nachlasse ist ein Schriftchen: „Ueber den Abfall vom Glauben“ erschienen (Stettin 1878). Mathematische Vorlesungen hat er in Berlin nicht gehört, jedoch privatim Mathematik studirt und zwar vorzugsweise die Schriften seines Vaters, deren eigen-

*) Raumlehre für die untern Gymnasialclassen; Lehrbuch der Trigonometrie; Schulbuch der Raumlehre; Verbesserung der zweistiefeligen Hahnluftpumpe (Gilbert's Ann. Bd. 65); über ein Instrument zur Bestimmung der mittleren Lufttemperatur (Poggend. Ann. Bd. 5); zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre; zur Lehre von der Entstehung der Krystalle (Kästner's Archiv XIII); zur Akustik (Progr.). Eine sehr einfache Bezeichnung der Krystallflächen und der verbesserte Luftpumpenhahn sind wohl die bleibenden Leistungen von Justus Grassmann.

thümliche Anschauungsweise auf seine eigenen Arbeiten von Einfluss gewesen ist. Im Jahre 1840 erwarb er sich in einem Nachexamen die unbedingte facultas docendi für Mathematik, Physik, Mineralogie, Chemie, und in der Prüfungsarbeit über die Ebbe und Fluth — ein Thema, auf das er in einer der letzten Arbeiten (Math. Ann. Bd. XII, S. 222) wieder zurückgekommen ist, — hat er schon einen Theil der Ideen der Ausdehnungslehre entwickelt. Von 1831—43 wechselte er seine Stellung mehrfach, eine Zeit lang war er an der Berliner Gewerbeschule als Nachfolger Steiner's, von dem er wohl mannigfache Anregung empfing. Dann war er wieder in Stettin, und 1842, wo er mit der Abfassung der Ausdehnungslehre beschäftigt war, hielt er in einem Privatkreise Vorlesungen über seine Untersuchungen. Zu diesem gehörten u. A. der jetzige Kriegminister von Kamecke, damals Lieutenant, und Grassmann's Bruder Robert, Verlagsbuchhändler und Redacteur, der auch wiederholt als Schriftsteller aufgetreten ist und nicht blos mehrere in grosser Zahl abgesetzte Schulbücher (biblische Geschichte, Leitfaden der Geographie, Atlas, Rechenhefte), sondern auch Schriften von mathematisch-philosophischer Tendenz, wie die um die Vervollkommnung des Logikcalcüls speciell verdiente „Formenlehre“, die „Lebenslehre“ u. s. f. verfasst hat. 1843 wurde H. Grassmann an der Stettiner Realschule angestellt, 1852, als sein Vater starb, an dem Gymnasium, an dem er selbst seine Bildung empfangen hatte und welches jetzt den Namen Marienstifts-Gymnasium führt, dessen Nachfolger als erster Mathematiker und erhielt bald darauf den Professortitel.

Die erste Zeit seiner Schulwirksamkeit hat ihn auch zu mehreren Schulschriften für den lateinischen und deutschen Unterricht angeregt. 1860 und 1865 erschienen (Berlin, Enslin) seine Lehrbücher der Arithmetik und der Trigonometrie, welche sich durch eine ungewöhnliche Originalität auszeichnen und in dieser Besprechung eine Stelle finden werden.

Aber seine Thätigkeit war noch vielseitiger. Das Jahr 1848 beschäftigte ihn politisch, er schrieb gegen das revolutionäre Treiben in Berlin und gründete mit seinem Bruder Robert die „Deutsche Wochenschrift“, in welcher die brennendsten Tagesfragen besprochen wurden. Oder 1870, während er tief in seinen Sanskritstudien steckt, lässt er eine Schrift: „Deutsche Pflanzennamen“ erscheinen. Den Gesang liebte er sehr und widmete ihm viel Zeit; er sammelte pommersche Volkslieder, wobei er ihre Melodien nach dem Gehör aufschrieb, und leitete den Männergesangverein der Gymnasiasten. Und bei aller dieser umfassenden Beschäftigung fand er doch Zeit, auf die grossen und kleinen Erlebnisse seiner zahlreichen Kinder, deren 8 noch am Leben sind, stets ein wachsames und liebevolles Auge zu haben, wie sein Sohn, Herr Dr. J. Grassmann in Stettin, in den biographischen Notizen

schreibt, die er zur Verfügung zu stellen die Güte hatte. 1849 hatte er sich mit Fräulein Knappe, der hinterlassenen Tochter eines pommerschen Rittergutsbesitzers, verheirathet.

Möbius hatte im Anfang seines barycentrischen Calcüls (Leipzig 1827) folgenden Satz gefunden: Wenn ν Punkte A, B, C, $\cdots$ gegeben sind mit den bezüglichen Coefficienten α, β, γ, $\cdots$, so giebt es jederzeit einen und nur einen Punkt S, so beschaffen, dass, wenn durch A, B, C, $\cdots$, S Parallele in beliebiger Richtung gezogen und mit einer beliebigen Ebene in A', B', C', $\cdots$, S' geschnitten werden,

$$\alpha \cdot AA' + \beta \cdot BB' + \gamma \cdot CC' + \cdots = \sigma \cdot SS',$$

worin $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$ ist. Da die Richtung der Parallelen und die schneidende Ebene gleichgültig sind, so führte Möbius folgende abgekürzte Schreibweise ein:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots = \sigma S.$$

Diese Schreibweise und die durch sie definirte *Addition von Punkten* darf vielleicht neben gewissen mechanischen Betrachtungen als der Quellpunkt der Grassmann'schen *Ausdehnungslehre* angesehen werden; Grassmann geht aber von einer andern Construction des Punktes S aus, wobei er die geometrische Addition der Strecken benutzt. Zu dieser *Addition von Strecken* scheinen in jener Zeit mehrere Geometer unabhängig von einander gekommen zu sein: in Italien Bellavitis 1835 in seiner Theorie der Aequipollenzen und Chelini 1839 (Saggio di geometria analitica trattato con nuovo metodo), in Deutschland Möbius (Mechanik des Himmels 1842) und Grassmann. Bellavitis nennt zwei Strecken äquipollent, wenn sie in Grösse, Richtung und Sinn, aber nicht in der Lage übereinstimmen, Grassmann nennt sie dann gleich oder identisch: eine Parallelverschiebung verändert eine Strecke nicht. Nun ist von ihnen gefunden, dass, wenn mehrere Strecken an einander gereiht werden, so dass der Endpunkt jeder auf den Anfangspunkt der folgenden fällt, die Schlussstrecke, unabhängig vom Ausgangspunkte und der Reihenfolge, dieselbe (oder äquipollent) bleibt, weshalb sie als die (geometrische) Summe der Strecken bezeichnet wurde. Die Summe zweier Strecken ist also den ihnen parallelen Ebenen parallel. Es leuchtet ein, dass die Componirung der Kräfte zu dieser Addition geführt hat.

Hat man wieder eine Reihe von Punkten A, B, C, $\cdots$ mit den Coefficienten α, β, γ, $\cdots$, ist R ein ganz beliebiger Punkt und werden die Strecken αRA, βRB, γRC, $\cdots$ addirt, so aber, dass R Anfangspunkt der zuerst genommenen und demnach auch der Schluss- oder Summenstrecke (oder der Resultante, wenn die Strecken in R angreifende Kräfte sind) ist, so geht diese Summenstrecke, gleichgültig,

wo R liegt, durch einen festen Punkt S, denselben, den Möbius gefunden hat, und ist $\sigma \cdot RS$, also

$$\alpha RA + \beta RB + \gamma RC + \cdots = \sigma RS,$$

wofür dann nach dem Beispiele von Möbius, weil der Punkt R auf S keinen Einfluss hat,

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots = \sigma S$$

geschrieben wird.

Der Punkt S ist der Schwerpunkt der mit den Gewichten α, β, γ, $\cdots$ belasteten Punkte A, B, C, $\cdots$, oder das Centrum der mittleren Entfernungen der Punkte αA, βB, γC, $\cdots$ nach L'Huilier; σS wird von Grassmann die Summe von αA, βB, γC, $\cdots$ genannt.

Der Summenpunkt zweier, dreier Punkte befindet sich auf der verbindenden Geraden, bez. Ebene.

Ist $\sigma = 0$, so bleibt die Summenstrecke, wo auch R liege, äquipollent; Grassmann bezeichnet dann diese unveränderliche Strecke als Summe von αA, βB, γC, $\cdots$; es wäre vielleicht besser gewesen, ihre feste Richtung oder ihren festen unendlich fernen Punkt als Summe zu bezeichnen und die Strecke ihm nur zu „adjungiren", nicht zu substituiren. Sie ist gewissermassen das greifbarere Abbild des unendlich fernen Punktes, an dem sich die numerischen Operationen ebenso vollziehen, wie an dem Punkte selbst.

Der Coefficient eines unendlich fernen Punktes ist also 0 und demgemäss, wenn unter den Summanden einer Summe unendlich ferne Punkte vorkommen, der Coefficient des Summenpunkts nur gleich der Summe der Coefficienten der eigentlichen Punkte. Die Summe selbst aber, die zu einem unendlich fernen Punkte führt, ist nicht 0, und wenn zwei Summen denselben unendlich fernen Punkt liefern, so verhalten sie sich wie die adjungirten Strecken, deren Verhältniss demnach dieselbe Rolle spielt, wie das der Coefficienten desselben eigentlichen Punktes, zu dem zwei verschiedene Summationen führen.

In der obigen Weise ist ein Punkt aus andern durch Rechnung, also *numerisch abgeleitet*.

Jeder Punkt lässt sich aus vier andern von einander unabhängigen ableiten, d. h. von denen keiner aus den drei andern sich ableiten lässt, oder die nicht in derselben Ebene liegen; wie dies schon Möbius gezeigt hat. Die Coefficienten (oder Gewichte) sind dann eben die barycentrischen Coordinaten von Möbius oder die projectiven Coordinaten, wenn der Schwerpunkt der (gleich belasteten) Grundpunkte zum Einheitspunkte (im Fiedler'schen Sinne) genommen wird. Von Grassmann werden die 4 Punkte, aus denen die übrigen abgeleitet werden, Einheiten genannt und die aus ihnen durch diese Addition abgeleiteten *extensive Grössen* 1. Stufe. Sind drei der vier Einheiten un-

endlich ferne Punkte, so hat man Parallelcoordinaten, so jedoch, dass die diesen Punkten adjungirten Strecken je für die betreffende Coordinatenaxe Maasseinheit sind.

Man erhält auf diese Weise ein *Hauptgebiet* 4. Stufe*) und die Punkte, Geraden, Ebenen bilden untergeordnete Gebiete 1., 2., 3. Stufe.

Die Strecken erzeugen ein Gebiet 3. Stufe, da aus drei von einander unabhängigen (nicht selbst aus einander ableitbaren oder durch eine lineare Beziehung verbundenen), d. h. nicht zu derselben Ebene parallelen alle übrigen durch Vervielfachung und (geometrische) Addition sich ableiten lassen. Dieses Gebiet 3. Stufe ist nach Obigem in numerischer Beziehung das Abbild des Gebiets 3. Stufe der unendlich fernen Punkte des Raums.

Die linken Seiten der Gleichungen aller Kreise (Kreisfunctionen von Grassmann genannt) einer Ebene lassen sich numerisch aus denen von vier Kreisen, die nicht demselben Netze angehören, ableiten; also ist jeder Kreis einer festen Ebene extensive Grösse eines Gebiets 4. Stufe. Die Kugeln sind es in einem Gebiete 5. Stufe, alle Flächen 2. Grades in einem Gebiete 10. Stufe u. s. f.

Auf ähnliche Weise könnte auch die Addition von Punkten definirt werden. Es besteht bekanntlich zwischen den linken Seiten der Gleichungen von 5 Punkten im Raume eine Relation, so dass jede sich als eine (algebraische) Vielfachensumme der 4 andern ausdrücken lässt. Wählt man gerade die Form der Gleichung des Punktes, welche Hesse Normalform nennt,

$$x_i u + y_i v + z_i w + 1 = 0,$$

und lässt E_i, A die linken Seiten bedeuten, so giebt die Addition

$$\sigma_a A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4$$

genau denselben Punkt wie die Möbius'sche oder Grassmann'sche Construction.

Diese geometrischen Beispiele mögen Grassmann zu dem Begriffe der *extensiven Grössen* geführt haben. Er hat aber allgemeinere Vorstellungen damit verknüpft. In $\mathfrak{A}_1$ beginnt er mit den geometrischen Vorstellungen, und ist dies deshalb oben auch geschehen; in $\mathfrak{A}_2$ dagegen hat er gleich den allgemeinen Fall von n Einheiten vorgenommen und das geometrische Beispiel des Punktraums später als interessanteste (und bis jetzt allein vollständig durchgeführte) Anwendung gebracht. Im Uebrigen soll hier vorzugsweise $\mathfrak{A}_2$ als das spätere Werk angezogen

---

*) Wegen der dreifach unendlichen Zahl der Punkte heisst sonst der Punktraum 3. Stufe, und die Gerade und Ebene sind 1., bez. 2. Stufe. Hier ist jeder Punkt selbst Ort unendlich vieler — mit verschiedenen Coefficienten behafteter — extensiver Grössen 1. Stufe und in sofern ein Gebiet. Grassmann's Bezeichnung ist ja eben die für die Geometrie homogener Coordinaten geeignetste.

werden, das die andern in sich aufgenommen hat, am umfassendsten und wohl allgemein am verständlichsten gewesen ist.

Also aus n selbst in keiner Zahlbeziehung stehenden Einheiten $e_1, \cdots e_n$ entsteht durch Vervielfachung und Summirung die extensive Grösse:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Die Aufstellung des *Calcüls mit solchen hypercomplexen* (höheren complexen, mehrfach benannten) *Zahlen* ist der Grundgedanke, von welchem Grassmann's Untersuchungen ausgehen; er kann unter den der Rechnung mit Zahlengruppen, welchen Sir W. R. Hamilton fast gleichzeitig mit Grassmann's ersten Arbeiten in seiner Quaternionentheorie verfolgt und ausgesprochen hat, subsumirt werden.

Für die additive und subtractive Verknüpfung von verschiedenen extensiven Grössen liegt es nahe, die gemeinen Rechnungsregeln gelten zu lassen, unter deren Anwendung man einfach die gleichnamigen Glieder zusammenziehen wird. In gleicher Weise sind jene Rechnungsregeln festzuhalten für die Verbindung einer extensiven Grösse a mit einer gemeinen Zahl α durch Multiplication und Division und wird z. B. stets: $\alpha a = a \alpha$ gelten.

Was hingegen die *Multiplication zweier extensiven Grössen* a, b betrifft, so erscheint das Product ab zunächst sinnlos. Seine Interpretation kann aber zurückgeführt werden auf die Deutung der Einheitsproducte selbst, von welchen es a priori noch freisteht, $e_2 e_1$ unabhängig und anders als $e_1 e_2$ zu deuten. Zu jener Zurückführung empfiehlt es sich, das distributive Princip oder die Multiplicationsregel für Polynome zu Hülfe zu nehmen mit der behufs Beseitigung aller Zweideutigkeit erforderlichen Zusatzbestimmung, dass beim Ausmultipliciren der Aggregate a und b, m. a. W. bei der Bildung der Einzelproducte, aus denen das zu entwickelnde Ergebniss zusammenzusetzen sein wird, die aus den Factoren a und b zu entnehmenden Einheiten jeweils in derselben Reihenfolge multiplicativ zu verknüpfen sind, wie a und b selbst, d. h. wenn z. B.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \qquad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

so ist

$$\begin{aligned} a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 e_1^2 &+ \alpha_2 \beta_1 e_2 \cdot e_1 + \alpha_3 \beta_1 e_3 \cdot e_1 \\ + \alpha_1 \beta_2 e_1 \cdot e_2 &+ \alpha_2 \beta_2 e_2^2 + \alpha_3 \beta_2 e_3 \cdot e_2 \\ + \alpha_1 \beta_3 e_1 \cdot e_3 &+ \alpha_2 \beta_3 e_2 \cdot e_3 + \alpha_3 \beta_3 e_3^2, \end{aligned}$$

worin z. B. $\alpha_2 \beta_1 e_2 \cdot e_1$ und $\alpha_1 \beta_2 e_1 \cdot e_2$ noch nicht zusammengezogen werden dürfen.

Zur weitern Bestimmung einer *speciellen Art der Multiplication* von extensiven Grössen können nun „Zahlbeziehungen" zwischen den binären Einheitsproducten $e_1 e_2$, $e_2 e_1$, $e_1 e_3$, $\cdots$ angenommen werden —

Systeme von sog. Bestimmungsgleichungen der betreffenden Multiplicationsweise.

Ausführlicher als in $\mathfrak{A}_2$ zeigt Grassmann in einem Aufsatze des Crelle'schen Journals*), dass, wenn die Bestimmungsgleichungen bezüglich sämmtlicher Einheiten symmetrisch sein und ausserdem fortbestehen sollen, falls man irgend eine Einheit e durch die entgegengesetzte $-e$ ersetzt, noch 16 Arten der Multiplication möglich sind, für welche das Bestehen oder Nichtbestehen irgend welcher von den folgenden 4 Gleichungen (bez. Gleichungssystemen) charakteristisch ist:

$$1)\ e_i e_k = e_k e_i, \qquad 2)\ e_i e_k + e_k e_i = 0,$$
$$3)\ e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_n^2, \quad 4)\ e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = 0,$$

worin i und k zwei verschiedene von den Indices 1 bis n sind.

Das höchste wissenschaftliche Interesse schreibt Grassmann den von ihm sogenannten *linealen Multiplicationen* zu. Lineal nennt er eine solche Productbildung, deren Bestimmungsgleichungen von den Einheiten auf die daraus beliebig linear zusammengesetzten extensiven Grössen sich übertragen. Er zeigt, dass es nur zwei solche Multiplicationen giebt, wofern von den beiden Multiplicationsarten abgesehen wird, von denen die eine keiner Bestimmungsgleichung unterworfen ist, während bei der andern sämmtliche binären Einheitsproducte null sind.

Für die linealen Multiplicationen gelten entweder die Gleichungen 1) und damit alle Gesetze der gewöhnlichen arithmetischen (algebraischen) Multiplication, insbesondere das Commutationsgesetz $ab = ba$; oder aber es gelten die Gleichungen 2) für beliebige ungleiche und gleiche Indices i, k, woraus dann $ab = -ba$ und $a^2 = 0$ folgt, oder nach der von Grassmann für diese Multiplication eingeführten Bezeichnung mit „scharfen“ Klammern: $[ab] = -[ba]$ und $[aa] = 0$. Die letztere Multiplicationsart, die *combinatorische* oder *äussere*, wird nun in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ eingehend studirt. Wir heben folgende Gesetze hervor: Die Vertauschung zweier Factoren 1. Stufe ändert das Vorzeichen des Products, ein Product mit zwei gleichen Factoren verschwindet, mithin auch ein Product aus Factoren, die nicht von einander unabhängig sind. Ein äusseres Product hat folglich nur dann einen Werth, wenn jeder Factor ausserhalb des Gebiets der aus den andern ableitbaren Grössen liegt; daher der Name. Ein äusseres Product ändert seinen Werth nicht, wenn zu einem Factor desselben das Vielfache eines andern addirt wird, oder, wie Grassmann sagt, wenn jener eine *lineale Aenderung* erfährt, und umgekehrt, die Factoren des einen zweier gleichen Producte lassen sich durch lineale Aenderung in die des andern überführen. In leichter und ungezwungener Weise gelangt Grassmann

*) Sur les différents genres de multiplication Bd. 49, S. 123.

dann zu den Fundamentalsätzen der Determinantentheorie, zur eleganten Lösung verschiedener Eliminationsprobleme, wie dies später in etwas populärerer Weise H. Hankel a. a. O. auseinandergesetzt hat. Mit den alternirenden Zahlen des letzteren sind Grassmann's der combinatorischen Multiplication unterworfene extensive Grössen identisch, desgleichen deren Einheiten mit Cauchy's clefs algébriques (Comptes rendus Bd. 36; Exerc. d'analyse et de phys. math. Bd. 4), bei denen Grassmann's Priorität nicht berücksichtigt worden ist.

Ein Product von n aus ebenso vielen Einheiten abgeleiteten extensiven Grössen ist in der That geradezu gleich dem Producte aus der Determinante der Coefficienten in das geordnete Product der Einheiten*).

Wenden wir also die äussere Multiplication auf zwei Punkte an**).

$$\sigma_\alpha A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4\,,$$
$$\sigma_\beta B = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4\,,$$

indem $\sigma_\alpha = \Sigma\alpha_i$, $\sigma_\beta = \Sigma\beta_i$. Also ist

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta[AB] = (\alpha_1\beta_2)[E_1E_2] + (\alpha_2\beta_3)[E_2E_3] + (\alpha_3\beta_1)[E_3E_1]$$
$$+ (\alpha_3\beta_4)[E_3E_4] + (\alpha_1\alpha_4)[E_1E_4] + (\alpha_2\beta_4)[E_2E_4]\,,$$

worin $(\alpha_i\beta_k) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix}$; weil $[E_iE_i] = 0$, $[E_kE_i] = -[E_iE_k]$.

Die 6 Einheitsproducte sind die Einheiten für die extensiven Grössen 2. Stufe und alle extensiven Grössen 2. Stufe sind aus ihnen, sie aber nicht aus einander numerisch ableitbar.

Zu jedem äusseren Producte m^{ter} Stufe extensiver Grössen 1. Stufe, das nicht 0 ist, gehört ein Gebiet m^{ter} Stufe, das aller extensiven Grösse 1. Stufe, die aus den Factoren ableitbar sind.

Das Product $[AB]$ ist das Stück der Verbindungsgeraden von A, B zwischen ihnen: ein *Linientheil*, wie Grassmann sagt. $\sigma_\alpha\sigma_\beta[AB]$ ist das $\sigma_\alpha\sigma_\beta$-fache desselben. Das äussere Product von αA und βB ist demnach ein Stück auf der Geraden AB, gleich dem $\alpha\beta$-fachen des Segments AB. Es leuchtet ein, dass $[AB] = -[BA]$ und $[AA] = 0$; ferner, dass $[A(B+\lambda A)] = [AB]$, denn wenn $B + \lambda A = (1+\lambda)C$, so ist $AC : CB = 1 : \lambda$, oder $AC : AB = 1 : 1 + \lambda$, also auch

*) Darin, dass nur lineare Zahlbeziehungen zwischen binären Einheitsproducten als Bestimmungsgleichungen genommen sind, scheint übrigens eine gewisse Beschränkung zu liegen. Es wäre z. B. eine Productbildung im obigen Sinne auch lineal zu nennen, zu deren Bestimmung weiter nichts festgesetzt ist, als dass durchweg $e_\varkappa(e_\lambda e_\mu) = (e_\varkappa e_\lambda)e_\mu$. Leicht würde zu folgern sein, dass auch allgemein $a(bc) = (ab)c$, wonach die Multiplication blos associativ, nicht commutativ sein müsste und auch nicht dem Gesetze $ab = \pm ba$ unterworfen zu sein brauchte.

**) Für Punkte und also auch für die Einheiten mag die übliche Bezeichnung durch grosse Buchstaben angewandt werden.

$[AC] = \frac{1}{1+\lambda}[AB]$; $[A(B+\lambda A)] = (1+\lambda)[AC] = [AB]$. Zwei Linientheile sind nur dann gleich, wenn sie bei gleicher Länge denselben Träger haben; da aus zwei Punkten sich nur die Punkte ihrer Verbindungslinie numerisch ableiten lassen. Der Linientheil ist mithin nur noch auf seinem Träger verschiebbar; was ihn wesentlich von der Strecke unterscheidet. Mechanisch also ist der Linientheil eine Kraft.

Wenn zwischen zwei Punktsystemen eine Beziehung stattfindet (die nothwendig in den Punkten linear sein muss, da sie sonst keine Beziehung zwischen Punkten ist):

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha' A + \beta' B + \cdots,$$

so ist es natürlich, dass sie auch nach äusserer Multiplication mit einem beliebigen Punkte R bestehe:

$$\alpha[RA] + \beta[RB] + \cdots = \alpha'[RA'] + \beta'[RB'] + \cdots;$$

dies ist aber nach dem früher Gesagten gerade die Erläuterung der obigen Punkterelation, vorausgesetzt, dass die Addition von zwei Linientheilen, deren Träger sich schneiden, so erfolgt, wie die Componirung von Kräften. Auf diese Weise ist die Interpretation des Products zweier Punkte als Linientheil begründet und gleichzeitig die Addition der Linientheile definirt.

Linientheile also, deren Träger durch denselben Punkt gehen oder in derselben Ebene liegen, lassen sich zu einem Linientheile addiren. Dies ist jedoch nicht bei beliebig im Raume gelegenen Linientheilen der Fall. Die Darstellung aber jedes Linientheils als Vielfachensumme von 6 Einheits-Linientheilen, von denen die 3 ersten z. B. in derselben Ebene $E_1 E_2 E_3$ liegen, die 3 letzten durch denselben Punkt E_4 gehen, also je sich zu einem Linientheile vereinigen lassen, zeigt, da ja die Einheitspunkte beliebige (nicht derselben Ebene angehörige) Punkte sein können, dass jede Summe von Linientheilen sich auf zwei Linientheile reducirt, von denen der eine durch einen beliebig gegebenen Punkt geht, der andere in einer beliebig gegebenen Ebene, die jenen nicht enthält, sich befindet. In gewissem Sinne ist also die Addition von Linientheilen im Allgemeinen nicht ausführbar, d. h. führt nicht zu einer einzigen Grösse.

Derartige Summengrössen von blos formeller Bedeutung ergeben sich, wenn n Einheiten zu Grunde liegen, bei der Addition von Producten 2^{ter} bis $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe.

Die Bedingung, unter der eine Vielfachensumme von Linientheilen einen einzigen Linientheil giebt oder, mechanisch gesprochen, eine Reihe von Kräften im Raume mit einer Kraft äquivalent ist, ist von Grassmann angegeben.

Das Verschwinden einer solchen Summe, mechanisch die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte, ist eine einzige extensive Gleichung,

die, wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der 6 Einheitsproducte, in 6 algebraische zerfällt, welche mit den gewöhnlichen übereinstimmen, wenn unter den Einheitspunkten sich 3 unendlich ferne befinden.

Man ersieht leicht, dass die 6 Coefficienten der Einheitsproducte in dem Ausdrucke für einen Linientheil die Coordinaten des Trägers desselben, oder genauer des Linientheils selbst sind; proportionale Veränderung macht sie zu Coordinaten der verschiedenen Linientheile derselben Geraden und somit zu *Coordinaten der Geraden.* Direct hat zwar Grassmann diese Coefficienten nicht als Liniencoordinaten bezeichnet, aber man muss mit Clebsch sagen, dass dieselben doch in der Ausdehnungslehre enthalten sind (Gedächtnissschrift auf Plücker S. 28 Anm.).

Nicht jede 6 Coefficienten geben eine Vielfachensumme der Einheits-Linientheile, die zu einem Linientheile führt; die eben erwähnte Bedingung giebt die deshalb zwischen den 6 Coordinaten einer Geraden nothwendige Relation, nämlich

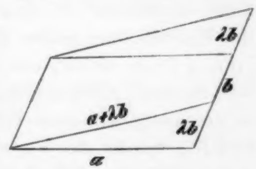
$$\gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{23}\gamma_{14} + \gamma_{31}\gamma_{24} = 0,$$

wenn $\gamma_{ik} = (\alpha_i \beta_k)$.

Im Fall diese Bedingung nicht erfüllt wird, das Kräftesystem also bei mechanischer Deutung nur auf zwei Kräfte sich reduciren lässt, sind die 6 Coefficienten die Coordinaten des *linearen Complexes*, der mit dem Nullsysteme des Kräftesystems verbunden ist, d. h. die Coefficienten seiner Gleichung.

Das äussere Product eines einfachen eigentlichen Punktes mit einem unendlich fernen ist ein Linientheil, der mit der dem unendlich fernen Punkte adjungirten Strecke äquipollent ist und dessen Träger durch den eigentlichen Punkt geht; oder, um mit Grassmann zu reden: eine Strecke wird durch Multiplication mit einem Punkte „starr“.

Das äussere Product zweier Strecken a, b — mit dem sich gleichzeitig Saint-Venant (C. R. Bd. 21, S. 620 (1845)) beschäftigt hat — ist das durch ihre Aneinanderreihung entstehende, in ihrem Sinne umlaufene, parallel verschiebbare Parallelogramm. Dass $[ab] = [(a + \lambda b)\, b]$, zeigt die nebenstehende Figur unmittelbar. Durch eine solche lineale Aenderung kann man zwei Streckenproducte so transformiren, dass sie einen Factor gemein haben, dessen Richtung die der Schnittlinie der Trägerebenen des einen und des andern Products sind. Durch $[ab] + [ac] = [a(b + c)]$ ist die Addition von zweifactorigen Streckenproducten auf die von Strecken zurückgeführt. Ist also das eine Product in $ABCD$, das andere in $DCEF$ transformirt, so ist die Summe mit $ABEF$ äquipollent.



Dem Producte zweier unendlich fernen Punkte, also einem unendlich fernen Linientheile, der, ebenso wie die beiden Factoren, den Coefficienten 0 hat, ist ein Streckenparallelogramm adjungirt, das in numerischer Beziehung das Abbild jenes ist; einer unendlich fernen unendlich kleinen Kraft (oder einem Kräftepaar, denn zwei parallele entgegengesetzt gleiche Linientheile haben zur Summe einen unendlich fernen) sein Moment.

Das äussere Product $[ABC]$ dreier Punkte A, B, C oder des Linientheils $[AB]$ und des Punktes C führt zu dem Parallelogramme der Ebene ABC, das durch die 3 Punkte bestimmt ist und in der Richtung ABC umlaufen wird, oder, in mechanischer Deutung, zum Momente von $[AB]$ in Bezug auf C. Grassmann nennt dies Product einen *Flächentheil.*

Wir haben

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma [ABC] = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)[E_1 E_2 E_3] + (\alpha_2 \beta_3 \gamma_4)[E_2 E_3 E_4] \\ + (\alpha_3 \beta_4 \gamma_1)[E_3 E_4 E_1] + (\alpha_4 \beta_1 \gamma_2)[E_4 E_1 E_2],$$

worin $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$ u. s. f. die Determinanten sind. Zwei gleiche Flächentheile müssen in derselben Ebene liegen; oder der Flächentheil ist nur in seiner Ebene variabel. Dass $[ABC] = [(A + \lambda B + \mu C)BC]$, ist wiederum leicht geometrisch einzusehen. Durch diese lineale Aenderung kann man zwei Flächentheile stets so umwandeln, dass sie zwei Factoren gemeinsam haben: $[ABC] + [ABD] = [AB(C + D)]$; also ist die Addition zweier Flächentheile auf die von Punkten zurückgeführt und geschieht analog der von zwei zweifactorigen Streckenproducten, nur dass der Träger der Summe nicht mehr verschiebbar ist, sondern durch die Schnittlinie der Träger der Summanden gehen muss. Dass aus einer linearen Relation zwischen Linientheilen durch äussere Multiplication mit einem beliebigen Punkte eine richtige Relation zwischen Flächentheilen sich ergiebt, bestätigt die Richtigkeit der Interpretation des dreifactorigen Punktproducts. Die Coefficienten der 4 Einheitsproducte in dem Ausdruck eines Flächentheils sind offenbar die Coordinaten seiner Ebene (genauer wiederum des Flächentheils). $[ABX] = 0$ drückt aus, dass der Flächentheil 0 ist, oder dass X dem Gebiete von $[AB]$ angehört, also auf der Geraden AB liegt. Wir haben so die einzige extensive Gleichung einer Geraden, die in vier algebraische zerfällt, welche das Verschwinden der Coefficienten der vier von einander unabhängigen Einheitsproducte $[E_1 E_2 E_3]$, $[E_2 E_3 E_4]$, $[E_3 E_4 E_1]$, $[E_4 E_1 E_2]$ ausdrücken und von denen zwei die Folge der andern sind.

Das äussere Product eines eigentlichen Punktes mit zwei unendlich fernen ist ein dem Producte der den beiden letzteren adjungirten Strecken äquipollenter Flächentheil, dessen Ebene durch den eigentlichen Punkt geht, also ein starr gemachtes Streckenproduct.

Das Product dreier Strecken ist ein verschiebbares Parallelopiped von gleichem Inhalte mit dem von den 3 an einander gereihten Strecken gebildeten und das Abbild des Products dreier unendlich fernen Punkte.

Das äussere Product $[ABCD]$ von vier Punkten, die auch zu Linien- und Flächentheilen zusammengefasst werden können, ist das durch sie bestimmte Parallelopiped (oder der „Spat", wie Grassmann sagt). Man erhält

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\delta[ABCD] = (\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)[E_1E_2E_3E_4];$$

also jedes solche Product 4. Stufe in einem Hauptgebiete 4. Stufe steht zu dem Producte der Einheiten in einem einfachen Zahlverhältniss, mithin auch je zwei unter einander. Nimmt man dieses Einheitsproduct 4. Stufe (allgemein n^{ter} Stufe) als absolute Einheit, so ergiebt sich jedes Product 4^{ter} (bez. n^{ter}) Stufe als Zahl, also 0^{ter} Stufe.

$[ABCX] = 0$ drückt aus, dass X dem Gebiete von $[ABC]$, also der Ebene ABC angehört, ist mithin die extensive Gleichung einer Ebene, die nach Division mit $[E_1E_2E_3E_4]$ in die algebraische Gleichung

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3\xi_4) = 0$$

übergeht.

$[AB\cdot XY] = 0$ sagt aus, dass $[AB]$ und $[XY]$ einen Spat vom Inhalt 0 bilden, also derselben Ebene angehören, folglich ist es die Gleichung des speciellen linearen Complexes mit der Directrix AB; setzen wir $(\alpha_i\beta_k) = \gamma_{ik}$ und $(\xi_i\eta_k) = p_{ik}$, so erhalten wir nach Division mit $[E_1E_2E_3E_4]$ die algebraische Gleichung desselben:

$$\gamma_{12}p_{34} + \gamma_{23}p_{14} + \gamma_{31}p_{24} + \gamma_{34}p_{12} + \gamma_{14}p_{23} + \gamma_{24}p_{13} = 0;$$

bis zu welcher nun freilich Grassmann wiederum nicht selbst gelangt ist.

Multiplicirt man den Ausdruck für $\sigma_\alpha\sigma_\beta[AB]$ nach und nach mit den Einheitsproducten $[E_1E_2]$ etc., so erhält man die Coordinaten, und diese sind demnach den von einem Linientheile der betrachteten Geraden mit den Kanten des Einheitstetraeders gebildeten Spaten oder nach Möbius-Cayley's Ausdruck mit den Momenten der Geraden bezüglich der Kanten proportional, wie dies später Zeuthen (Math. Ann. I) bemerkt hat.

Es wäre interessant, die Bedeutung der äussern Producte in den andern oben erwähnten geometrischen Beispielen zu studiren.

Ueber n Factoren hinaus (in einem Hauptgebiete n^{ter} Stufe) lässt sich aber die äussere Multiplication nicht führen, da jedes solche Product verschwindet, weil die Factoren nicht mehr unabhängig von einander sind. Zu dem Ende hat Grassmann — vermuthlich durch das Princip der Dualität geleitet — für Factoren, deren Stufensumme n übersteigt, eine andere Art der Multiplication eingeführt, die er die *regressive* oder — in $\mathfrak{A}_1$ — die *eingewandte Multiplication* nennt; im Gegensatz zu ihr

heisst dann die bisherige, bei der die Stufensumme der Factoren höchstens n ist, die *progressive*; ein Product, das durch diese beiden Multiplicationen zu Stande kommt, wird ein (auf das Hauptgebiet) *bezügliches* genannt und ein mehrfactoriges rein oder gemischt, je nachdem nur die eine oder beide Arten vorkommen. Zur Erklärung der regressiven Multiplication wird der Begriff der *Ergänzung* aufgestellt. Unter der Ergänzung einer Einheit 1^{ter} bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe wird diejenige Einheit verstanden, mit der, als zweitem Factor, die erstere äusserlich multiplicirt das Product $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ giebt, welches, um es nicht als einen constanten Factor durch die ganze Betrachtung mitzuschleppen, gleich 1 gesetzt wird. So sind z. B. die Ergänzungen von E_2, $[E_2 E_3]$, $[E_1 E_2 E_4]$ im Punktraume 4. Stufe, welche mit $|E_2$, $|[E_2 E_3]$, $|[E_1 E_2 E_4]$ bezeichnet werden, bez. $[E_1 E_3 E_4]$, $[E_1 E_4]$, $-E_3$. Wie eine abgeleitete Grösse aus den Einheiten oder Einheitsproducten, so wird aus deren Ergänzungen die ihrige abgeleitet; und, abgesehen vom Vorzeichen, ist die Ergänzung der Ergänzung einer Grösse diese selbst. Im Punktraume 4. Stufe sind, was Grassmann sicher gewusst, aber nicht ausgesprochen hat, die Träger sich ergänzender Gebilde reciprok in Bezug auf die imaginäre Fläche 2. Grades, deren Gleichung in barycentrischen Coordinaten

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$$

ist und für welche die 4 Einheitspunkte ein Poltetraeder bilden. Wenn also unter den Einheiten 3 unendlich ferne Punkte in zu einander senkrechten Richtungen sich befinden, deren adjungirte Strecken gleich lang sind, ist diese Fläche eine imaginäre Kugel um den endlichen Einheitspunkt. Jeder unendlich ferne Punkt oder seine Richtung, jeder Linientheil ist in diesem Falle zu einer Ergänzung senkrecht.

Unter dem regressiven Producte zweier extensiven Grössen A, B, deren Stufensumme $a+b>n$ ist, versteht man nun diejenige extensive Grösse, deren Ergänzung gleich dem Product der Ergänzungen der beiden Factoren ist; diese sind von den Stufen $n-a$, $n-b$, ihr Product progressiv und von der Stufe $2n-(a+b)$, seine Ergänzung also von der Stufe $a+b-n$. Da $a+b>n$, so haben die den Factoren zugehörigen Gebiete mindestens ein Gebiet von der Stufe $a+b-n$ gemein; man kann nun jeden von ihnen durch lineale Aenderung so transformiren, dass er einen Factor enthält, dem dieses Gebiet zugehört; also $A=[PQ]$, $B=[PR]$, wo P, Q, R bez. die Stufen $p=a+b-n$, $q=n-b$, $r=n-a$ haben, also $p+q+r=n$ ist. Es wird nun der wichtige Satz gewonnen, dass $[AB]=[PQ\cdot PR]$ $=[PQR]P$, worin $[PQR]$ n^{ter} Stufe, also eine Zahl ist. Demnach ergiebt sich eine extensive Grösse, deren Gebiet das gemeinsame von A und B ist. Ist das gemeinsame Gebiet von höherer als $(a+b-n)^{\text{ter}}$

Stufe, so verschwindet das regressive Product. Wenn $a+b \overline{\gtrless} n$, so befinden sich A und B im Allgemeinen in einem Gebiete von der Stufe $a+b$ (ihrem „verbindenden“ Gebiet): es ist das zu ihrem (progressiven) Producte gehörige. Befinden sich A und B in einem Gebiet niedrigerer Stufe, so ist $[AB]=0$. Für den Punktraum 4. Stufe ergiebt sich so als regressives Product eines Linien- und eines Flächentheils ein gewisses Vielfache des Schnittpunktes der Träger, als regressives Product zweier Flächentheile ein Linientheil auf der Schnittlinie der beiden Träger. Ist $a+b=n$, so führt die regressive wie die progressive Multiplication zu demselben Resultate, und zwar zu einer Zahl (extensiven Grösse 0^{ter} Stufe).

Grassmann discutirt ausführlich die Gesetze der mehrfactorigen bezüglichen Producte, z. B. ob und wann auf einander folgende Factoren vertauscht oder zusammengefasst werden können, wann die Producte durch das Verschwinden gewisser Factoren oder des Products einer Factorenreihe selbst verschwinden, betrachtet insbesondere solche Producte, deren Stufensumme ein Vielfaches von n ist, die also in eine Zahl übergehen und deren Verschwinden nur zu einer einzigen algebraischen Gleichung führt.

Sind die Einheiten 1. Stufe wiederum Punkte, in welchem Falle, wie wir oben gesehen, die bezügliche Multiplication den *projectiven Constructionen*, Verbinden und Schneiden, entspricht, dann ist durch das Verschwinden eines bezüglichen Products n^{ter} (oder 0^{ter}) Stufe, in dem eine variable extensive Grösse vorkommt, ein Ort derselben bestimmt; und wir haben eine planimetrische ($n=3$) oder stereometrische ($n=4$) Gleichung. Da hier wegen des Verschwindens des Products die Coefficienten der Punkte, Linien- und Flächentheile herausgehen, durch welche allein sich die verschieden vielfachen an derselben Stelle befindlichen Punkte, die verschiedenen Linientheile einer Geraden, bez. Flächentheile einer Ebene unterscheiden, so kann man kurz von einfachen Punkten, von Geraden und Ebenen sprechen und als das bezügliche Product zweier dieser Elemente ihr verbindendes, bez. gemeinsames Element bezeichnen.

Ist z. B. das variable Element ein Punkt X, so erhält man bei $n=3$ eine algebraische ebene Curve, bei $n=4$ eine algebraische Fläche, und man gewinnt das folgende allgemeine Gesetz für deren Construction, das jedoch nur für die Flächen ausgesprochen werden mag:

Wenn aus einer Reihe fester Punkte, Geraden, Ebenen und einem variablen Punkt X durch Verbinden und Schneiden ein Punkt und eine Ebene oder zwei Gerade construirt werden, so erzeugen die Punkte X, für welche der construirte Punkt in der construirten Ebene liegt, bez. die beiden Geraden in dieselbe Ebene fallen, oder, mit Grassmann's Terminologie, für welche Punkt und Ebene, bez. die beiden Geraden

incident sind, eine Fläche n^{ter} Ordnung, sobald X bei der Construction n-mal verwandt wird, und umgekehrt, jede Fläche n^{ter} Ordnung kann so erzeugt werden. Aehnliches gilt natürlich, wenn das variable Element eine Gerade oder Ebene ist. Dies ist *die allgemeine rein geometrische Construction der algebraischen Plancurven, Flächen und*, wie nun hinzugefügt werden kann, *Complexe,* auf die in der Plücker- sowie in der Clebsch-Biographie hingewiesen wird (S. 8, bez. S. 31).

Die geometrischen Aufsätze Grassmann's im Crelle'schen Journale beschäftigen sich vorzugsweise damit, diese Constructionen auf die einfachsten Formen zurückzuführen. Insbesondere werden die Curven und Flächen der 2. und 3. Ordnung betrachtet. Grassmann definirt die Multiplication der geometrischen Elemente selbständig, setzt die Transformationen aus einander, die man mit derartigen geometrischen Producten, zumal solchen 0^{ter} Stufe, vornehmen kann, und interpretirt sie.

So z. B. ist die (planimetrische) Gleichung eines Kegelschnitts:

$$[XAbCdEX] = 0,$$

worin b, d feste Geraden (genauer Linientheile), A, C, E feste Punkte sind und X der erzeugende Punkt ist. Die Gleichung sagt aus, dass die Gerade $x = [XAbCdE]$, welche durch Verbindung von X mit A, Schnitt von XA mit b in Y, Verbindung von Y mit C und Schnitt von YC mit d in Z und endlich Verbindung von Z mit E entsteht, durch X gehen soll; sie entspricht also der bekannten Maclaurin'schen Construction, dem einfachsten Falle der Erzeugung durch projective Büschel. Die construirten Elemente, welche incident sein sollen, sind also x und X selbst.

Das obige planimetrische Product kann aber beispielsweise folgende Transformationen erleiden:

$[XAbCd \cdot EX] = 0$ oder $[XAbCd \cdot XE] = 0$, $[XAbC \cdot XEd] = 0$,

worin die Elemente, welche incident sein sollen, der Punkt $Z = XAbCd$ und die Gerade EX, bez. die Gerade $YC = XAbC$ und der Punkt XEd sind; oder auch:

$$[XAb \cdot C \cdot XEd] = 0,$$

welche aussagt, dass die 3 Punkte XAb, C, XEd auf derselben Geraden liegen (einen Flächentheil vom Inhalt 0 erzeugen); auch eine vollständige Umkehrung ist erlaubt:

$$[XEdCbAX] = 0;$$

was alles geometrisch unmittelbar einleuchtet. Dass A und E dem Kegelschnitte angehören, ergiebt sich auf der Stelle: denn wenn X nach A oder E fällt, so wird XA, bez. XE null und damit das Product in seiner ersten, bez. letzten Form. Die festen Elemente b, C, d lassen sich leicht aus 3 weiteren gegebenen Punkten des Kegelschnitts construiren, doch wollen wir lieber die analoge Construction für die

Curve 3. Ordnung mittheilen und dabei der Kürze halber die scharfen Klammern weglassen. Es seien $A, B, \cdots, J$ die eine Curve 3. Ordnung bestimmenden 9 Punkte, ferner sei $a = DE$, $b = EF$, $A_1 = AF \cdot CD$; G_1, H_1, J_1, bez. G_2, H_2, J_2 seien die Werthe der bezüglichen Producte $XAaA_1 \cdot XC$ und XBb, wenn G, H, J für X eingesetzt wird, sodann sei $c = EJ_1$, $L = H_1G_1cG_2 \cdot H_1F$, $M = H_1G_1cH_2 \cdot G_1F$, $K = LM \cdot J_1J_2$, $B_1 = KG_2cG_1 \cdot KF$; dann ist:

$$XAaA_1 \cdot XBbKcB_1 \cdot XC = 0,$$

wodurch das Liegen von 3 Punkten in gerader Linie oder die Incidenz der Verbindungslinie zweier mit dem dritten ausgedrückt wird, die planimetrische Gleichung der Curve 3. Ordnung (Crelle's J. Bd. 52, S. 254).

Eine bemerkenswerth einfache Erzeugung der Curve 3. Ordnung, auf die Grassmann schon in Crelle's Journal Bd. 31 und dann wiederholt zu sprechen kommt und die auch von Clebsch (Math. Ann. Bd. V, S. 422) behandelt worden ist, beruht auf der Gleichung:

$$[XAa \cdot XBb \cdot XCc] = 0.$$

Wenn $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ drei Reihen von einer geraden Zahl auf einander folgender Elemente sind, und zwar abwechselnd Punkt, Ebene, Punkt, Ebene, u. s. w., oder lauter Geraden, A und α ein fester Punkt und eine feste Ebene, die a feste Geraden sind, so führt Grassmann die Erzeugungsweisen der Flächen 3. Ordnung auf folgende vier zurück:

$$(1) \qquad [X\mathfrak{R} \cdot X\mathfrak{R}_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 \cdot A] = 0$$

(vier Punkte in derselben Ebene oder die Ebene dreier incident mit dem vierten),

$$(2) \qquad [X\mathfrak{R} \cdot X\mathfrak{R}_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 a_2 \cdot \alpha] = 0,$$

$$(3) \qquad [X\mathfrak{R}a \cdot X\mathfrak{R}_1 a_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 \cdot A] = 0$$

(beidemal die Verbindungslinie zweier Punkte mit der Schnittlinie zweier Ebenen incident),

$$(4) \qquad [X\mathfrak{R}a \cdot X\mathfrak{R}_1 a_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 a_2 \cdot \alpha] = 0$$

(4 Ebenen durch denselben Punkt oder der Schnittpunkt dreier incident mit der vierten).

In (1) seien die $\mathfrak{R}$ abwechselnd Punkt und Ebene, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ die umgekehrten Reihen, also mit einem Punkte B, B_1, B_2 schliessend. Das Resultat von $X\mathfrak{R}$, $X\mathfrak{R}_1$, $X\mathfrak{R}_2$ sei Y, Y_1, Y_2 und η ihre Verbindungsebene, die durch A gehen soll. Sei nun η eine bewegliche Ebene durch A, so beschreiben die Ebenen $\eta\mathfrak{R}'$, $\eta\mathfrak{R}_1'$, $\eta\mathfrak{R}_2'$ Bündel (Büschel 2. Stufe, wie Grassmann sagt) um B, B_1, B_2, welche mit A collinear sind. Der erzeugende Punkt X soll offenbar in $\eta\mathfrak{R}'$, $\eta\mathfrak{R}_1'$, $\eta\mathfrak{R}_2'$ liegen. Wir erhalten so die bekannte und nach Grassmann benannte *Erzeugungsart der cubischen Flächen.* Aus (4) lässt sich aber ähnlich die später von F. August (Dissert. inaug. Berlin 1862) gefun-

dene und nach ihm benannte ableiten. Man sieht, wie dies nur zwei besondere Fälle von den linealen Erzeugungen sind, die in (1) bis (4) stecken (Crelle's J. Bd. 49, S. 47).

Würde man ein Product 1. oder 3. Stufe, das einen variablen Punkt X enthält, gleich 0 setzen — was Grassmann selbst nicht betrachtet hat —, so erhielte man die stereometrische Gleichung einer Raumcurve; es wird dadurch die Incidenz einer Ebene oder eines Punktes mit einer Geraden ausgedrückt. Z. B. ist

$$[X\mathfrak{R}X] = 0$$

die Gleichung einer cubischen Raumcurve, wenn $\mathfrak{R}$ eine ungerade Zahl (mindestens 5) abwechselnder Punkte und Ebenen, mit einem Punkte anfangend, bedeutet. Sie entspricht der Erzeugung der Curve durch collineare Bündel, welche, wenn $\mathfrak{R}$ aus 3 Elementen bestände, in perspectiver Lage wären. —

Im Streckengebiet 3. Stufe wollen wir uns — der bequemeren Ausdrucksweise halber — alle Strecken in demselben festen Punkte O anfangend vorstellen. Sind dann die Einheiten e_1, e_2, e_3 drei zu einander senkrechte Strecken von der Länge 1, so haben wir, wenn eine beliebige Strecke a durch

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

dargestellt ist, in α_1, α_2, α_3 die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunkts von a in Bezug auf die Träger von e_1, e_2, e_3 als Axen. Das Product $[e_1 e_2 e_3]$ ist ein Würfel vom Inhalte 1. Also ist das äussere Product von a in ihre Ergänzung

$$[a \mid a] = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

mithin gleich dem Quadrate der Längenzahl α der Strecke a; die positive Quadratwurzel aus dieser Grösse 3^{ter} (oder 0^{ter}) Stufe, einer Zahl, die Längenzahl selbst.

Eine andere Strecke b von der Längenzahl β sei

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3;$$

dann ist

$$[a \mid b] = [b \mid a] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \alpha\beta \cos(a, b).$$

Ist also $[a \mid b] = 0$, so sind die Strecken a und b zu einander normal.

Hier werden mithin die Strecken bei ihrer Multiplication implicite noch mit dem Cosinus, beim äussern Producte mit dem Sinus ihres Zwischenwinkels multiplicirt.

Die Bedeutung des äusseren Products einer extensiven Grösse mit ihrer eigenen Ergänzung, beziehlich mit der einer andern gleichartigen in dem eben betrachteten Specialfalle hat Grassmann veranlasst, diese Productbildung genauer zu untersuchen. Er nennt also allgemein das (auf ein Hauptgebiet) bezügliche Product einer extensiven Grösse mit der Ergänzung einer andern *inneres Product* der beiden Grössen, und

zwar inneres deshalb, weil das so gebildete Product zweier Einheiten gleicher Stufe nur dann nicht verschwindet, wenn sie in einanderfallen*).

In $\mathfrak{A}_2$ werden die Gesetze der innern Multiplication für den allgemeinsten Fall von n von einander unabhängigen, sonst beliebigen Einheiten eingehend entwickelt. Es lassen sich nur wenige kurz wiedergeben; z. B. dass diese Multiplication distributiv ist, und dass $[P \mid Q] = (-1)^{p(q-1)}[Q \mid P]$, wenn p, q die Stufen von P, Q sind, also bei gleicher Stufe $[P \mid Q] = [Q \mid P]$.

$[A \mid A]$, wofür er auch A^2 schreibt, eine Grösse 0^{ter} Stufe, nennt er das *innere Quadrat* von A und die positive Quadratwurzel aus dieser Zahl den *numerischen Werth* von A; als *Cosinus des Winkels zweier extensiven Grössen* A, B gleicher Stufe, geschrieben $\cos \angle AB$, bezeichnet er $\frac{[A \mid B]}{\alpha\beta}$, wenn α, β ihre numerischen Werthe sind. Und von zwei beliebigen Grössen (gleicher oder ungleicher Stufe) sagt er, sie seien *normal*, wenn ihr inneres Product verschwindet. Die Benennungen sind demnach von dem obigen Specialfall auf den allgemeinen übertragen. Im Punktraume 4. Stufe sind die Träger zweier normaler extensiven Grössen in Bezug auf die Ordnungsfläche der Polarreciprocität, die der Ergänzung entspricht, conjugirt; wenn z. B. A ein Punkt und b eine Gerade (oder besser ein Linientheil) ist, so bedeutet $[A \mid b] = 0$, dass A auf der reciproken Polare von b (oder b auf der Polarebene von A) liegt.

Der numerische Werth eines Punktes, eines Linientheils ist der Inhalt des Parallelopipeds, das der Punkt, bez. der Linientheil mit einem gewissen Flächentheil in seiner Polarebene, bez. mit einem gewissen Linientheile auf der reciproken Polare seines Trägers bildet. Der Cosinus des Winkels zweier Punkte ist der Inhalt des Parallelopipeds, welchen der eine mit einem gewissen Flächentheile in der Polarebene des andern macht, dividirt durch das Product der beiden numerischen Werthe. Immer gilt dabei der Inhalt des Parallelopipeds der Einheitspunkte als Maasseinheit.

Die Ordnungsfläche ist also die Cayley'sche absolute Fläche.

Man hat so die *für beliebig viele und beliebig beschaffene Einheiten, also insbesondere auch für einen Raum von $n - 1$ Dimensionen erweiterte Metrik.*

Eine Reihe von Winkel- und Entfernungsformeln werden für den allgemeinen Fall erweitert; wir erwähnen folgende.

Sind A, B, C von gleicher Stufe, so ist

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2[B \mid C] + 2[C \mid A] + 2[A \mid B],$$

*) In der „geometrischen Analyse", wo er die innere Multiplication nicht in ihrer allgemeinsten, auf dem Begriff der Ergänzung basirenden Bedeutung, sondern in der engeren des obigen Specialfalls nimmt, bezeichnet er (sowie Möbius in der angehängten Abhandlung) dieselbe nicht durch $[a \mid b]$, sondern durch $a \times b$.

welches zu bekannten Sätzen für Strecken und Streckenparallelogramme — Erweiterungen des Pythagoras — führt, wenn die Einheiten zu einander normale Strecken sind; insbesondere, wenn A, B, C gegenseitig normal sind,

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

oder, wenn $a, b, \cdots$ zu einander normal sind und k, l aus ihnen ableitbar, so ist

$$\cos \angle kl = \cos \angle ak \cdot \cos \angle al + \cos \angle bk \cdot \cos bl + \cdots;$$

$$1 = \cos^2 \angle ak + \cos^2 \angle bk + \cdots,$$

und für zu einander normale k, l:

$$0 = \cos \angle ak \cdot \cos \angle al + \cos \angle bk \cdot \cos \angle bl + \cdots.$$

Die innere Multiplication hängt von den zu Grunde gelegten Einheiten (oder vom Coordinatensysteme) ab, also ist sie nicht lineal. Für verschiedene Einheiten hat im Allgemeinen das innere Product zweier Grössen ganz verschiedene Bedeutung; z. B. das innere Quadrat einer Strecke ist nur dann gleich dem Quadrat ihrer Längenzahl im gewöhnlichen Sinne und zwei zu einander senkrechte Strecken sind im Grassmann'schen Sinne nur dann normal und umgekehrt, wenn die Einheitsstrecken zu einander senkrecht und gleich lang sind. Also normale extensive Grössen für gewisse Einheiten sind es nicht für alle.

Versteht man nun unter einem vollständigen einfachen *Normalsystem* 1. Stufe einen Verein von n von einander unabhängigen und gegenseitig normalen Grössen 1. Stufe vom numerischen Werthe 1, so besteht, wie Grassmann beweist, der wichtige Satz, dass, wenn das ursprüngliche Einheitssystem — selbst ein solches Normalsystem, weil $[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$ — durch ein vollständiges einfaches Normalsystem ersetzt wird, dann die Ergänzungen dieselben bleiben, also auch die innern Producte. Es erhellt daraus, dass z. B. im Punktgebiet 4. Stufe die Ordnungsfläche dadurch nicht geändert wird und die Normalsysteme, ebenso wie das ursprüngliche, Quadrupel conjugirter Punkte in Bezug auf dieselbe bilden.

In seiner neuesten der zuletzt erschienenen Publicationen (Math. Ann. Bd. XII, S. 375) weist Grassmann den Hamilton'schen *Quaternionen* ihren Platz in seiner Ausdehnungslehre an. Er zeigt, dass dieselben für $n = 3$ sich einfach durch eine Combination der äussern und der innern Multiplication ergeben, die er als *mittlere Multiplication* einführt. Sind a und b zwei extensive Grössen 1. Stufe in einem Hauptgebiet 3. Stufe, also z. B. zwei Strecken oder Vectoren, wie Hamilton sagt, so ist das mittlere Product ab definirt durch

$$ab = -[a|b] + |[ab],$$

worin $-[a|b]$ eine Zahl, also der Scalartheil der Quaternion, $|[ab]$ aber die Summe dreier extensiven Grössen 1. Stufe, der Vectortheil ist.

Das innere Quadrat eines Vectors zeigt sich gleich dem negativen mittleren Quadrat desselben, da $[aa] = 0$. Das Quadrat des „Tensors“ ergiebt sich als Summe des Quadrats des Scalartheils und des innern Quadrats des Vectortheils. —

Enthält ein äusseres Product von extensiven Grössen einen oder mehrere variable Factoren, wie z. B. die oben besprochenen planimetrischen und stereometrischen Producte 0^{ter} Stufe, welche gleich 0 gesetzt eine ebene Curve oder eine Fläche darstellen; so hat Grassmann es für vortheilhaft gefunden, diese variablen Factoren, wie er sich ausdrückt, herauszunehmen, wodurch dann sogenannte *Lückenausdrücke* — in $\mathfrak{A}_1$ offene Producte genannt — entstehen. Nehmen wir als Beispiel die linke Seite der einen der oben besprochenen Gleichungen der cubischen Fläche:

$$[X\mathfrak{R} \cdot X\mathfrak{R}_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 \cdot A],$$

welche dann so geschrieben wird:

$$[l\mathfrak{R} \cdot l\mathfrak{R}_1 \cdot l\mathfrak{R}_2 \cdot A]\, X^3.$$

Sollte man aber statt der 3 gleichen Factoren X drei verschiedene X, Y, Z haben, so würde

$$[l\mathfrak{R} \cdot l\mathfrak{R}_1 \cdot l\mathfrak{R}_2 \cdot A]\, XYZ$$

bedeuten:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\{&[X\mathfrak{R} \cdot Y\mathfrak{R}_1 \cdot Z\mathfrak{R}_2 \cdot A] + [X\mathfrak{R} \cdot Z\mathfrak{R}_1 \cdot Y\mathfrak{R}_2 \cdot A]\\ &+ [Y\mathfrak{R} \cdot Z\mathfrak{R}_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 \cdot A] + [Y\mathfrak{R} \cdot X\mathfrak{R}_1 \cdot Z\mathfrak{R}_2 \cdot A]\\ &+ [Z\mathfrak{R} \cdot X\mathfrak{R}_1 \cdot Y\mathfrak{R}_2 \cdot A] + [Z\mathfrak{R} \cdot Y\mathfrak{R}_1 \cdot X\mathfrak{R}_2 \cdot A]\},\end{aligned}$$

worin der Divisor gleich der Zahl der Glieder ist; so dass die X, Y, Z auf alle möglichen Weisen in die Lücken gebracht sind.

Es kann ein Lückenausdruck auch mit weniger Variablen multiplicirt werden, als er Lücken hat, so dass noch Lücken bleiben; z. B. ist $[l\mathfrak{R} \cdot l\mathfrak{R}_1 \cdot l\mathfrak{R}_2 \cdot A]\, YZ$ gleich dem obigen Ausdrucke, nur dass statt X das Lückenzeichen steht.

Bezeichnet man den Lückenausdruck kurz mit A, so zeigt sich, dass:

$$\mathsf{A}(XYZ) = \mathsf{A}XYZ = \mathsf{A}YXZ = \cdots = \mathsf{A}(XY)Z = \mathsf{A}X(YZ) = \cdots,$$

worin z. B. bei $\mathsf{A}(XYZ)$ die Lücken zugleich mit XYZ, bei $\mathsf{A}XYZ$ dieselben allmählich mit X, mit Y, mit Z ausgefüllt werden.

Also gelten bei dieser Multiplication die Gesetze der *algebraischen Multiplication* und Grassmann nennt sie deshalb auch so.

In der Gleichung

$$\mathsf{A}_3 X^3 = 0$$

einer cubischen Fläche (oder ebenen cubischen Curve) wird A_3 gewissermassen *Symbol der Fläche* (der Curve) und dadurch eine neue Art extensiver Grössen geschaffen.

$$\mathsf{A}_3 XYZ = 0$$

bedeutet, dass jeder der 3 Punkte X, Y, Z auf der gemischten (zweiten) Polare der beiden andern Punkte liegt, dass sie also drei vereinigte (wie Grassmann*) sagt) oder conjugirte Punkte (nach Rosanes und Caporali**)) sind.

Nimmt man Y, Z constant, X variabel an, so hat man in $\mathsf{A}_3 XYZ = 0$ die Gleichung der gemischten Polare von Y, Z, so dass $\mathsf{A}_3 YZ$ das Symbol dieser Polare, und ebenso $\mathsf{A}_3 Y$ das Symbol der ersten Polare von Y ist.

Für diese Lückenausdrücke giebt es noch eine andere Form, welche wir an dem einfacheren Beispiele der obigen Kegelschnittsgleichung betrachten wollen ($n = 3$):

$$[XAbCdEX] = [X\mathfrak{R}X] = 0,$$

worin also $\mathfrak{R}$ die abwechselnde Reihe von Punkten und Geraden $AbCdE$ bedeutet. Wir schreiben $[l\mathfrak{R}l]X^2 = \mathsf{A}_2 X^2$ und multipliciren A_2 algebraisch mit den 6 algebraischen Einheitsproducten $E_i E_k$, wodurch sich 6 Ausdrücke 0^{ter} Stufe oder Zahlen α_{ik} ergeben. Ist sodann r_i die Ergänzung von E_i (also ein Linientheil), so kann man schreiben:

$$\mathsf{A}_2 = \alpha_{11} r_1^2 + \alpha_{22} r_2^2 + \alpha_{33} r_3^2$$
$$+ 2\alpha_{12} r_1 r_2 + 2\alpha_{23} r_2 r_3 + 2\alpha_{31} r_3 r_1,$$

worin $r_i r_k$ algebraische Producte sind.

Die extensive Grösse A_2, das Symbol des Kegelschnitts, ist so aus den 6 gleichartigen extensiven Grössen $r_1^2, \cdots, r_1 r_2, \cdots$, also 3 Doppelgeraden und 3 Geradenpaaren, numerisch abgeleitet mit Hülfe der Coefficienten α_{ik}, welche man die Coordinaten des Kegelschnitts nennen könnte***). Dabei wird angenommen, dass das Resultat der algebraischen Multiplication von $r_i r_k$ mit

$$XY = (x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3)(y_1 E_1 + y_2 E_2 + y_3 E_3)$$

ist

$$\tfrac{1}{2}\big([Xr_i]\cdot[Yr_k] + [Yr_i]\cdot[Xr_k]\big) = \tfrac{1}{2}(x_i y_k + y_i x_k),$$

weil $[E_i r_i] = 1$, $[E_i r_k] = 0$.

Aus $\mathsf{A}_2 E_i E_k$ wird α_{ik}, $\mathsf{A}_2 X^2 = 0$ geht in die gewöhnliche algebraische Gleichung des Kegelschnitts über:

$$\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{23} x_2 x_3 + 2\alpha_{31} x_3 x_1 = 0,$$

aus $\mathsf{A}_2 XY = 0$ ergiebt sich:

---

*) Gött. Nachr. 1872, S. 567.

**) Crelle-Borchardt's Journal Bd. 76, S. 321 (1873); Transunti dell' Accademia dei Lincei 17. Juni 1877.

***) Und durch Elimination der 6 degenerirten Einheiten würde sich A_2 als Vielfachensumme von 6 beliebigen gleichartigen Grössen allgemeiner Art darstellen lassen.

$$\alpha_{11}x_1y_1 + \alpha_{22}x_2y_2 + \alpha_{33}x_3y_3 + \alpha_{12}(x_1y_2+y_1x_2) + \alpha_{23}(x_2y_3+y_2x_3) \\ + \alpha_{31}(x_3y_1+y_3x_1) = 0,$$

die Bedingung, dass X und Y conjugirt sind.

Bedeutet nun x eine variable Gerade oder genauer einen variablen Linientheil, welcher also aus r_1, r_2, r_3 numerisch abgeleitet ist, und B_n einen in ähnlicher Weise entstandenen Lückenausdruck mit n Lücken, der durch Ausfüllung aller Lücken mit x 0$^{\text{ter}}$ Stufe wird, so ist B_n das Symbol einer ebenen Curve n^{ter} Classe und $\mathsf{B}_n x^n = 0$ deren (planimetrische) Gleichung. Z. B. ist $\mathsf{B}_2 x^2 = 0$ die Liniengleichung eines Kegelschnitts. Wenn B_2 durch algebraische Multiplication mit $r_i r_k$ in β_{ik} übergeht, so hat man:

$$\mathsf{B}_2 = \beta_{11}E_1^2 + \beta_{22}E_2^2 + \beta_{33}E_3^2 + 2\beta_{12}E_1E_2 + 2\beta_{23}E_2E_3 + 2\beta_{31}E_3E_1,$$

und

$$\mathsf{B}_2x^2 = \mathsf{B}_2(\xi_1r_1 + \xi_2r_2 + \xi_3r_3)^2 \\ = \beta_{11}\xi_1^2 + \beta_{22}\xi_2^2 + \beta_{33}\xi_3^2 + 2\beta_{12}\xi_1\xi_2 + 2\beta_{23}\xi_2\xi_3 + 2\beta_{31}\xi_3\xi_1,$$

und analog

$$\mathsf{B}_2xy = \beta_{11}\xi_1\eta_1 + \cdots + \beta_{12}(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \cdots$$

wobei E_iE_kxy die Bedeutung hat:

$$\tfrac{1}{2}\big([xE_i][yE_k] + [yE_i][xE_k]\big) = \tfrac{1}{2}(\xi_i\eta_k + \eta_i\xi_k).$$

Die Gleichung der Polare*) einer Curve m^{ter} Classe B_m in Bezug auf eine Curve n^{ter} Ordnung $\mathsf{A}_n (m < n)$ ist:

$$\mathsf{A}_n\mathsf{B}_m X^{n-m} = 0,$$

und $\mathsf{A}_n\mathsf{B}_m$ das Symbol dieser Polare**).

Das Verschwinden von $\mathsf{A}_n\mathsf{B}_m X^{n-m}$ für alle Werthe von X, wenn $m < n$, oder von $\mathsf{A}_n\mathsf{B}_m$, wenn $m = n$, ist die Bedingung, dass B_m in Bezug auf A_n apolar ist.

Aehnliches gilt im Raume bei Flächen und Complexen.

Diese sich hier von selber ergebende symbolische Bezeichnung erinnert sehr an die Symbolik von Aronhold-Clebsch und kann, wie diese, für die *Invariantentheorie* verwandt werden. Invariante Bildungen sind ja solche, sagt Grassmann, welche bei linealer Aenderung der Einheiten ungeändert bleiben; er selbst hat schon einen Anfang gemacht (Math. Ann. Bd. VII, S. 538: Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre) und gleich einen Satz von fundamentaler Bedeutung gewonnen, dass alle sogenannten Formen (Invarianten, Covarianten etc.), welche einer gegebenen algebraischen Form oder einem Systeme solcher

---

*) Reye, Crelle-Borchardt's J. Bd. 78, S. 97, Bd. 79, S. 159 (1873 und 1874).

**) A. a. O. hat Grassmann diese Gleichung noch nicht gegeben, wenn sie auch sehr nahe liegt; doch beschäftigt er sich in einem hinterlassenen Aufsatze hiermit, der nun während des Drucks dieser Besprechung erschienen ist: Borchardt's Journal Bd. 84, S. 273.

Formen entspriessen, sich aus $k - m + 1$ von einander unabhängigen *Stammformen* rational ableiten lassen, wo m die Stufe des Gebiets der Formen — die Zahl der homogenen Variabeln — und k die Zahl der Coefficienten aller gegebenen Formen ist, und zugleich gezeigt, wie man diese Stammformen findet*).

Ein Schüler Grassmann's, Herr V. Schlegel, welcher nach den Principien der Ausdehnungslehre ein „System der Raumlehre" (erster Theil: Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene, Leipzig 1872; zweiter Theil: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra, Leipzig 1875) verfasst hat, hat sich gleichzeitig mit Grassmann selbst mit der Entwickelung der Curven- und der Invariantentheorie aus diesen Principien beschäftigt und sie im zweiten Theile seines Werkes für die binären Formen 2. bis 4. Grades und die ternären Formen und Curven vom 2. Grade unternommen. Und es verdient diese Sache noch eine weitere Verarbeitung. —

Seien $a_1, \cdots, a_n$ n von einander unabhängige extensive Grössen 1. Stufe in einem Gebiete n^{ter} Stufe, und $b_1, \cdots, b_n$ n unter einander gleichartige extensive Grössen, so versteht man unter dem *Bruche oder Quotienten*

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots, b_n}{a_1, a_2, \cdots, a_n}$$

den Ausdruck, der, bez. mit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ algebraisch multiplicirt, zu $b_1, b_2, \cdots, b_n$ führt, also, mit $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$ multiplicirt, zu $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n$. Führen zwei Brüche durch Multiplication mit denselben n von einander unabhängigen Grössen 1. Stufe zu denselben Grössen, so sind sie gleich.

Die Multiplication mit einem Bruche Q ist offenbar eine Transformation. Sind z. B. A_1, A_2, A_3, A_4, B 5 Punkte eines räumlichen Systems, $A_1', A_2', A_3', A_4', B'$ 5 Punkte in einem andern und ist

$$B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4,$$
$$B' = b_1' A_1' + b_2' A_2' + b_3' A_3' + b_4' A_4',$$

so macht die Multiplication mit

$$Q = \frac{\beta_1 A_1', \beta_2 A_2', \beta_3 A_3', \beta_1 A_4'}{A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4},$$

worin $\beta_i = \dfrac{b_i'}{b_i}$, die beiden Systeme *collinear*; jeder Punkt des ersteren mit Q multiplicirt giebt den entsprechenden im zweiten.

Es handelt sich sodann darum, wenn die Zähler von derselben Art wie die Nenner sind, solche extensive Grössen X zu finden, die mit Q multiplicirt zu einem Vielfachen ϱX führen. Die Zahlen ϱ ergeben

---

*) Vergl. für binäre Formen das Werk von Clebsch über dieselben S. 305.

sich als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, und die zugehörigen Grössen X sind von einander unabhängig. Grassmann nennt die Zahlen ϱ die Hauptzahlen des Bruchs und bespricht den Fall, dass unter ihnen gleiche vorkommen, eingehend. Bei der Collineation sind die X die vereinigten entsprechenden Elemente.

Als *Potenzwerth* $[Q^n]$ eines Quotienten Q wird der Quotient des bezüglichen Products der Zähler und dessen der Nenner eingeführt; also

$$[Q^n] = \frac{[b_1 b_2 \cdots b_n]}{[a_1 a_2 \cdots a_n]};$$

bei der Collineation also

$$\frac{b_1' \, b_2' \, b_3' \, b_4'}{b_1 \, b_2 \, b_3 \, b_4} \; \frac{[A_1' \, A_2' \, A_3' \, A_4']}{[A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4]}.$$

Hieran schliesst Grassmann eine etwas schwer verständliche Betrachtung, aus der das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen und die Realität der Axen einer Fläche 2. Grades folgen.

Als andere Verwandtschaften werden noch die der Punkte des Raums und der Kreise einer Ebene und die Möbius'sche Kreisverwandtschaft betrachtet.

Eine Gleichung zwischen extensiven Grössen umfasst, wie im Vorhergehenden mehrfach sich zeigte, im Allgemeinen mehrere algebraische Gleichungen; und umgekehrt, man kann jedes beliebige System von Functionen von beliebig vielen Zahlgrössen in eine einzige extensive Function einer extensiven Grösse verwandeln. Denn sind $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die Variablen, so führe man ebensoviele Einheiten $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ein, die ein einfaches Normalsystem bilden, und setze

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

so dass $[x \mid e_i] = x_i$ und also eine Function $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ in eine Function φ_i von x übergeht. Hat man m Functionen $y_i = f_i$, so führe man m neue Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ ein. Ist dann $y = y_1 \varepsilon_2 + y_2 \varepsilon_2 + \cdots + y_m \varepsilon_m$, $F(x) = \varphi_1(x) \varepsilon_1 + \varphi_2(x) \varepsilon_2 + \cdots + \varphi_m(x) \varepsilon_m$, so vereinigt $y = F(x)$ alle m Gleichungen $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$.

Es sei $f(x)$ eine Function einer extensiven Grösse x, dx eine beliebige endliche Grösse derselben Art, q eine reelle Zahlgrösse, so definirt Grassmann als das nach x genommene *Differential* von $f(x)$ den Ausdruck

$$d_x f(x) = \frac{f(x + q\,dx) - f(x)}{q} \quad (q = 0).$$

Insbesondere ist, wenn A_n ein Lückenausdruck mit n Lücken ist:

$$d_x (\mathsf{A}_n x^n) = n \mathsf{A}_n x^{n-1} dx.$$

Differentialquotient 1. Ordnung $f'(x)$ oder $\frac{d}{dx} f(x)$ ist dann die Grösse, die mit jeder mit x gleichartigen Grösse dx algebraisch multiplicirt $d_x(fx)$ giebt, also, wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ ist, so ist

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx_1} f(x),\ \frac{d}{dx_2} f(x),\ \cdots,\ \frac{d}{dx_n} f(x)}{e_1,\qquad e_2,\qquad \cdots,\qquad e_n};$$

oder $f'(x)$ ist ein solcher Lückenausdruck mit einer Lücke (in jedem Gliede), dass die algebraische Multiplication (oder die Ausfüllung dieser Lücke) mit e_i zu $\frac{d}{dx_i} f(x)$ führt. Analog ist der m^{te} *Differentialquotient* $f^{(m)}(x)$ ein solcher Lückenausdruck mit m Lücken, dass die algebraische Multiplication mit dem m-factorigen Producte $e_r e_s \cdots$ zu $\frac{d^m}{dx_r dx_s \cdots} f(x)$ führt. Für $A_n x^n$ ist

$$\frac{d^m}{dx_r\, dx_s \cdots} (A_n x^n) = n(n-1) \cdots (n-m+1) A_n x^{n-m} e_r e_s \cdots. \text{ —}$$

Ueber Grassmann's weitere Untersuchungen auf dem Gebiete der Analysis — unendliche Reihen, Integralrechnung, insbesondere seine Integration von Differentialgleichungen — und ihre Stellung zu früheren und späteren Arbeiten zu sprechen, unterlassen wir, nicht weil wir sie für minder wichtig halten, sondern weil wir uns zur Zeit nicht hinreichend damit vertraut finden. Am Schlusse von $\mathfrak{A}_2$ hat er sich mit dem *Pfaff'schen Probleme* beschäftigt, gleichzeitig mit Clebsch (Crelle-Borchardt's Journal Bd. 60 und 61), hat es in derselben Weise formulirt, wie dieser, aber die Kriterien, durch welche der determinirte und der undeterminirte Fall unterschieden werden kann, richtiger als Clebsch angegeben, ebenso wie neuerdings Frobenius (in dems. Journ. Bd. 82). Ueberhaupt ist Grassmann's Behandlung dieses Problems und der *Theorie der partiellen Differentialgleichungen* 1. *Ordnung* sehr bemerkenswerth und scheint bis jetzt noch nicht die rechte Beachtung gefunden zu haben*). —

Gelegentlich ist auf die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Statik hingewiesen worden. Die *Mechanik*, auf die Grassmann besonders in $\mathfrak{A}_1$ seine Anschauungsweise anwendet, scheint recht eigentlich das Feld für die Benutzung derselben und mit ein Anlass zu seiner Arbeit gewesen zu sein. Publicirt hat er einen Grundriss der Mechanik für den Unterricht in der Prima (Programm des Stettiner Gymnasiums 1867) und einen Aufsatz in den Math. Ann. Bd. XII, S. 211 (sowie ein Selbstreferat über denselben im Repertorium Bd. II, S. 62). Der Grundriss gewährt im engen Rahmen von 34 Seiten einen keineswegs auf die Anfangsgründe beschränkten Einblick in die theoretische Mechanik. Wir begnügen uns mit einer Besprechung der einfachsten *dynamischen Gesetze*.

*) Briefliche Mittheilung von S. Lie; vergl. auch das norweg. Archiv für Mathematik von 1877.

Es sei x die Verbindungsstrecke eines beweglichen Punktes mit einem festen zu einer gewissen Zeit t, $x + \frac{dx}{dt}dt$ diejenige zur Zeit $t + dt$, so ist $\frac{dx}{dt}dt$ die durchlaufene Strecke, also $\frac{dx}{dt} = \delta x$ die Geschwindigkeit (oder „Bewegung“ nach dem Grundriss) und analog $\frac{d^2x}{dt^2} = \delta^2 x$ die Beschleunigung (oder „Bewegungsänderung“). Ist p die geometrische Summe der Kräfte, die auf den Punkt (von der Masse 1) wirken, so hat man $\delta^2 x = p$. Folglich für mehrere Punkte (von der Masse 1):

$$1)\quad \delta^2 x_1 = p_1, \cdots, \delta^2 x_m = p_m,$$

also $\Sigma \delta^2 x_i = \Sigma p_i$; oder wenn s die Entfernung des Schwerpunkts der bewegten Punkte vom festen Punkte ist und p die geometrische Summe aller Kräfte:

$$m\delta^2 s = p$$

(Gleichung für die Bewegung des Schwerpunkts).

Die *äussere* Multiplication der Gleichungen 1) mit $x_1, x_2, \cdots, x_m$ giebt, da $\delta[x\delta x] = [x\delta^2 x] + [\delta x \cdot \delta x]$, also, weil $[\delta x \cdot \delta x] = 0$, $[x\delta^2 x] = \delta[x\delta x]$,

$$\delta \Sigma[x_i \cdot \delta x_i] = \Sigma[x_i p_i].$$

Dies ist der Satz über die Flächenbewegung in Bezug auf den festen Punkt, der, wenn keine andern äussern Kräfte wirken, als durch denselben gerichtete, die Unveränderlichkeit der Flächenbewegung aussagt, weil dann $[x_i p_i] = 0$ ist. Er bleibt auch richtig, wenn die x_i ersetzt werden durch die Entfernungen der Punkte von ihrem (beweglichen) Schwerpunkte.

Ferner ist $\delta(\delta x)^2 = \delta[\delta x|\delta x] = [\delta^2 x|\delta x] + [\delta x|\delta^2 x] = 2[\delta^2 x|\delta x]$, weil δx und $\delta^2 x$ von gleicher Stufe sind, also $[\delta^2 x|\delta x] = \frac{1}{2}\delta(\delta x)^2$; mithin ergiebt sich durch *innere* Multiplication der Gleichungen 1) mit $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_m$

$$\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma(\delta x)^2 = \Sigma[p_i|\delta x_i],$$

die Gleichung zwischen lebendiger Kraft und Arbeit. —

Bis jetzt ist noch nicht die älteste mathematische Schrift Grassmann's erwähnt, weil sie mit der Ausdehnungslehre in keinem Zusammenhange steht, sein Aufsatz über die *„Centralen“* der Flächen (Crelle's Journal Bd. 24, S. 262, 372; Bd. 25, S. 57). Grassmann hat dort, wie es scheint, nicht bekannt mit den Aufsätzen von Bobillier (Gergonne's Annales Bd. 18 und 19) und Plücker (Crelle's Journal Bd. 5), sondern nur mit Poncelet's Abhandlung sur les centres de moyennes harmoniques (Crelle's J. Bd. 3) (deren Sätze er in $\mathfrak{A}_1$ § 167 ff. verallgemeinert) die Reihe der *Polaren* einer Fläche n^{ter} Ordnung entwickelt, wobei er die Worte Polare und Centrale gleichzeitig gebraucht, derart, dass die i^{te} Centrale die $(n-i)^{\text{te}}$ Polare ist. Am interessantesten

erscheint darin die Hinweisung auf die Gleichberechtigung der Geraden im Raume mit dem Punkte und der Ebene. Er giebt also auch folgenden Satz (in etwas anderer Fassung): Wenn in jedem der Strahlbüschel, deren Scheitel und Ebene mit einer festen Geraden incident sind, die m Strahlen construirt werden, welche die harmonischen Strahlen m^{ter} Ordnung der festen Geraden in Bezug auf die n zum Büschel gehörigen Tangenten einer gegebenen Fläche n^{ten} Ranges (oder „Reihe“, wie Grassmann sagt) sind, so ist der geometrische Ort derselben eine Fläche m^{ten} Ranges.

Für diese Geraden, welche alle die feste Gerade treffen, hat er vier in einer Relation befindliche Coordinaten (oder, wie er selbst sagt, Richtstücke) x, y, φ, ψ eingeführt, wahrscheinlich das erste Beispiel von *Coordinaten einer Geraden im Raume:* Wenn die feste Gerade die z-Axe ist, so sind x, y die Coordinaten des Spurpunktes der Geraden in der xy-Ebene, und ist z die Coordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der festen, so ist $\varphi = \frac{x}{z}$, $\psi = \frac{y}{z}$; so dass $x\psi - y\varphi = 0$.

Diese Coordinaten entsprechen genau den Plücker'schen Coordinaten ϱ, σ, $-r$, $-s$, während das für alle die z-Axe treffenden Geraden verschwindende $x\psi - y\varphi$ das Plücker'sche η ist (Neue Geometrie S. 1).

Er zeigt auch, dass die Coordinaten aller Geraden, welche — ausser der festen Axe — noch eine andere Gerade treffen, einer linearen Bedingung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1$$

genügen müssen, die er die Gleichung der letzteren Geraden nennt. —

Auch auf *pädagogisch-didaktischem Gebiete* war H. Grassmann von hervorragender Bedeutung. Nicht nur lebt das Andenken seiner segensreichen Wirksamkeit als Lehrer in der dankbaren Erinnerung zahlreicher Schüler fort, welche die Freude, das Interesse an der Sache, das er einzuflössen wusste, und die heitere Klarheit seines Unterrichtes rühmen, sondern er hat auch Unvergängliches auf diesem Felde geleistet durch die Abfassung von Lehrbüchern, welche in ungewöhnlichem Grade beachtenswerth sind. Vor allem gilt dies von dem gemeinschaftlich von ihm mit seinem Bruder Robert verfassten Lehrbuch der *Arithmetik*, sodann auch von einem Lehrbuch der *Trigonometrie.*

Auf den ersten Blick schon zeichnen beide Werke sich aus durch ausserordentlichen Reichthum des Inhaltes bei geringem Umfange, durch Schärfe und Knappheit des Ausdruckes und streng synthetischen Aufbau, sowie durch eine in der Lehrbücherliteratur nicht häufige Ori-

ginalität in der Anlage und Durchführung des Ganzen — ein selbständiges, doch ungesuchtes Abgehen von dem Herkömmlichen, Gewöhnlichen. — Beide Bücher sind zu betrachten als die ersten, den mehr rechnenden Theil erledigenden Bände eines von dem Verfasser geplanten vollständigen „Lehrbuchs der Mathematik", welches leider nicht zur Vollendung gekommen ist.

Die *Trigonometrie* führt von den sechs goniometrischen Functionen anfangs nur den Cosinus ein, löst mit diesem schon die goniometrischen Hauptaufgaben, indem sie ausgiebigen Gebrauch macht von der Methode des Projicirens — unter äusserst sorgfältiger Feststellung aller einschlägigen Begriffe; sie schreitet dann aber fort bis zur Ableitung einer Fülle von allgemeinen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks und zur Erledigung des sphärischen, letzteres rechnend, mit der denkbargeringsten Berufung auf Figuren. Auf der andern Seite enthält sie auch zahlreiche und wohldurchdachte Rechenschemata für die praktischen Auflösungsprobleme, welche sich durch Einfachheit und Bequemlichkeit empfehlen. Bei der Gelegenheit mag daran erinnert sein, dass von Grassmann auch das Problem, alle „rationalen" Dreiecke aufzufinden, d. h. diejenigen, deren Seiten und Höhen (also auch Inhalt) einander commensurabel sind, in eleganter Weise gelöst ist*). Noch andere Untersuchungen elementaren Charakters, die sich dem System nicht einfügen, wird man im Literaturverzeichniss erwähnt finden.

Das Lehrbuch der *Arithmetik* hat zunächst das Verdienst, es verwirklicht die Tendenz, die Entwickelung der algebraischen Sätze überall auf die *einfachsten* — bei den ganzen Zahlen z. B. auf die nur auf die Einheiten bezüglichen — Voraussetzungen zurückzuführen, zu Grunde nur solche Definitionen zu legen, die frei von jedem willkürlichen Element, vollkommen unzweideutig und bestimmt sind. Grassmann definirt zu dem Ende zuerst das Hinzufügen einer Einheit (als zweiten Gliedes) zu einer Zahl, indem er die aus einer Einheit e abzuleitende „Grundreihe" gegeben denkt durch eine Vorschrift, welche zu jeder Zahl n den Namen der nächst höheren $m = n + 1$ finden lehrt, sodass $me = ne + e$, womit die Voraussetzung zu verbinden ist, dass dabei kein früherer Name wiederkehren darf**). Er definirt hierauf das Hinzufügen irgend einer Zahl zu einer gegebenen ae, indem er die Addition von $(b+1)e$ zurückführt auf die von be zufolge der Festsetzung, dass $ae + (b+1)e = (a+b)e + e$ bedeuten solle, und schreitet

*) Grunert's Archiv Bd. 49, S. 1.

**) Die in E. Schröder's Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Bd. I, S. 63 ausgesprochene Bemerkung, dass Grassmann dieses Umstandes zu erwähnen vergessen habe, beruht auf einem Uebersehen. Vergl. Grassmann's Lehrbuch der Arithmetik S. 3.

von diesen beiden einfachen Grundlagen lediglich unter Anwendung des Schlusses von n auf $n+1$, streng recurrirend, weiter zum Beweise der Associativität der Addition, zum Beweise, dass $e+ne=ne+e$, sowie überhaupt des Commutationsgesetzes und sämmtlicher Eigenschaften der Rechnungsarten erster Stufe — auch für die durch Einführung einer negativen Einheit nach rückwärts fortgesetzte Grundreihe. Denselben Charakter trägt die Herleitung der Gesetze der Operationen der beiden folgenden Stufen, deren directe sozusagen recurrirend definirt werden durch die Gleichungen $a(b+1)=ab+a$, $a^{b+1}=a^b\cdot a$.

Im weiteren Verlaufe des Lehrbuchs werden die gebrochenen Zahlen erledigt durch Anwendung der vorherigen Ergebnisse auf die aus einem Bruchtheil der Einheit hervorgehenden „Grundreihen", womit das Gebiet der rationalen Zahlen für die arithmetischen Gesetze erschlossen ist.

Später folgen die Irrationalzahlen in einer Behandlung, die hinsichtlich Strenge oder besser Vollständigkeit der Begründung allerdings durch die Arbeiten von J. H. T. Müller, Heine und Georg Cantor überholt ist. — Es ist an dieser Stelle nicht möglich, den Plan des Werkes bis zu Ende zu verfolgen und die zahlreichen anderweitigen Vorzüge desselben vollständig aufzuzählen, und begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass in dem kleinen Raume von 220 Octavseiten nicht nur der allseitig vermehrte und ergänzte Inhalt der elementararithmetischen Disciplinen (einschliesslich z. B. der Elemente der Zahlentheorie), sondern auch der ganze Inhalt der sog. algebraischen Analysis, incl. Reihenentwickelungen, höhere Gleichungen, Kettenbrüche etc. eine systematische Darstellung gefunden hat.

Ob die Grassmann'sche Behandlungsweise sich für den Unterricht beim ersten Anfänger empfehle und nicht vielmehr durch eine intuitivere, der üblichen näher liegende, zweckmässiger zu ersetzen sei, darüber kann man streiten, und scheint die allgemeine Meinung im Lehrerstande sich zur Zeit für die letztere Ansicht zu erklären. Es gehört wohl in der That eine mehr als gewöhnliche Lehrgabe dazu, jene oft so behutsam fortschreitenden Schlüsse dem Anfänger zugänglich, sie ihm gewissermassen geniessbar zu machen; namentlich mag es schwer sein, demselben die dabei gestellten strengen Denkanforderungen hinlänglich zu motiviren. Sehr bedeutend aber bleibt das methodologische Interesse dieser Behandlungsweise, die keinem Vorgerückteren vorenthalten und keinem Lehrer der Mathematik fremd bleiben sollte, und unbestreitbar der beiden Grassmann Verdienst, für die Weckung und grossentheils auch Befriedigung des Interesses an mathematischer Strenge der Begründung der arithmetischen Disciplin einen neuen und mächtigen Anstoss gegeben zu haben.

Grassmann's *physikalische Arbeiten* bewegen sich auf mehreren völlig getrennten Gebieten (Elektrodynamik, Optik, Akustik), daher lassen sie keine zusammenfassende Besprechung zu; vielmehr ist es, um ihrer Bedeutung gerecht zu werden, nöthig, auf die wichtigsten derselben einzeln einzugehn.

Die früheste dieser Abhandlungen, 1845*), enthält eine *„neue Theorie der Elektrodynamik"*. Das dort aufgestellte elektrodynamische Grundgesetz hat in jüngster Zeit erneute Bedeutung gewonnen; denn wie Grassmann in einer seiner letzten Arbeiten (1877)**) gezeigt hat, so ist dasjenige Gesetz für die Wechselwirkung zweier Stromelemente, auf welches Herr Clausius***) bei seinen Untersuchungen der Wechselwirkung von Elektricitätstheilchen geführt worden ist, mit dem Grassmann'schen Gesetze identisch, wie das in sehr anerkennender Weise von Herrn Clausius selbst ausgesprochen ist†). Unter diesen Umständen erscheint es um so interessanter, die Ueberlegungen genauer zu verfolgen, durch welche Grassmann auf sein Gesetz geführt worden ist. Seine Betrachtungen knüpfen an das Ampère'sche Gesetz der Wechselwirkung von Stromelementen an. Letzteres Gesetz ruht einestheils auf Beobachtungen über die Wirkung geschlossener Ströme auf einander oder auf Stromtheile, anderntheils aber auf der hypothetischen Annahme, dass die Richtung der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Stromtheile in die Verbindungslinie ihrer Mitten falle. Statt dass diese Annahme sich, wie Ampère meint, durch ihre Analogie mit anderen Kräften empfiehlt, hat sie im Gegentheil wenig innere Wahrscheinlichkeit; denn nur für punktartige, d. h. richtungslose, Elemente ist est selbstverständlich, dass sie in der Richtung ihrer Verbindungslinie aufeinander wirken; die Stromelemente dagegen sind mit bestimmten Richtungen begabt; und somit ist die Analogie hinfällig. — Unwahrscheinlich ist Ampère's Gesetz ferner wegen seiner complicirten Form, aus welcher sich z. B. im einfachsten Specialfall parallel gerichteter Stromelemente folgende wenig glaubliche Consequenz ergiebt: Die Wechselwirkung beider müsste $= 0$ sein, sobald der Mittelpunkt des einen sich auf einer Kegelfläche befindet, deren Spitze im anderen Elemente liegt, und deren Axe von der Verlängerung desselben gebildet wird, während der Cosinus des Winkels an der Spitze $= \frac{1}{3}$ ist. Liegt das erstere Element ausserhalb jener Kegelfläche, so müsste Anziehung, liegt es innerhalb, so müsste Abstossung herrschen! —

*) Poggendorff's Ann. d. Phys. Bd. 64, S. 1.

**) Borchardt's Journal f. Math. Bd. 83, S. 57: Zur Elektrodynamik.

***) Borchardt's Journal f. Math. Bd. 82, S. 85: Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes, 1877.

†) Borchardt's Journal Bd. 83, S. 262, u. Poggendorff-Wiedemann's Annalen Bd. 1, S. 160.

Andererseits aber ist Ampère's Gesetz praktisch brauchbar, denn es führt, bei der Berechnung der Wirkung *geschlossener* Ströme auf Ströme oder Stromtheile, zu Folgerungen, die mit den Beobachtungen übereinstimmen; in allen solchen Fällen ist also die Anwendung jenes Gesetzes gerechtfertigt. Eine solche Anwendung des Ampère'schen Gesetzes ist es nun, die Grassmann als Ausgangspunkt zur Gewinnung seines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes benutzt.

Zunächst führt er den Begriff des *Winkelstroms* ein, indem er darunter einen unendlichen Strom versteht, der die Schenkel eines Winkels durchfliesst. Die Kenntniss der Wirkung eines Winkelstroms auf ein Stromelement, dessen Anfangspunkt in der Ebene des Winkels liegt, ist von fundamentaler Wichtigkeit. Denn auf Grund dieser Kenntniss lässt sich die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stroms auf einen anderen Strom (sei er geschlossen, oder nur ein Stromtheil) berechnen. Nämlich ein geschlossener Strom lässt sich als ein stromdurchflossenes Polygon ansehn; letzteres aber ist auffassbar als aus Winkelströmen zusammengesetzt, die seine Aussenwinkel durchfliessen, indem jede Polygonseite immer nur über eine Ecke hinaus verlängert wird. Dabei ist als selbstverständlich vorausgesetzt, dass zwei gleich starke Ströme, die entgegengesetzt durch denselben Leiter fliessen, sich aufheben. Und legt man ferner vom Anfangspunkt des beeinflussten Stromelementes einen Strahl nach dem Scheitel eines Winkelstroms, so ist letzterer durch zwei Winkelströme ersetzbar, die den Strahl als gemeinsamen Schenkel haben, aber entgegengesetzt in ihm fliessen. Jeder dieser Winkelströme liegt nun mit dem Anfangspunkt jenes Stromelementes in einer Ebene.

Zur Berechnung der Wirkung eines Winkelstroms auf ein Stromelement von der eben besprochenen Lage darf das Ampère'sche Gesetz unbedenklich benutzt werden; denn man mag den Winkelstrom in unendlicher Ferne beliebig geschlossen denken; und für geschlossene Ströme ist ja Ampère's Gesetz praktisch brauchbar. Die Ausführung dieser Rechnung liefert für die Wirkung des Winkelstroms auf ein Stromelement b, dessen Anfangspunkt in der Ebene des Winkelstroms liegt, den Ausdruck

$$\frac{ib_1}{r}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha'}{2}-\operatorname{cotg}\frac{\alpha''}{2}\right).$$

Hier ist i die Stromstärke des Winkelstroms, b_1 die Projection des Stromelements $b = i' \cdot ds'$ auf die Ebene des Winkels, r die Entfernung des Scheitels von b, α' und α'' die Winkel des einen und anderen durchflossenen Schenkels (Strahls) gegen r. Die Kraft liegt in der Ebene des Winkelstroms und steht senkrecht auf b. — Hiermit ist ein Ausdruck gewonnen, der, weil er sich durch Versuche wenigstens näherungsweise bestätigen lässt, nichts Hypothetisches an sich hat,

und der zugleich die Resultate aller elektrodynamischen Beobachtungen vollständig in sich enthält, weil sich alle auf Winkelströme zurückführen lassen. Dieser Ausdruck dient mithin als sicherer Ausgangspunkt, um auf ihn die neue Hypothese zu gründen. „Da der Ausdruck nämlich aus zwei Gliedern besteht, von denen das eine nur durch die Lage des einen Strahls, das andere ebenso durch die des anderen bedingt ist, so erscheint es durchaus als das einfachste, diese Glieder als Ausdrücke für die Wirkungen der einzelnen Strahlen zu nehmen.“ Somit wird für die Wirkung eines (von einem Punkt ins Unendliche laufenden) Strahls auf ein Stromelement der Ausdruck angenommen

$$\frac{ib_1}{r} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \cdot$$

Diese Kraft ist senkrecht gegen b in der durch den Strahl und den Anfansgpunkt von b gelegten Ebene; sie treibt b nach seiner rechten oder linken Seite hin, je nachdem der Strom im Strahl derjenigen Person, die von ihm aus das Element b betrachtet, zur rechten oder linken Hand fortläuft. Zieht man von dieser Kraft die (gleichgerichtete) Kraft ab, welche ein anderer, ebenso durchflossener, mit dem obigen Strahl fast der ganzen Länge nach zusammenfallender und nur um ds kürzerer Strahl auf dasselbe Element ausübt, so erhält man

$$\frac{ab_1}{r^2} \sin \alpha, \quad \text{wo } a = i \cdot ds \text{ ist.}$$

Dies ist Grassmann's elektrodynamisches Grundgesetz; es giebt die vom Element a auf b ausgeübte Kraft an. Hier ist r der Abstand beider, α der Winkel von a gegen r, b_1 die Projection von b auf die durch a und r gelegte Ebene. Die Kraft liegt in der Ebene des Winkels α und steht senkrecht auf b. Gegen dies Gesetz lässt sich mit Herrn Helmholtz*) einwenden, dass es dem Grundsatze der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht genügt; statt dessen herrscht allerdings eine andere eigenthümliche Beziehung. Liegen nämlich beide Stromelemente in einer Ebene, so liegen die Kräfte, die sie auf einander ausüben, in derselben Ebene, stehn auf den Elementen senkrecht, und verhalten sich umgekehrt wie ihre Abstände vom Schnittpunkt der Strahlen, denen die Elemente angehören. Wäre also nur eine Drehung um diesen Schnittpunkt möglich, so würde jedes Element dem Strahle, auf dem das andere liegt, eine Drehung zu ertheilen trachten, die für beide Elemente gleich gross ist, nämlich gleich der Kraft dividirt durch den Abstand vom Schnittpunkt, oder $= \frac{ab}{r^3} \sin \varepsilon$, wo ε der Winkel beider Strahlen. Liegen die beiden Elemente nicht in einer Ebene, so tritt der kürzeste Abstand der beiden Geraden, denen sie angehören, an die Stelle des Schnittpunkts. Zu der Drehung,

---

*) Borchardt's Journal f. Math. Bd. 78, S. 290 (1874).

welche die Elemente um den, in seiner Lage erhaltenen, kürzesten Abstand auszuführen trachten würden, tritt noch eine Veränderung der Grösse dieses kürzesten Abstandes, indem die beiden Geraden auf demselben fortrücken. (Grassmann stellt diesen Vorgang übrigens so dar, als ob die Elemente wirklich Drehungen der Geraden, auf denen sie liegen, um den kürzesten Abstand hervorbrächten.)

Die Analogie einer derartigen Wechselwirkung von Stromelementen mit der Gravitation tritt deutlich zu Tage, wenn man beiderlei Wirkungen in der Schreibweise der Grassmann'schen Ausdehnungslehre ausdrückt, wobei dann beide durch $\frac{[a \cdot b]}{r^3}$ dargestellt werden.

Eine Entscheidung zwischen dieser Theorie und der Ampère'schen ist nur von Versuchen mit *begrenzten* Strömen zu erwarten, weil beide Theorien für *geschlossene* Ströme stets übereinstimmende Resultate ergeben müssen. Grassmann giebt auch wirklich eine Versuchsanordnung an, bei welcher ein Maximum in der Differenz der Wirkungen nach beiden Theorien eintreten muss; doch verhehlt er sich die Schwierigkeiten der Ausführung solcher Versuche nicht und scheint in Folge dessen den Weg des Experiments nie beschritten zu haben. Dieser Mangel experimenteller Bestätigung ist auch wohl vor Allem als Ursache dafür anzusehn, dass die Grassmann'sche Theorie selbst in eingehenderen Darstellungen der Elektrodynamik sich nur gelegentlich erwähnt, ja vielfach nur in Anmerkungen und Anhänge verwiesen findet. — In der 32 Jahre späteren Abhandlung „Zur Elektrodynamik" entwickelt Grassmann, ausser dem Nachweise der Uebereinstimmung seines Gesetzes mit dem Clausius'schen, einen allgemeinen Satz über die Wirkung eines constanten geschlossenen Stromes auf ein Stromelement, zu dessen einfachem Beweise er von den Begriffen seiner Ausdehnungslehre ausgiebigen Gebrauch macht; doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Grassmann's *zweite* physikalische Arbeit *„Zur Theorie der Farbenmischung"* *) ist von erheblichem Einflusse auf die Ausbildung dieser von Newton begründeten Theorie gewesen, welche bekanntlich ihre jetzige Gestalt wesentlich Herrn Helmholtz verdankt. Nach Newton theilt man, behufs Ermittelung der Mischfarbe gegebener Spektralfarben, die Peripherie eines Kreises in 7 Theile, die sich verhalten wie die Intervalle der 8 Töne einer Octave; sie stellen die Hauptspektralfarben dar. Wenn man dann in den Schwerpunkten der einzelnen Bögen Gewichte anbringt, proportional der Anzahl von Strahlen der betreffenden Farbe, welche in die Mischung eingehn, so giebt der Schwerpunkt aller Gewichte durch die Richtung und Länge seines

*) Poggendorff's Annalen Bd. 89, S. 69 (1853).

Centralabstandes den Farbton und die Sättigung der resultirenden Farbe an. Fällt der Schwerpunkt ins Centrum, so ist die Mischfarbe weiss. Newton bezeichnete diese Regel als zwar nicht mathematisch streng, jedoch praktisch brauchbar. Indessen hob er hervor, dass es ihm nicht gelungen sei, durch Mischung zweier diametral gegenüberstehenden Farben reines Weiss zu erlangen, sondern nur eine unbestimmte matte namenlose Farbe. Der Erste, dem die Mischung zweier Spektralfarben zu reinem Weiss gelang, war Herr Helmholtz*); indessen schien die zunächst von ihm angewandte Methode zu dem Schlusse zu berechtigen, dass es nur ein einziges Paar von Complementarfarben gebe.

An dieses von Herrn Helmholtz selbst als höchst auffallend bezeichnete Resultat, nach dem die Newton'sche Theorie in den wesentlichsten Punkten als irrig bezeichnet werden müsste, knüpft Grassmann an und unterzieht das Newton'sche Verfahren einer so eindringenden und gründlichen Durcharbeitung, dass es ihm gelingt, die eigentlichen Grundlagen der Theorie, die dem Begründer selbst mehr unbewusst vorgeschwebt zu haben scheinen, in voller Deutlichkeit und Schärfe hinzustellen. Zugleich zeigt er, dass die Helmholtz'schen Beobachtungen, in ihrer Gesammtheit aufgefasst, nicht gegen Newton's Theorie zeugen, wohl aber zu einer wesentlichen Ergänzung derselben dienen. — Vier Grundsätze sind es, aus denen auf dem Wege strenger Schlüsse ein Verfahren der Farbenmischung abgeleitet wird, das in seinen wesentlichen Zügen mit Newton's empirischer Regel übereinstimmt. Der erste Grundsatz ist der, *dass jeder Lichteindruck sich nachahmen lasse durch Vermischung einer homogenen Farbe von bestimmter Intensität mit farblosem Licht von bestimmter Intensität*; denn jeder Lichteindruck habe nur die 3 Bestimmungsstücke: „Farbenintensität, Farbenton, Intensität des beigemischten Weiss", und sämmtliche Farbentöne seien unter den Spektralfarben vertreten und bildeten eine stetige in sich zurückkehrende Reihe vom Roth bis Violett durch Purpur zurück zum Roth. Die Annahme, dass purpurne Farbtöne im Spektrum vorkommen, wo sie unter besonders günstigen Umständen jenseits des Roth zu beobachten seien, hat sich bekanntlich als unrichtig herausgestellt; dessenungeachtet behalten Grassmann's Folgerungen ihre Geltung, wenn man sein „homogene Farben" überall durch „homogene Farben oder aus Roth und Violett mischbare Purpurfarben" ersetzt, oder mit Herrn Helmholtz „gesättigte Farben" sagt. Der zweite Grundsatz heisst: *Wenn man von den beiden zu vermischenden Lichtern das eine stetig ändert, während das andere unverändert bleibt, ändert sich auch der Eindruck der Mischung stetig.*

*) Poggendorff's Annalen Bd. 87.

Diese beiden Voraussetzungen genügen bereits, um durch eine, wesentlich auf dem Begriff des stetigen Farbenübergangs fussende, Schlussfolgerung mit mathematischer Evidenz den Satz abzuleiten:

„Es giebt zu jeder Farbe eine andere homogene, welche, mit ihr vermischt, farbloses Licht liefert.“

Wegen der beim ersten Grundsatz nothwendigen Einschränkung muss freilich dieser Satz auch eine Beschränkung erfahren, indem die purpurnen Farbtöne, obwohl selbst nicht homogen, doch allein als complementare zu gewissen homogenen grünen Farbtönen auftreten.

Die in der erwähnten Helmholtz'schen Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen benutzt Grassmann sodann, um aus ihnen eine Reihe von Complementarfarben abzuleiten. In der That bestätigten Herrn Helmholtz's spätere, nach einer feineren Methode angestellte Beobachtungen die Existenz dieser Complementarfarbenpaare im Spektrum bis auf eines: zum Grün fand sich keine homogene Complementarfarbe, sondern nur die selbst gemischte Purpurfarbe. — Die Einführung des dritten Grundsatzes, *dass 2 beliebig gegebene Farben immer dieselbe Mischfarbe ergeben, gleichviel aus welchen homogenen Farben man sie selbst zusammengesetzt haben mag*, ermöglicht nun die Ableitung des Hauptsatzes der Farbenmischung. Derselbe wird zunächst unter Anwendung des von Grassmann aufgestellten Begriffs der geometrischen Summe von Strecken ausgesprochen, dann aber in folgende Gestalt gebracht: „Um den Farbenton und die Farbenintensität zu finden, welche durch Mischung zweier beliebig gegebenen Farben hervorgehn, stelle man jede von beiden durch einen schweren Punkt auf der Peripherie eines Kreises dar, indem die Richtung des zugehörigen Radius den Farbenton, das zugehörige Gewicht die Farbenintensität vorstellt, und bestimme den Schwerpunkt beider Punkte: dann stellt die Strecke vom Centrum zum Schwerpunkt hin durch ihre Richtung den Farbenton der Mischfarbe dar, und ihr Product mit der Summe der Gewichte die Farbenintensität.“ — Wie hierbei sämmtliche Farbentöne von vornherein auf der Peripherie anzuordnen sind, dafür wird wenigstens principiell der Weg angegeben. — Durch Einführung des letzten Grundsatzes: *dass die gesammte Lichtintensität der Mischung* (hierunter verstanden die Summe der Intensitäten der gesättigten Farbe und des beigemischten Weiss) *gleich sei der Summe der Intensitäten der gemischten Lichter*, gelingt es endlich zu zeigen, „dass die Intensität des beigemischten Weiss gleich der mit der Summe der Gewichte multiplicirten Entfernung des Schwerpunkts von der Peripherie ist, *so dass die Farbensättigung unmittelbar durch den Centralabstand des resultirenden Schwerpunkts dargestellt wird*“; sein Hineinfallen ins Centrum bedeutet natürlich „Weiss“.

Für die Ableitung dieses Satzes, sowie des vorhergehenden Haupt-

satzes ist, wie Herr Helmholtz (Poggendorff's Annalen Bd. 94 und Physiolog. Optik Seite 288) gezeigt hat, die von Grassmann getroffene Wahl der Einheiten der Intensitäten verschiedenfarbiger Lichter (welche bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist) von entscheidender Bedeutung. Grassmann sieht diejenigen Mengen von 2 Complementarfarben als gleich an, welche man vermischen muss, um Weiss zu erhalten; denn nur so fällt der Schwerpunkt beider auf der Peripherie diametral gegenüberstehenden Punkte ins Centrum. Und von nicht complementären Farben werden solche Mengen als gleich angesehn, welche, mit ihren complementären zu Weiss gemischt, gleiche Mengen Weiss geben. Nämlich, falls die Mischfarbe überhaupt durch eine Schwerpunktsconstruction gefunden werden soll, kommen nur bei dieser Wahl der Einheiten die gesättigten Farben auf eine Kreisperipherie zu stehn, von welcher jedoch der zwischen Roth und Violett gelegene Theil durch seine Sehne zu ersetzen ist, welche die Purpurtöne trägt. Uebrigens hat diese Wahl den Vorzug, unabhängig zu sein von der objectiven Lichtstärke der verglichenen Farben; denn wenn man von 2 Complementarfarben solche Mengen ermittelt hat, die sich zu Weiss mischen, so erhält man Weiss auch dann, wenn man beide Mengen objectiv in ein und demselben Verhältniss vervielfacht (wobei sie allerdings ein sehr wechselndes Verhältniss der subjectiven Helligkeiten zu einander darbieten). Dagegen befindet sich die Grassmann'sche Festsetzung in vollständigem Widerspruch mit der sinnlichen Wahrnehmung, da dem Auge 2 zu Weiss sich mischende Mengen von Complementarfarben im Allgemeinen ungleich erscheinen. Dieser Umstand erfordert also eine andere Wahl, nämlich die: 2 verschieden gefärbte Lichter dann für gleich intensiv anzunehmen, wenn sie bei einer gewissen absoluten Lichtstärke dem Auge gleich hell erscheinen. Diese Wahl ist aber nur für 3 Farben, deren keine durch Mischung der 2 anderen erzeugbar ist, zu treffen, denn dadurch ist, in Folge des auf Schwerpunktsconstruction beruhenden Mischverfahrens, die einer jeden anderen Farbe zu ertheilende Intensitätseinheit von selbst mit bestimmt. Jetzt kommen aber die Spektralfarben nicht mehr auf eine Kreisperipherie zu stehn, sondern auf eine ungeschlossene Curve, deren eines Ende mit Roth, deren anderes mit Violett besetzt wird, während die aus Roth und Violett mischbaren Purpurtöne auf die gerade Linie zwischen beiden zu stellen sind.

Wie man erkennt, ist Grassmann's Abhandlung zwar nicht einwurfsfrei, hauptsächlich in Folge der mangelnden Controle durch das Experiment, aber sie ist bedeutend wegen des tiefen Eindringens in ein verwickeltes Erscheinungsgebiet lediglich mit Hülfe abstracter Argumentation. Die auf diesem Wege von ihm begründete Richtigkeit des Mischverfahrens durch Schwerpunktsconstruction ist bald darauf

durch Herrn Maxwell's Experimente ausser allen Zweifel gesetzt worden.

Ueber *Akustik* handeln zwei Grassmann'sche Arbeiten. Die erste ist ein wesentlich für seine Schüler bestimmter Leitfaden der Akustik*), an dessen Schluss die Grundzüge einer eigenen Theorie der Vocaltöne mitgetheilt werden, wovon sogleich noch mehr zu sagen ist. Die andere Abhandlung „Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute"**) bildet eine Brücke zwischen den beiden heterogenen Forschungsgebieten, auf denen Grassmann thätig gewesen ist: der Sprachforschung und dem mathematisch-physikalischen Gebiet. Er unternimmt es hier, das ganze Gebiet der Sprachlaute nach ihrer akustischen Eigenthümlichkeit, wie sie vom Ohre wahrgenommen werden, zu schildern, indem er nach einander die Vocale, die Halbvocale und die Geräuschlaute behandelt, deren letztere er wiederum in die dauernden Laute (Hauchlaute und Zischlaute) und in die momentanen Laute eintheilt. Bei weitem den grössten Raum der Abhandlung, sowie das grösste Interesse für die Physik nimmt die von ihm entwickelte Theorie der Vocallaute in Anspruch, auf welche allein hier eingegangen werden soll. Dieselbe stimmt mit der von Herrn Helmholtz entwickelten nur in dem allgemeinen, aus den Versuchen von Willis entsprungenen Grundgedanken überein, die Vocalität sei dadurch bedingt, dass neben dem Grundton in Folge der Resonanz der Mundhöhle gewisse Obertöne besonders stark mitklingen. Die Ausführung dieses Gedankens im Einzelnen ist hingegen sehr verschieden, zum Theil wohl in Folge der verschiedenen Fassung der Aufgabe. Während es sich nämlich Herr Helmholtz zur Hauptaufgabe macht, die charakteristischen Töne derjenigen Arten von Vocalen zu ermitteln, welche ihm den am meisten charakteristischen Klang zu haben scheinen, daneben aber ausdrücklich anerkennt, dass auch alle continuirlich ineinander übergehenden Zwischenstufen vorkommen (Tonempfindungen, 4. Ausgabe, Seite 179), legt Grassmann auf diese Stetigkeit des Ueberganges das Hauptgewicht und will das ganze Vocalgebiet umfassen, welches „ebenso wie das der Farben nur durch Vertheilung auf einer Fläche vollständig dargestellt werden kann." Seine Hauptresultate sind folgende. Schon die einfachen Töne, wie sie durch Stimmgabeln, die vor gleichgestimmten bauchigen Gläsern schwingen, hervorgebracht werden, zeigen entschieden den Charakter der *Vocalreihe* U, $\ddot{U}$, I, nämlich die tieferen Töne, etwa bis zum dreigestrichenen c (c_3), den eines in der Tiefe dumpfen, dann immer heller werdenden U, die höheren, etwa bis e_4, den des $\ddot{U}$, noch höhere den des I. Dasselbe gilt von den entsprechenden durch Pfeifen

*) Programm des Stettiner Gymnasiums, 1854.

**) Poggendorff-Wiedemann's Annalen d. Phys. Bd. 1, S. 606—629, Mai 1877.

mit dem Munde erzeugten Tönen. Diese einfachen Töne sind aber noch nicht vollkommene Vocale. Vielmehr entsteht ein Vocal der Reihe *U*, *Ü*, *I* dadurch, dass aus dem von den Stimmbändern erzeugten Klanggemisch, welches aus der harmonischen Tonreihe (Grundton und Obertönen von 2, 3, 4, $\cdots n$mal so grosser Schwingungszahl) besteht, neben dem Grundton hauptsächlich *ein* Oberton stark hervorklingt. Solange der letztere, bei beliebig gewähltem Grundton, noch tiefer als c_3 liegt, liefert der Zusammenklang beider Töne den Vocal *U*, bei grösserer Höhe des Obertons entsteht *Ü* und, wenn der Oberton höher als e_4 liegt, *I*. Zum Beweise dient folgender Versuch: Man giebt dem Mund die Stellung, bei welcher man einen jener Obertöne pfeifen würde, so dass also die Mundhöhle jetzt auf beste Resonanz für jenen Oberton eingestellt ist; dann aber pfeift man ihn nicht, sondern singt nun den Grundton; dadurch entsteht ein Vocal der Reihe *U*, *Ü*, *I*. — Im Gegensatz gegen die Vocale dieser Reihe ist der *Vocal A* nicht durch die absolute Tonhöhe eines besonders hervorklingenden Obertons charakterisirt, sondern er entsteht dadurch, dass neben dem vorherrschenden Grundton die ganze Reihe der ersten 7 bis 9 Obertöne, also bis zur dritten Octave des Grundtons hin, untereinander etwa gleich stark, mitklingen. — *Alle übrigen Vocale* lassen sich durch den Uebergang eines Vocals der Reihe *U*, *Ü*, *I* in *A* oder umgekehrt ableiten. Zur Angabe der Klangbestandtheile eines solchen Uebergangsvocals dient eine Schwerpunktsconstruction. Stellt man nämlich 2 einfache Töne durch 2 schwere Punkte dar, deren Gewichte man gleich den Intensitäten macht, während ihr Abstand ihr musikalisches Intervall vorstellt, wobei z. B. das Intervall des Halbtons gleichschwebender Temperatur als Einheit dient, so repräsentirt der Schwerpunkt einen zwischenliegenden Ton, dessen Intervall gegen einen der Ausgangstöne durch den betreffenden Abstand gemessen wird. Ebenso werden alle Nüancen der auf denselben Grundton gesungenen *UÜJ*-Reihe, die ja immer nur durch je einen Ton charakterisirt sind, durch die Punkte einer Geraden dargestellt. Kommt ein durch einen solchen Punkt bezeichneter Ton nicht unter den Obertönen des Grundtons vor, so wird er durch die beiden benachbarten Obertöne ersetzt. Irgend ein anderer Punkt der Ebene stellt *A*, auf denselben Grundton gesungen, vor, und man hat sich in ihm nacheinander alle 7 Obertöne des *A* angebracht zu denken, so dass sein Abstand von einem Punkt der *UÜI*-Reihe *nacheinander* die verschiedenen Intervalle zwischen letzterem Ton und den Obertönen des *A* darstellt. Der Schwerpunkt von diesem *A* und einem Punkt der *UÜI*-Reihe, beide mit gewissen Intensitäten begabt, repräsentirt einen Vocal, für dessen charakteristische Töne die Intervalle gegen die charakteristischen Töne des *A* durch den Abstand von *A* angegeben werden. Hiermit ist

gezeigt, dass, sobald man irgend 3 Vocale, von denen einer nicht als zwischen den beiden anderen liegend erscheint, durch 3 Punkte der Ebene dargestellt hat, jeder andere Vocal durch einen genau bestimmten Punkt dieser Ebene dargestellt werden kann.

Den strengen objectiven Beweis für seine Theorie ist Grassmann allerdings schuldig geblieben; denn indem er die Anwendung von Resonatoren verschmäht, weil die Wirkung derselben noch durchaus nicht genau genug bekannt sei, verlässt er sich bei den erwähnten Versuchen mit verschiedenen Mundstellungen lediglich auf die Angaben seines Ohres. Es wird daher eine der nächsten Aufgaben der Physik sein, durch strenge, womöglich synthetische, Versuche diese Theorie entweder zu bestätigen oder zu widerlegen. —

Im Anschlusse an die Physik sei noch eine krystallographische Arbeit aus den jüngern Jahren erwähnt: *Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung* *), in welcher die Krystallsysteme und die Reihe aller innerhalb eines Systems möglichen Krystalle aus einem einfachen Grundgesetze abgeleitet werden. Nimmt man eine Fläche als durch eine senkrecht gegen sie stehende Kraft gebildet an, so heisst das erfahrungsmässige Naturgesetz: „Wenn zwei Kräfte von bekannter Richtung und Grösse als flächenbildend vorkommen, kann auch stets die Diagonalkraft flächenbildend vorkommen.“ Von zwei gleichen Kräften gelangt man zu ihrer Diagonalkraft, deren Grösse man somit kennt; so fortfahrend gewinnt man das allgemeinere Gesetz: Wenn an einem Krystalle drei Kräfte als flächenbildend vorkommen, so kommt auch jede andere Kraft, die aus ihren Vielfachen (oder deren Gegenkräften) zusammengesetzt ist, flächenbildend vor, doch um so seltener, je zusammengesetzter sie ist. Die Kräfte werden bald fallen gelassen und durch ihre Normalen ersetzt, so dass die weitere Betrachtung rein geometrisch fortschreitet.

Neben diesen selbständigen Arbeiten auf mancherlei Gebieten exacter Wissenschaft verfolgte Grassmann die Fortschritte aller verschiedenen Zweige der Physik mit lebhaftem Interesse, wie aus den zahlreichen (weit über 30) in der physikalischen Gesellschaft zu Stettin von ihm gehaltenen Vorträgen hervorgeht. Dieser Gesellschaft, deren Begründer und erster Vorsitzender sein Vater Justus gewesen war, hat er seit 1842 als Mitglied, später als Vorsitzender angehört**).

Februar 1878.

---

*) Programm der Otto-Schule in Stettin 1839. — Eine Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Krystallographie findet sich auch $\mathfrak{A}_1$ § 171.

**) Während des Drucks der vorstehenden Biographie ist eine Schrift über Grassmann von Victor Schlegel im Verlage von F. A. Brockhaus erschienen [Mai 1878].

Schriften von Hermann Grassmann.

I. Mathematische Schriften.

a) Selbstständige Bücher.

1. Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig, Wigand, 1844. — Selbstanzeige hiervon Grunert's Archiv Bd. 6, S. 337. — 2. Aufl. Leipzig, Wigand, 1878, mit einem Anhange über das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre.
2. Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik. Gekrönte Preisschrift. Mit einer erläuternden Abhandlung von A. F. Möbius. Leipzig, Weidmann, 1847.
3. Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten (gemeinsam mit R. Grassmann verfasst). Berlin, Enslin, 1860.
4. Die Ausdehnungslehre. Berlin, Enslin, 1862.
5. Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Berlin, Enslin, 1865.

b) Journal-Abhandlungen.

1. Theorie der Centralen. Crelle's Journal Bd. 24, S. 262, 372; Bd. 25, S. 57 (1842 und 1843).
2. Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse. Crelle's Journal Bd. 31, S. 111 (1846).
3. Ueber die Erzeugung der Curven 3. Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Curven. Crelle's Journal Bd. 36, S. 177 (1848).
4. Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durch gerade Linien. Crelle's Journal Bd. 42, S. 187 (1851).
5. Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene, dargestellt durch geometrische Analyse. Crelle's Journal Bd. 42, S. 193 (1851).
6. Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionsverknüpfungen. Crelle's Journal Bd. 42, S. 204 (1851).
7. Erzeugung der Curven 4. Ordnung durch Bewegung gerader Linien. Crelle's Journal Bd. 44, S. 1 (1852).
8. Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen. Crelle's Journal Bd. 49, S. 1 (1855).
9. Grundsätze der stereometrischen Multiplication. Crelle's Journal Bd. 49, S. 10 (1855).
10. Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen. Crelle's Journal Bd. 49, S. 21 (1855).
11. Die stereometrische Gleichung 2. Grades und die dadurch dargestellten Oberflächen. Crelle's Journal Bd. 49, S. 37 (1855).

12. Die stereometrischen Gleichungen 3. Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen. Crelle's Journal Bd. 49, S. 47 (1855).
13. Sur les différents genres de multiplication. Crelle's Journal Bd. 49, S. 123 (1855).
14. Die lineale Erzeugung von Curven 3. Ordnung. Crelle's Journal Bd. 52, S. 254 (1856).
15. Verschiedene mathematische Bemerkungen. Grunert's Archiv Bd. 49, S. 1 (1868).
16. Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0$ in ganzen Zahlen. Grunert's Archiv Bd. 49, S. 49 (1868).
17. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades. Grunert's Archiv Bd. 51, S. 93 (1870).
18. Zur Theorie der Curven 3. Ordnung. Gött. Nachr. 1872, S. 505.
19. Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Producte. Gött. Nachr. 1872, S. 567.
20. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre. Math. Ann. Bd. VII, S. 538 (1874).
21. Die Mechanik und die Principien der Ausdehnungslehre. Math. Ann. Bd. XII, S. 222 (1877). — Selbstreferat. Repertorium Bd. II, S. 62.
22. Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. Math. Ann. Bd. XII, S. 375 (1877).
23. Verwendung der Ausdehnungslehre für die Polarentheorie u. den Zusammenhang algebr. Gebilde. Crelle-Borch. J. Bd. 84, S. 273 (1878).

c) Programm.

1. Grundriss der Mechanik für den Unterricht in der Prima nach den Principien der Ausdehnungslehre bearbeitet. Progr. des verein. Königl. und Stadt-Gymnasiums zu Stettin 1867.

II Physikalische Schriften.

a) Journal-Abhandlungen.

1. Neue Theorie der Elektrodynamik. Poggendorff's Ann. Bd. 64, S. 1 (1845).
2. Zur Theorie der Farbenmischung. Poggendorff's Ann. Bd. 89, S. 69 (1853).
3. Zur Elektrodynamik. Crelle-Borchardt's Journal Bd. 83, S. 57 (1877) und Poggendorff-Wiedemann's Ann. Bd. I, S. 160. — Selbstreferat. Repertorium Bd. II, S. 3.
4. Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute. Poggendorff-Wiedemann's Ann. (Neue Folge) Bd. I, S. 606 (1877).

b) Programme.

1. Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung. Progr. der Otto-Schule zu Stettin 1839.

2. Uebersicht der Akustik und niedern Optik. Progr. des verein. Königl. und Stadt-Gymnasiums zu Stettin 1854.

Ferner: Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen im Anhange von Preyer's Elementen der reinen Empfindungslehre (Jena, Dufft, 1877).

III. Sprachwissenschaftliche Schriften.

a) Selbstständige Bücher.

1. Deutsche Pflanzennamen. Stettin 1870.
2. Wörterbuch zum Rigveda. Leipzig, Brockhaus, 1871—75.
3. Uebersetzung des Rigveda mit kritischen und erläuternden Anmerkungen. Leipzig, Brockhaus, 1876—77.

b) Journal-Abhandlungen.

1. Ueber die Verbindung der stummen Consonanten mit folgendem *v* und die davon abhängigen Erscheinungen. Kuhn's Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung Bd. 9 (1860).
2. Ueber die Verbindung der Consonanten mit folgendem *j* und die davon abhängigen Erscheinungen. Ebenda Bd. 11 (1862).
3. Ueber die Aspiraten und ihr gleichzeitiges Vorhandensein im An- und Auslaute der Wurzeln. Ebenda Bd. 12 (1863).
4. Ueber das ursprüngliche Vorhandensein von Wurzeln, deren Anlaut und Auslaut eine Aspirate enthielt. Ebenda Bd. 12 (1863).
5. Ueber die Casusbildung im Indogermanischen. Ebenda Bd. 12 (1863).
6. Ueber italische Götternamen. Ebenda Bd. 16 (1867).
7. Ursprung der Präpositionen im Indogermanischen. Neue Folge der Kuhn'schen Zeitschrift Bd. 3 (1877).

IV. Vermischte Schriften.

1. Die Lehre vom Satze. Stettin 1831.
2. Grundriss der deutschen Sprachlehre. Stettin 1842.
3. Leitfaden für den ersten Unterricht in der deutschen Sprache, von H. und R. Grassmann. Stettin 1842.
4. Leitfaden für den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache. Stettin 1843, zweite Auflage 1856.
5. Leitfaden der deutschen Sprache von H. und R. Grassmann, Stettin 1848; zweite Auflage 1852.
6. Deutsches Lesebuch für Schüler von 8 bis 12 Jahren von H. Grassmann und W. Langbein. 1.—4. Auflage Stettin 1848—57; 5. u. 6. Auflage Berlin 1861—68.
7. Deutsche Wochenschrift (Zeitung mit Robert Grassmann herausgegeben). Stettin 1848.
8. Ueber den Abfall vom Glauben. Stettin 1878.

Zur Classification der Flächen dritter Ordnung.

Von

Carl Rodenberg in Plauen im Vogtlande.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Die Eintheilung der Flächen dritter Ordnung hinsichtlich der Realität ihrer Geraden und der möglichen singulären Punkte wurde erschöpfend gegeben von Herrn Schläfli in seiner grossen Arbeit: On the Distribution of Surfaces of the third order into Species, in reference to the absence or presence of Singular Points. Philos. transact. London 1863, p. 207 ff.

Gelegentlich meiner Promotion gab Clebsch mir die Untersuchung des Pentaeders für die einzelnen Schläfli'schen Arten, welche Aufgabe in meiner Dissertation: „Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten" behandelt wird. Hierbei stellte es sich heraus, dass eine Reihe specieller Flächen, insbesondere diejenigen mit conischen Knoten, noch ein eigentliches Pentaeder besitzen, während andere, wie die mit biplanaren Knoten, im Allgemeinen Pentaeder mit unendlich benachbarten Ebenen mit sich führen. Aber nicht auf alle denkbaren Fälle der vereinigten Lage wird man unter Zugrundelegung einer bestimmten Singularität geführt. Diese Thatsache veranlasste mich, die umgekehrte, und wohl zweckmässigere, Fragestellung nach denjenigen Flächen, welche einem gegebenen Pentaeder angehören, zu wählen. Die Behandlung der hieraus entspringenden Aufgabe ist in diesem Aufsatze durchgeführt.

Von der grössten Wichtigkeit für die folgenden Untersuchungen ist der von Herrn Klein in seiner Abhandlung „Ueber Flächen dritter Ordnung", Math. Annalen Bd. VI, p. 551 ff., gegebene Satz, dass alle Flächen ohne Singularitäten und derselben Schläfli'schen Art durch continuirliche Aenderung der Constanten in einander übergeführt werden können, ohne dass hierbei ein Knoten auftrete. Diese Derivation ist nämlich fast ausnahmslos auch dann noch möglich, wenn das Pentaeder unverändert bestehen bleibt.

Die trennenden Flächen der verschiedenen Arten besitzen einen conischen Knoten und zwar lassen sich aus diesen Flächen die allgemeinen in ausserordentlich einfacher Weise mit Hülfe eines Verfahrens gewinnen, das wir gleich betrachten werden.

Gerade so, wie der Kegel zweiter Ordnung den Uebergang von einem einschaligen Hyperboloid zu einem zweischaligen bildet, kann man eine Fläche mit Knoten als Uebergang zwischen zwei andern ansehen, bei denen sich die Theile in der Nähe des Knotens verhalten wie die angeführten Flächen zweiter Ordnung. Bezeichnet man die beiden Processe, denen ein Knoten hiernach unterworfen werden kann, durch „Verbinden (+)" und „Trennen (—)", so erhält man nach Herrn Klein alle Flächen ohne Singularitäten, wenn man an jedem Knoten einer Fläche mit vieren einen jener Processe anbringt, nämlich:

$+ + + + \cdots$	I	mit 27	reellen	Geraden,				
$+ + + - \cdots$	II	„ 15	„	„				
$+ + - - \cdots$	III	„ 7	„	„				
$+ - - - \cdots$	IV	„ 3	„	„	und	7	reellen	Ebenen,
$- - - - \cdots$	V	„ 3	„	„	„	13	„	„

Die Flächen, bei denen Knoten bestehen bleiben, seien durch die Ziffer der Flächen ohne Knoten bezeichnet, welche aus jenen durch Verbinden hervorgehen. *Rechnet man überhaupt alle Flächen zu einer Art, welche sich in einander überführen lassen, ohne dass hierbei ein neuer oder höherer singulärer Punkt auftritt*, so genügt jetzt die Ziffer nicht mehr zur völligen Bestimmung, da die Aenderung eines Knotens durch die biplanare Form zu einer neuen Art führen kann, welche sich in ihrem Zusammenhange nicht von der frühern unterscheidet.

Es ist nun klar, dass man leicht die Art, zu der eine gegebene Fläche dritter Ordnung gehört, angeben kann, wenn es gelingt, die gewissermassen mechanisch definirten Processe, + und —, algebraisch zu vollziehen. Dieses ist einfach, wenn, was stets geschehen soll, die Gleichung der Fläche in ihrer kanonischen Form als Aggregat von 5 Cuben vorausgesetzt wird und das Pentaeder erhalten bleibt. So lange die Ebenen desselben nicht an besondere Bedingungen geknüpft sind, ist bekanntlich die kanonische Form eindeutig bestimmt*). Gehen jedoch vier derselben durch einen Punkt, so sind diese selbst in gewisser Weise willkürlich und die Gleichung kann unendlich viele Formen annehmen**).

---

*) Vergl. Clebsch, Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche etc. Borchardt's Journal Bd. 59, p. 143 ff., auch Gordan Math. Ann. Bd. V, p. 341 ff.

**) Vergl. Eckardt: Ueber diejenigen Flächen, auf welchen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Programm der Realschule zu Chemnitz 1875; oder Math. Ann. Bd. X, p. 227 ff.

Eine andere Specialisirung geht hervor, wenn zwei oder mehrere Ebenen unendlich nahe liegen. Die Reduction auf fünf Cuben ist dann nicht mehr möglich, aber gewisse Gleichungsformen werden wir aufstellen, welche der allgemeinen völlig entsprechen. Treten nun auch in den abzuleitenden kanonischen Formen noch andere willkürliche Elemente neben denen des Pentaeders auf, so sind doch diese im Allgemeinen völlig bestimmt.

Im Zusammenhange kann nach dem Gesagten natürlich nur die Flächenschaar betrachtet werden, deren Glieder dasselbe Pentaeder haben. Damit haben aber dann gleichzeitig alle Flächen ihre Erledigung gefunden, deren Pentaeder eine gleiche Anzahl reeller Ebenen besitzen und auch hinsichtlich der vereinigten Lage einer beliebigen Anzahl von Ebenen übereinstimmen, da solche Pentaeder alle durch reelle Collineationen in einander überführbar sind.

Für Flächen mit eigentlichem Pentaeder ist es von grossem Vortheil, die Ebenen desselben direct als Coordinatenebenen zu wählen, da namentlich die Discriminante der Fläche, deren Verschwinden das Auftreten eines Knotens andeutet, dann eine sehr einfache Form annimmt*).

Im § 1. schicken wir einige Sätze über ein derartiges Coordinatensystem voraus und wenden uns dann (§§ 2., 4., 5., 6.) zu den ihm angehörigen Flächen; immer ausgehend von einer möglichst einfachen Form, aus der wir durch allmähliche Aenderung der Coefficienten alle Arten erzeugen. Hierbei kann jedoch nie biplanaren Knoten begegnet werden, des speciellen Pentaeders wegen, welche dieselben mit sich führen. Wir sind daher gezwungen, Durchgänge durch solche Punkte besonders zu behandeln (§ 3.).

§ 7. giebt, als Abschluss der Flächen mit eigentlichem Pentaeder, eine Vertheilung der Knoten aller Flächen, welche demselben angehören, auf den Raum, und die Aufzählung der getrennten Mannigfaltigkeiten, welche die einzelnen Arten constituiren.

§ 8. enthält einen Satz, mit dessen Hülfe sich in einfacher Weise (§ 9.) die Gleichungen aller Flächen mit mehrfachen Pentaederebenen angeben lassen. Diese finden einzeln ihre Behandlung in den §§ 10.—15.

Die Flächen mit unbestimmtem Pentaeder sind in § 16. aufgezählt; untersucht in den §§ 17.—20.

§ 21. enthält die tabellarische Zusammenstellung aller Resultate.

---

*) Vergl. Salmon: On Quarternary Cubics. Phil. Tr. 1860, p. 229 ff.

§ 1.

Ueber ein Pentaedercoordinatensystem.

Unter Zugrundelegung von 5 Ebenen als Fundamentalebenen eines Coordinatensystems kann man definiren:

Die Coordinaten eines Punktes sind 5 Zahlen,

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5,$$

welche sich verhalten wie seine Abstände von den Ebenen des Pentaeders, jeder Abstand multiplicirt mit einer so gewählten Constanten, dass die Summe der Producte:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \equiv 0$$

wird.

Bei *reellen* Ebenen wird der Raum durch sie in $2^4 - 1 = 15$ Kammern zerlegt, entsprechend der Anzahl von Variationen von je vieren der Vorzeichen der Coordinaten eines Punkts weniger eins. Denn das Vorzeichen der fünften Coordinate kann man jederzeit fest annehmen und eine Variation kommt in Wegfall, da der Identität $\Sigma x_i = 0$ wegen nicht alle x gleiches Vorzeichen haben können.

Hinsichtlich der Vertheilung der Vorzeichen liegen zwei Möglichkeiten vor, entweder sind 1) vier Zeichen gleich, oder 2) nur drei gleich, die beiden übrigen diesen entgegengesetzt. Im ersten Falle kann die fünfte Coordinate nie Null werden, denn es müsste sonst auch die Summe der übrigen verschwinden, was unmöglich ist. Folglich wird der zugehörige Raum nur durch 4 Ebenen begrenzt. Solcher giebt es hiernach **5**, sie mögen *Tetraederkammern* genannt werden. Die übrigen **10** erfordern alle fünf Ebenen zu ihrer Begrenzung; sie mögen *Pentaederkammern* heissen.

Haben vier Coordinaten eines Punkts dasselbe Zeichen, so liegt er in einer Tetraederkammer, im andern Falle in einer Pentaederkammer.

Sind *zwei Ebenen conjugirt imaginär*, so wird durch die drei reellen der Raum noch in *vier Kammern* zerlegt, von denen diejenige ausgezeichnet ist, welche nicht von der, stets reellen, Schnittlinie der conjugirten Ebenen durchsetzt wird. Nennen wir die Ebenen

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0,\quad x_4 + i x_5 = 0,\quad x_4 - i x_5 = 0,$$

so haben, wie unter Anwendung ähnlicher Betrachtungen, wie vorhin, leicht erwiesen wird, $x_1\ x_2\ x_3$ *dasselbe Vorzeichen, wenn der Punkt in der Kammer liegt, welche nicht von der isolirten Kante durchsetzt wird.*

Sind endlich *zwei Paare conjugirter Ebenen* vorhanden, so tritt keine Theilung des Raumes mehr ein, denn *eine* reelle Ebene ist hierzu nicht mehr ausreichend.

Von Interesse sind für uns noch die 10 Ebenen, welche man durch die Schnittpunkte von je dreien der Fundamentalebenen und die Schnitt-

linie der beiden übrigen legen kann und die passend als *Diagonalebenen* zu bezeichnen sind. Solche Ebenen sind dargestellt durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = 0 \text{ etc.}$$

Denn der angeführten genügt die Gerade $x_1 = x_2 = 0$, aber auch — in Folge der Identität — der Punkt $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, wie verlangt wird.

Sehen wir ab von denjenigen Durchschnittserzeugnissen dieser Ebenen, welche in denen des Pentaeders völlig enthalten sind, so bleiben uns noch $10 \cdot 3 = 30$ Linien, welche zu dreien durch eine Pentaederecke gehen und von drei solchen Diagonalebenen erzeugt werden, deren Kanten sich in jener Ecke treffen. Dann giebt es noch $5 \cdot 4 = 20$ Schnittpunkte, von denen je vier die Spitzen der Dächer sind, welche von dreien solcher 6 Diagonalebenen, deren Kanten einer Tetraederkammer angehören, über deren Seitenflächen gebildet werden.

Von Vortheil für die Anschauung ist es, das Tetraeder regulär, die fünfte Ebene unendlich fern zu denken. Dann halbiren die 6 erwähnten Diagonalebenen die Aussenwinkel des Tetraeders und die 4 Ecken liegen auf den in den Mitten seiner Seitenflächen errichteten Normalen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen der Diagonalebenen kann man leicht angeben, wann *ein Punkt in einer solchen Ebene oder in einer der Schnittlinien oder einem der Schnittpunkte liegt: Es müssen resp.* 2, 3, 4 *Coordinaten in ihren absoluten Werthen übereinstimmen und zwei derselben mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sein.* Folglich können auch die übrigen nicht alle gleiches Zeichen haben und die Punkte gehören daher sämmtlich Pentaederkammern an, wie es die Anschauung auch ergiebt.

Ein theilweise imaginäres Pentaeder bedingt natürlich auch eine Anzahl imaginärer Diagonalebenen, deren Aufzählung ohne Schwierigkeit ist und füglich unterbleiben kann.

§ 2.

Die Flächen mit reellem Pentaeder.

Eine solche Fläche hat unter Zugrundelegung des erläuterten Systems die Gleichung

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} + \frac{x_4^3}{\alpha_4^2} + \frac{x_5^3}{\alpha_5^2} = 0$$

oder kurz

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1,\ \alpha_5).$$

Die gebrauchte Coefficientenbezeichnung wird sich als zweckmässig erweisen. Sollten einige Coefficienten negativ sein, so wären die entsprechenden α imaginär zu nehmen.

Ist die vorliegende *Fläche* eine specielle *mit conischem Knoten y*, so genügt dieser den Gleichungen

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} = \frac{y_3^2}{\alpha_3^2} = \frac{y_4^2}{\alpha_4^2} = \frac{y_5^2}{\alpha_5^2},$$

d. h. *die Grössen α sind dann geradezu die Coordinaten des Knotens und die Gleichung*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$$

ist die Bedingung für sein Auftreten, die Summe selbst die Discriminante der Fläche.

Hiernach ist jedem Punkte des Raumes eine Fläche dritter Ordnung mit Knoten zuertheilt und so die Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen dieser Flächen, welche *einem* Pentaeder angehört, eindeutig auf den Punktraum abgebildet*). Dieser kann demnach als Grenze des Bildes der Mannigfaltigkeit aller Flächen, deren jede durch 4 völlig willkürliche α gegeben ist, angesehen werden.

Nach den Entwickelungen am Schlusse des § 1. findet man weiter, *dass die Flächen mit* 2, 3, 4 *Knoten sich abbilden resp. auf die Diagonalebenen, ihre Schnittlinien und Schnittpunkte.* Da nämlich die absoluten Werthe der Coordinaten als Quadratwurzeln der α^2 völlig gegeben sind, so kann die Verschiedenheit nur in den Vorzeichen liegen, was wiederum mit der stets verschwindenden Summe nur im Einklange steht, wenn resp. 2, 3, 4 Coordinaten, ihrem absoluten Werthe nach, einander gleichkommen, woraus unsere Behauptung entspringt.

Es erscheint wünschenswerth, vor der Classification der Flächen an einigen besonders hierzu geeigneten Specialfällen die Lagenverhältnisse zwischen Fläche und Pentaeder kennen zu lernen und namentlich die Vertheilung der verschiedenen Arten von Knoten festzustellen.

Betrachten wir die Fläche mit der Maximalzahl der Knoten: 4. Nach dem eben Gesagten besitzt deren Gleichung vier gleiche α^2, deren Wurzeln — die Coordinaten der Knoten — sich mit der fünften auf vier verschiedene Weisen zur Summe Null combiniren lassen müssen. Nehmen wir die vier ersten Coefficienten $\frac{1}{\alpha^2}$ der Einheit gleich, so ist die fünfte $\frac{1}{2^2}$, und die Gleichung der Fläche ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{x_5^2}{4} = 0.$$

Die Knoten sind:

*) Eine Ausnahme bilden die Punkte der Pentaederebenen, welchen Ausartungen der Flächen in die dreifachen Pentaederebenen entsprechen, vergl. § 7., wo die Bedeutung dieser Ebenen als trennende Gebiete der verschiedenen Arten angegeben ist.

$$\begin{array}{l} -1,\ +1,\ +1,\ +1,\ -2, \\ 1,\ -1,\ +1,\ +1,\ -2, \\ 1,\ +1,\ -1,\ +1\ \ -2, \\ 1,\ +1,\ +1,\ -1,\ -2. \end{array}$$

Sie bilden die Ecken der kleinen Dächer, welche von Diagonalebenen über den Ebenen des Tetraeders x_1, x_2, x_3, x_4 gebildet werden (§ 1.), und bestimmen ein Tetraeder, dessen Kanten diejenigen des andern schneiden.

Stellt man die Fläche so — wie es auf Tafel I der Klein'schen Arbeit geschehen ist —, dass eine Spitze des Knotenpunkttetraeders nach unten zeigt, so zeigt eine Spitze desjenigen der 4 Pentaederebenen nach oben und der Körper selbst erscheint um 60^0 gegen den andern um die verticale Axe gedreht. Die fünfte Ebene liegt vereinigt mit der Ebene der einfachen Geraden.

Durch eine *kleine* Aenderung der Coefficienten können wir jetzt an beliebig vielen Knoten einen der Processe des Verbindens und Trennens anbringen, wodurch *alle Arten, welche direct aus unserer Specialfläche hervorgehen, abgeleitet sind.* Die etwa bleibenden Knoten haben nun ersichtlich reelle Tangentenkegel, und man wird vermuthen, alle Knoten, welche wie sie in Pentaederkammern liegen, besitzen solche Kegel. Zur Erledigung dieser Frage betrachten wir die Gleichung des Tangentenkegels in dem Knoten y:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} + \frac{x_4^2}{y_4} + \frac{x_5^2}{y_5} = 0.$$

Ein Kegel ist dann und nur dann reell, wenn er von einer willkürlichen reellen Ebene in einer reellen Curve getroffen wird. Bei dem unserigen sind aber die Schnittcurven mit den Pentaederebenen reell, sobald drei, und nicht mehr, der y dasselbe Zeichen haben, d. h. der Knoten die angegebene Lage hat. Die Schnittcurve und mit ihr der Kegel ist aber sicher imaginär, wenn vier der y gleiches Zeichen haben, welches sich am besten für die fünfte Ebene als Schneidende ersehen lässt. Ein solcher Punkt liegt aber nach § 1. in einer Tetraederkammer. Folglich: *Die isolirten Knoten erfüllen die Tetraederkammern, die nicht isolirten die Pentaederkammern.*

Nach diesen Erörterungen gehen wir behufs Begründung einer Eintheilung von einer Fläche mit 27 reellen Geraden aus und führen diese durch allmähliche Aenderung der Coefficienten in andere Arten über, wobei wir die trennenden Gebiete mit einem Knoten zu passiren haben.

Zum Ausgange diene die Diagonalfläche von Clebsch

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Haben wir nun aus dieser nach vorgenommener Deformation eine Fläche mit Knoten erhalten, so verschwindet das Aggregat der α für eine bestimmte Vorzeichenvariation und wird nach dem bei fortgesetztem Deformiren erfolgenden Trennen der Flächentheile einen dem ursprünglichen im Zeichen entgegengesetzten Werth annehmen, und so fort beim Passiren von weitern Knoten. Hieraus ziehen wir die für das Folgende fundamentale Regel: *Um zu erkennen, wie oft bei der Ueberführung einer Fläche mit* 27 *Graden in eine gegebene ein Knoten auftritt, bilde man bei beiden die Werthe der Aggregate der fünf α für sämmtliche Vorzeichenvariationen — oder kurz die sämmtlichen Variationen —, die Anzahl derjenigen, welche einen Zeichenwechsel aufzuweisen haben, ist gleich der gesuchten.*

Nimmt man insbesondere die Aenderung so vor, dass die einmal erzeugten Knoten erhalten bleiben, so kann man in der nämlichen Weise Flächen mit beliebig vielen derselben bis zur Maximalzahl 4 entstehen lassen. Nothwendig hat man aber nur bei der Ueberführung zweier Flächen mit gleich vielen Knoten in einander solche mit einem Knoten mehr als die vorliegenden zu passiren, wie aus den Abbildungen sofort hervorgeht.

Jedoch auch biplanare Knoten trennen unter Umständen die Gebiete der Flächen mit zwei conischen. Solche können unter den unserigen aber nicht vorkommen, weil sie äusserst specielle Pentaeder besitzen*); sie machen sich überhaupt nur dann nothwendig, wenn man von einer Fläche mit 4 Knoten ausgeht, wie Herr Klein es thut.

Um bequem das Auftreten der Zeichenwechsel studiren zu können, ordnen wir die Coefficienten der Fläche

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

so, dass

$$\alpha_1^2 \leqq \alpha_2^2 \leqq \alpha_3^2 \leqq \alpha_4^2 \leqq \alpha_5^2.$$

Da ferner nur Verhältnisse in Betracht kommen, sei das grösste, α_5, mit einem festen, dem negativen Zeichen belegt, wie es bei der Fläche mit 4 Knoten bereits geschehen ist. Für die Diagonalfläche haben wir dann die sämmtlichen Variationen in dem folgenden Schema, in dem das Zeichen von α_5 gleich fortgelassen ist.

A

	α_1	α_2	α_3	α_4	Werth
1)	+	+	+	+	$\cdots +3$

B

	α_1	α_2	α_3	α_4	Werth
2)	−	+	+	+	$\cdots +1$
3)	+	−	+	+	$\cdots +1$
4)	+	+	−	+	$\cdots +1$
5)	+	+	+	−	$\cdots +1$

*) Vergl. § 11.

	C						D				
	α_1	α_2	α_3	α_4	Werth		α_1	α_2	α_3	α_4	Werth
6)	$-$	$-$	$+$	$+$	$\cdots -1$	12)	$-$	$-$	$-$	$+$	$\cdots -3$
7)	$-$	$+$	$-$	$+$	$\cdots -1$	13)	$-$	$-$	$+$	$-$	$\cdots -3$
8)	$-$	$+$	$+$	$-$	$\cdots -1$	14)	$-$	$+$	$-$	$-$	$\cdots -3$
9)	$+$	$-$	$-$	$+$	$\cdots -1$	15)	$+$	$-$	$-$	$-$	$\cdots -3$
10)	$+$	$-$	$+$	$-$	$\cdots -1$						
11)	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots -1$						

Es wirft sich zunächst die Frage nach der Maximalzahl der Zeichenwechsel auf, welche eine gegebene Fläche gegenüber der Diagonalfläche zeigen kann.

Zu deren Beantwortung beweisen wir folgende 4 Hülfssätze:

1) Unter D tritt nie ein Zeichenwechsel auf.

2) Unter C tritt höchstens ein Zeichenwechsel auf und dann sind unter B zwei, sonst nirgends welche vorhanden.

3) Unter B können alle Variationen Zeichenwechsel haben, ist jedoch hier keiner vorhanden, so tritt überhaupt keiner auf.

4) Zeigt die Variation unter A einen Zeichenwechsel, so ist dasselbe mit allen unter B und mit keiner weitern der Fall.

Hieraus ergiebt sich als gesuchte Maximalzahl 5.

Die Richtigkeit der Sätze 1) und 4) leuchtet ohne Weiteres ein.

Zum Beweise von 2) bemerken wir, dass die zu betrachtende Variation jedenfalls 6) ist, denn diese ist die grösste. Also sei:

$$-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 > 0.$$

Bei der Annahme, es sei auch die nächst grösste 7)

$$-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 > 0,$$

erhalten wir als Summe beider Ungleichungen

$$-2\alpha_1 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5 > 0,$$

d. h.

$$\alpha_4 > \alpha_1 + \alpha_5,$$

was mit der gewählten Reihenfolge der α unvereinbar ist. Keinen Wechsel zeigen offenbar 1), 2), 3). Aus den Bildungen

$$5) + 6) = 2\alpha_3 - 2\alpha_5 < 0,$$

$$4) + 6) = 2\alpha_4 - 2\alpha_5 < 0$$

geht aber hervor, dass bei 4) und 5) Zeichenwechsel auftreten, womit unser Satz bewiesen ist.

Die erste Behauptung des Satzes 3) ergiebt sich, wenn man nur α_5 gross genug annimmt.

Die zweite folgt daraus, dass für

$$6) > 0$$

auch

$$6) + 5) = 2\alpha_3 - 2\alpha_5 > 0,$$

welches unmöglich ist.

Damit wären alle Hülfssätze erwiesen.

Bei der Deformation der Diagonalfläche tritt unter B offenbar zuerst ein Verschwinden der Variation 5) — sagen wir eine *Null* — auf, denn diese ist die kleinste und sonst ist nach dem Satze 3) noch keine aufgetreten. Aendern wir die Coefficienten weiter, doch so, dass die Null erhalten bleibt, so wird sich die zweite bei 4) einstellen. Von nun an können wir jedoch in zwei von einander wesentlich verschiedenen Richtungen Aenderungen vornehmen: *Es können* 1) *weitere Nullen unter* B *hervorgebracht werden*; *wir erhalten die Fläche mit* 4 *Knoten*; 2) *kann die mögliche Null unter* C *erzeugt werden*; *wir erhalten eine Fläche mit* 3 *Knoten, welchen aber kein vierter* (nach 2)) *beitreten kann.*

Die letztere Fläche ist nun eine solche, bei der sich Knoten durch die biplanare Form geändert haben, sofern sie aus einer mit 4 Knoten entstanden, denn nur solche setzen dem Auftreten der weitern Knoten Hindernisse entgegen.

Ihre Knoten zeigen aber, wie aus ihrer Gleichung

$$(p, q, p+q, p+q, p+q)$$

hervorgeht, im Verhalten nichts Verschiedenartiges, es ist kein Merkmal vorhanden, an wie vielen derselben der eben bezeichnete Process ausgeführt worden ist, wir finden nur *eine* Art. Herr Klein führt deren drei an, entsprechend der Anwendung dieses Processes auf 1, 2, 3 Knoten und bezeichnet überhaupt alle durch denselben aus irgend einer vorgelegten Fläche entstandenen als neue Arten, während man unter Umständen nichts Neues erhält, wie wir sogleich sehen werden. Der Schwerpunkt der Sache liegt in jener Arbeit aber wohl darin, zu zeigen, dass nach Auflösung der Knoten besagte Aenderung überhaupt wirkungslos war*).

Bei Flächen mit einem, resp. zwei Knoten und lauter reellen Geraden haben wir von jeder nur eine Art. Erst wenn wir die Null unter C hervorrufen und eine oder zwei der Nullen unter B in Zeichenwechsel überführen, d. h. Flächentheile trennen, erhalten wir andere Arten, als sie direct aus der Fläche mit 4 Knoten durch Trennen erzeugt werden können.

Also nur bei Flächen I mit drei Knoten, II mit zwei Knoten und III mit einem Knoten erhalten wir bis jetzt verschiedene Arten.

Ein noch möglicher Zeichenwechsel unter C liefert eine Fläche IV

*) Vgl. § 4. am Ende.

ohne Knoten, welche aber von uns nur mit Hülfe des Durchgangs durch Knoten, an denen die Aenderung durch die biplanare Form angebracht ist, in eine Diagonalfläche übergeführt werden kann.

Eine zweite Fläche von dieser Eigenschaft leiten wir aus der noch nicht betrachteten mit einem isolirten Knoten ab. Letztere erhält Herr Klein durch Ueberführung des Knotens einer IV durch die biplanare Form. Wir erhalten dieselbe unter Anwendung des Trennens auf alle Knoten einer Fläche mit vieren (oder algebraisch: durch Hervorrufen sämmtlicher Zeichenwechsel unter B) und schliessliches Zusammenziehen des kugelartigen Stücks der entspringenden V zum Knoten, indem wir die Null unter A auftreten lassen. Aus der Gleichung der gefundenen Fläche:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$

ergeben sich als Coordinaten des Knotens:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4).$$

Derselbe liegt daher in einer Tetraederkammer und ist nach dem Frühern also wirklich isolirt, übereinstimmend mit dem soeben gewonnenen Resultate.

Aus dieser leiten wir nun die Fläche

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5) \cdots \alpha_5 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

ab. Der Knoten ist verschwunden, die Fläche eine IV, von der aus wir aber erst zu jener mit isolirtem Knoten zurückkehren müssen, um nach und nach Linien reell werden lassen zu können*).

Als Ergebniss wäre daher hinzustellen:

Bei allen Flächen ohne Singularitäten oder mit conischen Knoten kann man die Ueberführung ohne Ueberschreitung neuer Knoten auch dann noch vornehmen, wenn das Pentaeder bleibt, sofern sie nicht der Art IV *ohne Knoten angehören. Letztere sind jedoch mit jener Beschränkung in* 3 *Unterarten zu spalten***). —

Es wird jetzt nothwendig, dass wir auf kurze Zeit unsere bisherigen Untersuchungen unterbrechen und Aenderungen durch biplanare Knoten wirklich ausführen, um namentlich die Frage nach der Wirkung dieses Vorgangs zu erörtern, wenn eine beliebige Anzahl vorhandener Knoten

---

*) Dass man wirklich eine Fläche mit 3 Geraden und 7 Ebenen vor sich hat, erkennt man auch durch ihre Ueberleitung in die Fläche

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \infty),$$

diese gehört der angegebenen Art an, wie Herr Eckardt a. a. O. § 29. bewiesen hat, ein Knoten tritt nicht auf, folglich ist die unserige derselben Art.

**) Die Möglichkeit der Ueberführung in einander erhellt auch für diese Unterarten aus den §§ 12. und 13.

von ihm betroffen wird, da wir erst dann den Artbegriff exact zu begrenzen im Stande sein werden.

Dabei müssen wir ein gänzlich anderes Verfahren anwenden.

§ 3.

Die Durchgänge durch biplanare Knoten.

Wir wählen als Ausgangsfläche eine mit drei conischen Knoten, welche man stets durch die Gleichung

$$x_1^3 + x_1^2 (x_2 + x_3 + x_4) + a x_2 x_3 x_4 \text{ *)}$$

darstellen kann. Die drei Knoten sind die in $x_1 = 0$ liegenden Ecken des Coordinatentetraeders. Die Flächenschaar, welche durch continuirliche Aenderung des a erzeugt wird, enthält jedoch nicht unsere Uebergangsflächen, daher wählen wir die Form

$$x_1^3 + x_1^2 (\varkappa x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4) + x_2 x_3 x_4 = 0,$$

welche uns gestattet, durch Ueberführung beliebig vieler der Grössen $\varkappa$, λ, μ durch Null zu Werthen mit entgegengesetzten Zeichen, an eben so vielen Knoten den fraglichen Process zu vollziehen; denn durch Nullsetzen mehrerer jener Grössen erhalten wir Flächen mit biplanaren Knoten.

Man erkennt zunächst leicht (etwa durch Bildung der Discriminante der Schnittcurven unserer Fläche mit den Ebenen des Büschels $x_1 + p x_2 = 0$), dass sich

$$\text{eine} \begin{cases} \text{I mit drei Knoten,} \\ \text{I mit vier Knoten,} \\ \text{II mit drei Knoten,} \end{cases} \text{je nachdem } 1 + 2\varkappa\lambda\mu \gtreqless 0$$

findet. Hiermit stimmt überein, dass kurz vor dem Auftreten eines biplanaren Knotens die Fläche immer eine I ist**).

Wir zeigen nun, dass nur dann etwas Neues entsteht, wenn sich ein oder drei Knoten durch die biplanare Form ändern, dass es aber gleichgültig ist, welcher dieser beiden Fälle stattgefunden hat.

Zum Beweise betrachten wir die beiden Flächen:

$$\text{(A)} \qquad x_1^3 + x_1^2 (-\varkappa x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4) + x_2 x_3 x_4 = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad x_1^3 + x_1^2 (+\varkappa x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4) + x_2 x_3 x_4 = 0,$$

unter $\varkappa$, λ, μ positive Grössen verstanden. Diese beiden Flächen sind nicht anders als durch $\varkappa = 0$ in einander überzuführen; in diesem Momente ist der Knoten 0, 1, 0, 0 biplanar, die Aenderung durch *einen* solchen Punkt ist von Einfluss. Nehmen wir dieselbe jetzt bei einem zweiten Punkte, etwa 0, 0, 1, 0 vor, so entsteht die Fläche

*) Vergl. Schläfli a. a. O.

**) Klein a. a. O. § 5.

(C) $$x_1^3 + x_1^2(\varkappa x_2 - \lambda x_3 + \mu x_4) + x_2 x_3 x_4 = 0,$$

welche durch die Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1', \\ x_2 &= - x_2', \\ x_3 &= - x_3', \\ x_4 &= x_4' \end{aligned}$$

in A übergeht. Eine am dritten Knoten angebrachte Aenderung führt daher wieder auf die Art B, da alle Knoten gleichwerthig sind, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Flächen mit weniger Knoten sind jetzt leicht erledigt.

Nach dem vorigen Paragraphen sind die in Frage stehenden Aenderungen auf solche Flächen überhaupt wirkungslos, welche aus den eben betrachteten durch *Verbinden* hervorgehen. *Trennt* man jedoch Flächentheile, so erzeugt nur der Durchgang durch die biplanare Form bei *einem* der bleibenden Knoten eine neue Art, denn derselbe, bei zweien angebracht, war ja einflusslos auf die ursprüngliche Fläche mit dreien.

Mit Rücksicht auf die bezüglich der Flächen mit *einem* Knoten bereits gewonnenen Resultate *erhält man bei der Ueberführung conischer Knoten durch die biplanare Form nur dann eine neue Flächenart, wenn der Zusammenhang der Fläche nicht grösser als zu diesem Vorgang unbedingt nothwendig ist und eine ungerade Anzahl von Knoten von demselben betroffen wird.* Man erhält ferner zwei Flächen ohne Knoten aus den beiden so abgeleiteten mit einem, — Flächen, wie sie aus der mit vier Knoten entstehen, als gegeben vorausgesetzt —, welche sich bei festem Pentaeder nur durch die nämlichen Flächen in andere mit mehr reellen Linien überführen lassen, wenn man am Knoten den Process des Trennens anbringt, sofern sein Kegel reell, oder ihn verschwinden lässt, sofern dieser Kegel imaginär ist. Alle hierher gehörigen Flächen mögen im Gegensatz zu denen, welche aus der mit vier Knoten direct hervorgehen, als *inverse Flächen* bezeichnet werden.

Indem wir uns der Bezeichnung der Klein'schen Arbeit anschliessen und diese Arten durch angefügte Striche unterscheiden, haben wir als *inverse Flächen* die folgenden 6:

a) Flächen mit Knoten:
- I′ mit drei Knoten,
- II′ mit zwei Knoten,
- III′ mit einem Knoten,
- IV′ mit isolirtem Knoten,

b) Flächen ohne Knoten:
- IV′ entstehend aus der gleichbenannten unter *a* durch Verschwinden des Knotens,
- IV″ entstehend durch Anwendung des Trennens aus der III′.

§ 4.

Die Flächen mit reellem Pentaeder. (Schluss.)

Es erübrigt noch die Flächen zu betrachten, in deren kanonischen Formen negative Coefficienten vorkommen. Von solchen haben wir nur diejenigen mit einem oder zwei derselben zu untersuchen. Denn wären mehr negativ, so könnten wir alle Zeichen entgegengesetzt nehmen und kämen auf eine der angeführten.

Um zu *Flächen mit einem negativen Coefficienten* zu gelangen, gehen wir aus von der IV′

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \cdots \alpha_5 > \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

und führen α_5 durch ∞ ins Imaginäre. Dann ist

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, i\alpha_5)$$

die gewünschte; eine IV′, da kein Knoten aufgetreten ist*). Die Summe der Quadratwurzeln ist jetzt complex nie Null: *Eine Fläche mit einem negativen Coefficienten besitzt nie einen Knoten.*

Lässt man nun in ähnlicher Weise einen *zweiten Coefficienten negativ* werden, so tritt so lange nichts Bemerkenswerthes ein, als nicht durch gegenseitiges Aufheben der imaginären Grössen, begleitet von geeigneten reellen, Veranlassung zu zwei imaginären Knoten gegeben wird. In diesem Falle rücken zwei der Geraden des reellen Dreiecks in die Verbindungslinie der Knoten — Axe bei Schläfli genannt —, wir haben eine Schläfli'sche IV, 5; denn alle andern Flächen mit imaginären Knoten sind nicht vom Zusammenhange der IV′. Der Durchgang durch die eben betrachtete Fläche hat aber an der Gleichung gar kein Merkmal hinterlassen: *Flächen mit imaginären Knoten bilden nie Uebergänge zu neuen Arten,* wie das bekannt ist**).

Bemerkenswerth erscheint, dass Flächen mit reellem Pentaeder nie gleichzeitig reelle und conjugirte Knoten aufweisen, während alle übrigen Arten vertreten sind.

Der bessern Uebersicht wegen geben wir noch eine tabellarische Zusammenstellung und bringen hierbei in Erinnerung, dass inverse Flächen durch angehängte Striche in der Bezeichnung gekennzeichnet sind.

Fläche: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \cdots \alpha_1^2 \leqq \alpha_2^2 \leqq \alpha_3^2 \leqq \alpha_4^2 \leqq \alpha_5^2;\ \alpha_5 < 0.$

---

*) Vergl. eine Note des § 2.

**) Vergl. z. B. Sturm: Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Cap. 8. Auch Klein a. a. O. § 7. Hier sind die Bilder unserer Flächen die isolirten Doppelcurven.

Variationen der Diagonalfläche (1, 1, 1, 1, 1)

A	B	C
$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$	$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$	$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$
$+\ +\ +\ +\cdots+$	$-\ +\ +\ +\cdots+$	$-\ -\ +\ +\cdots-$
	$+\ -\ +\ +\cdots+$	
	$+\ +\ -\ +\cdots+$	
	$+\ +\ +\ -\cdots+$	

a) Flächen mit positiven Coefficienten.

1) Flächen ohne Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:	
0	I	27 reelle Linien,
1 unter B	II	15 „ „
2 „ B	III	7 „ „
3 „ B	IV	3 „ „ 7 reelle Ebenen,
2 „ B, 1 unter C	IV″	3 „ „ 7 „ „
4 „ B	V	3 „ „ 13 „ „
4 „ B, 1 unter A	IV′	3 „ „ 7 „ „

2) Flächen mit einem Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Null unter:	Art:
0	B	I
1 unter B	B	II
2 „ B	B	III
2 „ B	C	III′
3 „ B	B	IV
4 „ B	A	IV′

3) Flächen mit 2 Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2 unter B	I
1 unter B	2 „ B	II
1 „ B	1 „ B, 1 unter C	II′
2 „ B	2 „ B	III

4) Flächen mit 3 Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	3 unter B	I
0	2 „ B, 1 unter C	I′
1 unter B	3 „ B	II

5) Flächen mit 4 Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	4	I

b) Flächen mit negativen Coefficienten.

1 Coefficient negativ, IV′

2 Coefficienten negativ, IV′ (oder Schläfli'sche IV, 5 mit zwei conjugirten Knoten).

Beispiel:

$$x_1^3 + \frac{x_2^3}{4} + \frac{x_3^3}{9} + \frac{x_4^3}{16} + \frac{x_5^3}{16} = 0.$$

$$(1, 2, 3, 4, 4)$$

A	B	C
$+ + + + \cdots + 6$	$- + + + \cdots + 4$	$- - + + \cdots 0$
	$+ - + + \cdots + 2$	
	$+ + - + \cdots\ 0$	
	$+ + + - \cdots - 2$	

Also: Ein Zeichenwechsel unter B, eine Null unter B und eine Null unter C. Die Fläche ist eine II′ mit 2 Knoten.

§ 5.

Die Flächen mit zwei conjugirten Pentaederebenen.

Solche haben bekanntlich nie 27 reelle Linien, sondern, wie wir sehen werden, höchstens 15.

Als Ausgangsfläche zur Ableitung aller Arten wird sich irgend eine mit dem Maximum reeller Geraden am besten eignen, da von diesen nur eine Art existirt.

Seien in der allgemeinen Gleichung unserer Flächen

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} + \frac{(x_4 + i x_5)^3}{(\alpha_4 + i\alpha_5)^2} + \frac{(x_4 - i x_5)^3}{(\alpha_4 - i\alpha_5)^2} = 0 \cdots \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \alpha_3^2$$

oder

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + i\alpha_5, \alpha_4 - i\alpha_5)$$

vorläufig *die Coefficienten der reellen Ebenen positiv*, was offenbar zum Auftreten reeller Knoten nothwendig ist.

Von Diagonalebenen sind nur reell

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0,$$
$$x_4 = 0.$$

Alle gehen durch die Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, aber die drei ersten gehören den drei reellen Kanten dieser Ecke an, während die letzte der isolirten Kante zugeordnet ist.

Liegt nun ein Knoten in einer der drei Schnittlinien $x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$ etc., so hat die Fläche drei reelle Knoten, kann also nur eine II sein, da die Arten I und I′ reelle Pentaeder voraussetzen.

Flächen, deren 2 reelle Knoten in $x_4 = 0$ liegen, können aber nie weitere erhalten, und darin liegt ein wesentlicher Unterschied, den wir noch genauer erörtern werden.

Uns interessirt zunächst die gewonnene II, da der Process des Verbindens, angewendet auf ihre sämmtlichen Knoten, uns zur gewünschten Ausgangsfläche verhilft.

Zur nothwendigen Bildung der Variationen setzen wir diesmal in der Discriminante:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$$

α_4 negativ, womit allerdings ein Durchsetzen von $x_4 = 0$ ausgeschlossen ist. Dieses ist aber auch nie nothwendig, da beide Seiten genannter Ebene gleichberechtigt sind.

Die Kriterien des Verbindens und Trennens ergeben sich so. Die Fläche mit 3 Knoten hat eben so viele Nullen. Je nachdem man den einen oder den andern Process anwendet, werden die entsprechenden Variationen entgegengesetzte Aenderungen eingehen. Da nun ein Trennen — bei allen Knoten — auf eine V führt, welche direct in eine IV′ mit isolirtem Knoten übergeleitet werden kann, so muss jede der Variationen einer solchen Fläche, welche jetzt die Nullen zeigen, gegen die der gesuchten mit 15 Geraden einen Zeichenwechsel aufweisen. Dadurch sind wir aber in den Stand gesetzt, die Kriterien anzugeben, sobald wir nur die *Lage der isolirten Knoten kennen. Diese erfüllen aber die Kammer, welche nicht von der isolirten Kante durchsetzt wird*, wie man leicht unter Anwendung eines ähnlichen Verfahrens, wie es in § 2. benutzt wurde, findet, da sich für $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ Grössen mit gleichem Vorzeichen ergeben und Punkte mit derartigen Coordinaten nach § 1. der bezeichneten Kammer angehören.

Als für uns brauchbare Specialflächen können wir also hinstellen:

$(1,\ 1,\ 1,\ \tfrac{1}{2} + i\alpha_5,\ \tfrac{1}{2} - i\alpha_5)$ mit 3 Knoten,

$(1,\ 1,\ 1,\ \tfrac{3}{4} + i\alpha_5,\ \tfrac{3}{4} - i\alpha_5)$ mit isolirtem Knoten.

Statt der drei Nullen:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 2\alpha_4 \\ - & + & + & - \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{array}$$

der ersten Fläche, zeigen bei der zweiten dieselben Variationen negative Zeichen. (Die Null $+ + + -$ der letztern liefert den isolirten Knoten, der uns augenblicklich nicht weiter beschäftigt.) *Folglich haben die angegebenen Variationen bei den Flächen mit* 15 *Geraden positives Zeichen.* Diese Arten mögen repräsentirt sein durch:

$$(1,\ 1,\ 1,\ \varepsilon + i\alpha_5,\ \varepsilon - i\alpha_5) \cdots \varepsilon < \tfrac{1}{2}.$$

Lassen wir das negative Zeichen von α_4 fort, so giebt das folgende Schema ihre Variationen.

A	B	C
$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3$	$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3$	$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3$
1) $+ + + \cdots +$	2) $- + + \cdots +$	5) $- - + \cdots -$
	3) $+ - + \cdots +$	6) $- + - \cdots -$
	4) $+ + - \cdots +$	7) $+ - - \cdots -$ *).

Aus der Bemerkung, dass unter C nur 5) einen Zeichenwechsel aufweisen kann, der immer durch einen zweiten, 4), unter B begleitet ist, folgt mit Rücksicht auf die bereits discutirten Flächen, dass überhaupt nur *vier Zeichenwechsel* auftreten können.

Die Flächen, welche direct aus unserer II hervorgehen, zeigen offenbar nur Nullen unter B. Wir können uns dann die Null unter A, welche der Fläche mit isolirtem Knoten entspricht, erzeugen, darauf — etwa durch Vergrössern von α_4 — diese in einen Zeichenwechsel überführen und haben von nun an keinen Knoten mehr zu erwarten.

Unter unsern Arten findet sich *die Diagonalfläche* mit drei Zeichenwechseln unter B; sie ist demnach *eine V.*

Die übrigen Flächen müssen sämmtlich inverse sein, sie zeigen den Zeichenwechsel resp. die Null unter C.

Insbesondere: *Die Fläche, deren Knoten in der Diagonalebene der isolirten Pentaederkante liegen, ist stets eine* II′.

Denn aus ihrer Form:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0 + i\alpha_5, 0 - i\alpha_5) \cdots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

erkennt man das Auftreten der Nullen 4) und 5). Durch Ueberführung der erstern in einen Zeichenwechsel ergiebt sich die III′ mit Knoten, der durch den weitern 5) die IV″ folgt, womit die Reihe auch nach dieser Richtung geschlossen ist.

Es bleiben noch die *Flächen mit imaginären Knoten* zu betrachten übrig.

Eine Anzahl derselben ist unter den behandelten bereits vorhanden, nämlich alle, welche solche Knoten in $x_4 = 0$ haben; bei ihnen sind die Coefficienten der conjugirten Ebenen reell und positiv.

Um nicht zu weitläufig zu werden, betrachten wir nur eine dieser Arten, da bei allen die Untersuchung im Wesentlichen dieselbe ist. Liege vor

---

*) Dass wir hier 7 Variationen und nicht 4, der Anzahl der Kammern entsprechend, haben, liegt wesentlich darin begründet, dass zwei Knoten in $x_4 = 0$ derselben Kammer angehören, denn es zeigen 4) und 5) gleichzeitig Nullen; die Coordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ haben sämmtlich entgegengesetzte Zeichen für diese Variationen, was keinen Unterschied hinsichtlich der Kammer bewirkt.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2)$$

mit einem isolirten Knoten. Die Schreibweise

$$\big(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 0+i(i(\alpha_1+\alpha_2)), 0-i(i(\alpha_1+\alpha_2))\big)$$

lässt aber ausser diesem noch zwei imaginäre Knoten in $x_4=0$ erkennen; die Grösse α_5 ist imaginär.

Man sieht hiernach leicht die Richtigkeit des Satzes ein: *Haben die imaginären Ebenen reelle positive Coefficienten und lassen sich die Vorzeichen der α_1 α_2 α_3 so wählen, dass ihre Summe $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ verschwindet, so besitzt die Fläche zwei imaginäre Knoten in der Diagonalebene der isolirten Kante, zu denen noch so viele reelle Knoten kommen, als Coefficienten reeller Ebenen denen der imaginären gleich sind.*

Offenbar brauchen wir uns bei Feststellung der Art einer gegebenen Fläche hiernach um imaginäre Knoten nicht zu kümmern, sondern haben, sofern ihr Auftreten nicht durch complexe oder negative Coefficienten conjugirter Ebenen überhaupt ausgeschlossen ist, nachträglich die angegebene kleine Abzählung vorzunehmen. Ist dann die verlangte Bedingung erfüllt, so haben wir die Uebergangsfläche zwischen zwei allgemeinern derselben Art. —

Alle Flächen mit theilweise negativen α_1 α_2 α_3 sind entweder IV″ *oder Schläfli'sche* IV, 5 *mit zwei imaginären Knoten*, wie man durch Passiren derjenigen mit einem unendlichen Werthe einer dieser Grössen, wie im § 4., leicht findet. Bemerkt werden muss noch, dass bei festem Pentaeder auch die hierbei zu Tage tretenden Flächen mit imaginären Knoten in Unterabtheilungen gespalten werden müssen, da wir sie hier von IV″, im § 4. aber von IV′ umgeben finden, und auch unter den IV dieselben sich vorfinden.

In der folgenden Tabelle finden sich neben den Flächen mit reellen resp. ohne Singularitäten diejenigen mit imaginären in Parenthese, welche man durch continuirliche Aenderung der Coefficienten erzeugen kann, ohne den Zusammenhang zu ändern.

Fläche:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4+i\alpha_5, \alpha_4-i\alpha_5) \cdots \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \alpha_3^2,\ 2\alpha_4<0.$$

Variationen einer Fläche mit 15 reellen Geraden:

A	B	C
α_1 α_2 α_3	α_1 α_2 α_3	α_1 α_2 α_3
$+\ +\ +\cdots+$	$-\ +\ +\cdots+$	$-\ -\ +\cdots-$
	$+\ -\ +\cdots+$	
	$+\ +\ -\cdots+$	

a) Flächen mit positiven Coefficienten reeller Ebenen.

1) Flächen ohne reelle Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:
0	II
1 unter B	III (oder Schläfli'sche IV, 6)
2 „ B	IV (oder Schläfli'sche IV, 5)
1 „ B, 1 unter C	IV″
3 „ B	V (oder Schläfli'sche IV, 4)
3 „ B, 1 unter A	IV′ (oder Schläfli'sche IV, 5)

2) Flächen mit einem reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	1 unter B	II
1 unter B	1 „ B	III (oder Schläfli'sche VIII, 5)
1 „ B	1 „ C	III′
2 „ B	1 „ B	IV (oder Schläfli'sche VIII, 4)
3 „ B	1 „ A	IV′ (oder Schläfli'sche VIII, 3)

3) Flächen mit 2 reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2 unter B	II
0	1 „ B, 1 unter C	II′
1 unter B	2 „ B	III (oder Schläfli'sche XVI, 2)

4) Flächen mit 3 reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	3 unter B	II

b) Flächen mit negativen Coefficienten reeller Ebenen.

1 Coefficient negativ	IV″
2 Coefficienten negativ	IV″ (oder Schläfli'sche IV, 5).

§ 6.

Die Flächen mit zwei Paaren conjugirter Pentaederebenen.

Auch in diesem Falle giebt es noch Flächen mit 15 reellen Linien, von denen wir eine zur Ausgangsfläche wählen. Besonders eignet sich hierzu:

$$(x_2 + ix_3)^3 + (x_2 - ix_3)^3 + (x_4 + ix_5)^3 + (x_4 - ix_5)^3 = 0,$$

welche in der That der bezeichneten Art angehört. Denn die Schreibweise

$$x_2(x_2+x_3\sqrt{3})\,(x_2-x_3\sqrt{3})+x_4(x_4+x_5\sqrt{3})\,(x_4-x_5\sqrt{3})=0$$

lässt das Vorhandensein der 9 reellen Geraden

$$x_2=x_4=0,\quad x_2=x_4+x_5\sqrt{3}=0 \text{ etc.}$$

erkennen, folglich sind auch 15 reell, weil andere Flächen ohne Singularitäten mit mehr als 9 und weniger als 27 Linien nicht vorkommen.

Zur Untersuchung der allgemeinen Fläche

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{(x_2+ix_3)^3}{(\alpha_2+i\alpha_3)^2}+\frac{(x_2-ix_3)^3}{(\alpha_2-i\alpha_3)^2}+\frac{(x_4+ix_5)^3}{(\alpha_4+i\alpha_5)^2}+\frac{(x_4-ix_5)^3}{(\alpha_4-i\alpha_5)^2}=0$$

oder

$$(\alpha_1,\ \alpha_2+i\alpha_3,\ \alpha_2-i\alpha_3,\ \alpha_4+i\alpha_5,\ \alpha_4-i\alpha_5)\ \cdots\ \alpha_2^2 \leq \alpha_4^2$$

mit der Discriminante

$$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_4$$

geben wir diesmal α_1 das feste *negative* Zeichen, da diese Grösse schon ausgezeichnet ist. Dann finden wir als Vorzeichentafel unserer Ausgangsfläche $(\infty, 1, 1, 1, 1)$

	$2\alpha_2$	$+2\alpha_4$	
1)	$+$	$+$	$\cdots -$
2)	$-$	$+$	$\cdots -$
3)	$+$	$-$	$\cdots -$

Das Zeichen von 3) muss immer mit dem angegebenen übereinstimmen; folglich sind *höchstens zwei Zeichenwechsel, entsprechend derselben Anzahl von Trennungen, möglich.* Ein Zerfallen in zwei Theile ist also ausgeschlossen: *Flächen* V, *und die ihnen benachbarten* IV *und* IV′ *mit einem Knoten haben mindestens drei reelle Pentaederebenen.*

Nur zwei Diagonalebenen

$$x_2=0,\quad x_4=0,$$

jede eine der beiden isolirten Pentaederkanten enthaltend, sind reell. Sie schneiden sich jedoch in der reellen Pentaederebene und lassen daher nur Flächen mit höchstens 2 reellen Knoten zu.

Es kann aber entweder nur solche Flächen, wie sie aus einer mit 4 Knoten direct hervorgehen, oder inverse geben, da beide Diagonalebenen gleichberechtigt sind, und wir werden die letzte Art erwarten, da schon im vorigen § die Diagonalebene der isolirten Kante nur Knoten solcher enthält. Diese Vermuthung wird sich als richtig erweisen; damit aber die Untersuchung nicht unterbrochen werde, möge der Beweis später folgen*).

Das Weitere ist dem frühern Verfahren im Wesentlichen gleich und es kann auf die Tabelle verwiesen werden, welche wir am Schlusse geben. Nur die Kriterien imaginärer Knoten erleiden eine geringe

*) Vergl. § 10., p. 79.

Modification. Die Fälle unter b) der frühern Tabellen kommen in Wegfall, da der Coefficient der einzigen reellen Ebene stets positiv gedacht werden kann. Vorhanden sind imaginäre Knoten demnach nur bei positiven reellen Coefficienten conjugirter Ebenen, und zwar sobald eine oder zwei der Gleichungen

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 - 2\alpha_4 = 0$$

erfüllt sind, wie man durch Anwendung der dann noch möglichen Schreibweise der Discriminante (vergl. § 5.) leicht findet.

Die folgende Tabelle gewährt eine Uebersicht der verschiedenen Arten.

Fläche:

$$(\alpha_1, \ \alpha_2 + i\alpha_3, \ \alpha_2 - i\alpha_3, \ \alpha_4 + i\alpha_5, \ \alpha_4 - i\alpha_5) \cdots \alpha_2^2 < \alpha_4^2, \ \alpha_1 < 0.$$

Variationen einer Fläche mit 15 reellen Geraden:

	$2\alpha_2$	$2\alpha_4$	
1)	$+$	$+$	$\cdots -$
2)	$-$	$+$	$\cdots -$

1) Flächen ohne Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:
0	II
1	III (oder Schläfli'sche IV, 6, oder XVI, 3)
2	IV″ (oder Schläfli'sche IV, 5).

2) Flächen mit einem reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	1	II
1	1	III′ (oder Schläfli'sche VIII, 5).

3) Flächen mit 2 Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2	II′

§ 7.

Die Scheidung der verschiedenen Mannigfaltigkeiten der Flächen eines Pentaeders.

Durch die bisherigen Untersuchungen ist es möglich geworden, bei gegebenem Pentaeder den Raum so in einzelne Theile zu zerlegen, dass jeder Theil nur die Knoten einer und derselben Flächenart enthält. Die Grenzflächen sind die Diagonal- und Pentaederebenen. Es genügt, die Zerlegung an einer Pentaederkammer mit anschliessender Tetraederkammer zu studiren, da gleichnamige dieser Räume nicht wesentlich von einander verschieden sind.

Bezeichnen wir die, vorläufig reellen, Ebenen des Pentaeders mit 1, 2, 3, 4, 5, die Diagonalebenen, ihren Gleichungen entsprechend mit zweien dieser Zahlen, so ist auf Tafel I, Fig. 1 die Pentaederkammer, welche vom Trieder 1, 2, 3 durch die Ebenen 4, 5 abgetrennt wird, nebst den sie theilenden Diagonalebenen

14	15
24	25
34	35

und zum Theil die Tetraederkammer 1 2 3 4 zur Anschauung gebracht.

e und *d* sind Schnittpunkte dreier Diagonalebenen über Tetraederdreiecken, daher Bilder von Flächen mit vier Knoten (nach unserer früheren Interpretation). Die angrenzenden Abtheilungen sind daher Bilder solcher Flächen, wie sie direct aus jener speciellen durch „Trennen" hervorgehen. Ausser diesen Arten kennen wir noch zwei: IV′ und III′.

Wirklich giebt es ausser dem bekanntlich IV″ entsprechenden Tetraeder 1234 nur noch die gleichartigen Räume *abfh*, *bcgk*, *cail*, welche nicht von *e* und *d* zu erreichen sind und daher der Art III′ zukommen müssen.

d gehört dem aufgezeichneten Tetraeder an; wir beschränken uns bei der Untersuchung der einzelnen übrigen Räume auf diejenigen um *diesen* Punkt, da die Resultate sich später direct auf *e* übertragen lassen.

Nehmen wir einen isolirten Knoten in 1 2 3 4 mit den Coordinaten

$$+\alpha_1,\ +\alpha_2,\ +\alpha_3,\ +\alpha_4,\ -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$

und durchsetzen mit ihm die Ebene 4, aber keine Diagonalebene. Dann ist α_4 negativ geworden, aber die Grössen $\alpha_1+\alpha_4$, $\alpha_2+\alpha_4$, $\alpha_3+\alpha_4$ sind noch positiv. Als neue Coordinaten können wir daher hinstellen

$$+\alpha_1,\ +\alpha_2,\ +\alpha_3,\ -\delta,\ -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\delta),$$

wo δ eine in Bezug auf die α sehr kleine Grösse bedeuten mag. Mit Hülfe der Tabelle des § 4. findet man in dieser Fläche eine IV (mit Knoten). *Das Durchsetzen der Pentaederebene hat also auf den Knoten die Wirkung einer Aenderung durch die biplanare Form ausgeübt.* Ein jetzt vorzunehmendes Ueberschreiten einer der sich in *d* schneidenden Diagonalebenen muss aber von einem „Verbinden" begleitet sein, da nur drei solcher Ebenen vorhanden sind und eine I erst durch dreimalige Anwendung jenes Processes auf die IV hervorgeht. Je nachdem ein Knoten also jenseits einer, zweier oder dreier jener Ebenen (aber keiner andern) liegt, ist die Fläche eine III, II oder I.

Nach dieser kleinen Abzählung erkennt man dann die folgende Zerlegung des Raumes.

Flächen mit einem Knoten.

Art:	Kammern:	Anzahl der Kammern:
I	*abcde*	$10 \cdot 1 = 10$
II	*adfb*, *aehb*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
III	*bdfg*, *behk*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
III′	*abfh*, *bcgk*, etc.	$10 \cdot 3 = 30$
IV	*fgid*, *hkle*, etc.	$10 \cdot 2 = 20$
IV′	Tetraederkammern 1 2 3 4 etc.	$5 \cdot 1 = 5$
		185 getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit zwei Knoten.

Art:	Felder:	Anzahl der Felder:
I	*adb*, *aeb*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
II	*dfb*, *ehb*, etc.	$10 \cdot 12 = 120$
II′	*afb*, *ahb*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
III	*fgd*, *hke*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
		300
		$300 : 2 = 150$ getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit drei Knoten.

Art:	Strecken:	Anzahl der Strecken:
I	*ad*, *ae*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
I′	*ab*, *bc*, etc.	$10 \cdot 3 = 30$
II	*df*, *eh*, etc.	$10 \cdot 6 = 60$
		150
		$150 : 3 = 50$ getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit vier Knoten.

Art:	Punkte:	Anzahl der Punkte:
I	*e*, *d*;	$10 \cdot 2 = 20$
		$20 : 4 = 5$ Flächen.

Wir betrachten noch die Ueberführung der Arten III und III′ in einander. Nur diese sind ausser den IV′ auf Räumen abgebildet, welche theilweise von Pentaederebenen begrenzt sind. Aber die begrenzenden Theile dieser Ebenen (*fbg* etc. für eine III, *fbh* etc. für eine III′) bilden Scheidewände gegen eine benachbarte Pentaederkammer, ein Uebertritt in diese muss demnach wieder auf eine der Arten III oder III′ führen und man findet leicht durch Erweiterung der Figur, dass man, von einer beliebigen der beiden ausgehend, stets die andere erhält. Wir können daher, mit Rücksicht auf das in Bezug auf die Arten IV und IV′ Gefundene, für ein *reelles Pentaeder* den Satz hinstellen: *Liegen die Knoten zweier Flächen auf verschiedenen Seiten einer Pentaederebene und so, dass man nur diese und nicht etwa*

noch Diagonalebenen zu durchsetzen braucht, um von einem Knoten zum andern zu gelangen, so sind die Flächen stets mit Hülfe der Aenderung durch die biplanare Form in einander überführbar.

In ähnlicher Weise lässt sich die Eintheilung des Raumes bei theilweise imaginärem Pentaeder durchführen. Wir beschränken uns auf eine Mittheilung der Resultate.

Tafel I, Fig. 2 giebt eine Centralprojection des Raumes unter Annahme *dreier reellen Pentaederebenen* 1, 2, 3, von derem Schnittpunkte auf die Ebene der isolirten Kante. Diese Gerade ist unendlich fern gedacht. Wie unmittelbar zu sehen, ist auch hier noch *das Durchsetzen einer Pentaederebene der Aenderung des Knotens durch die biplanare Form äquivalent.*

Ist endlich *nur eine Ebene*, 1, *reell*, so schneiden sich diese und die beiden noch reellen Diagonalebenen 2 3 und 4 5 in einer Geraden. Tafel I, Fig. 3 zeigt die Projection des von ihnen getheilten Raumes von einem Punkt dieser Geraden auf eine beliebige Ebene, die man passend normal zur Geraden annehmen mag. *Ein Ueberschreiten der Pentaederebene ist wirkungslos*, denn keine ihrer Seiten ist vor der andern ausgezeichnet, was mit dem alleinigen Auftreten inverser Flächen harmonirt.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir noch die Aufzählung der einzelnen Abtheilungen bei, wie sie die Figuren ergeben.

Drei reelle Pentaederebenen.

Flächen mit einem Knoten.

Art:	Kammern:
II	$3 \cdot 1 = 3$
III	$3 \cdot 2 = 6$
III′	$3 \cdot 1 = 3$
IV	$3 \cdot 1 = 3$
IV′	$1 \cdot 1 = 1$

16 getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit zwei Knoten.

Art:	Felder:
II	$3 \cdot 2 = 6$
II′	$3 \cdot 2 = 6$
III	$3 \cdot 2 = 6$
	18

$18 : 2 = 9$ getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit drei Knoten.

Art:	Gerade:
II	$3 \cdot 1 = 3$

$3 : 3 = 1$ Mannigfaltigkeit.

Eine reelle Pentaederebene.

Flächen mit einem Knoten.

Art:	Kammern:
II	1
III′	2
	3 getrennte Mannigfaltigkeiten.

Flächen mit zwei Knoten.

Art:	Felder:
II′	4

4 : 2 = 2 getrennte Mannigfaltigkeiten.

Was die Eintheilung der Flächen ohne Knoten anlangt, so müssen wir bei derselben absehen von den Hülfsmitteln der Anschauung, wie wir sie bisher benutzt haben, und unsere Resultate auf combinatorischem Wege zu gewinnen suchen, welcher uns übrigens auch bei den erledigten Arten zum Ziele geführt hätte.

Ist eine Fläche gegeben, so kann man sich eine neue, derselben Art, aber einer andern Mannigfaltigkeit angehörig, bei reellem Pentaeder durch Vertauschen beliebiger Ebenen desselben erzeugen. Aber nur das Vertauschen solcher wird von Erfolg sein, deren Coefficienten nicht durch allmähliche Aenderung ihrer Grösse — inzwischen einmal gleich werdend — ihre Plätze wechseln können, ohne einen Wechsel der Art hervorzurufen.

Die übrigen Coefficienten nimmt man dann aber besser sofort als gleich an, oder geometrisch: man wählt eine Fläche, auf der sich so oft als möglich drei Gerade in einem Punkte schneiden*). In der Anzahl der dann noch möglichen Permutationen hat man diejenige der getrennten Mannigfaltigkeiten.

Sind nicht alle Ebenen reell, so sind offenbar nur reelle und imaginäre Ebenen unter sich vertauschbar und bei letztern wird weiter nur die Vertauschung zweier Paare conjugirter Ebenen etwas nützen können, da erst hiermit eine Aenderung in der Discriminante eintritt.

Diese Ueberlegungen führen zu der unten mitgetheilten Tabelle. Dieselbe enthält neben der Anzahl der Mannigfaltigkeiten noch die gewählten Repräsentantinnen der verschiedenen Arten. Zur Vermeidung der Angabe von sonst nothwendigen Ungleichungen sei durch k eine sehr kleine Grösse bezeichnet, mit welcher man aber noch all Veränderungen vornehmen kann, welche weder Nullen noch Zeichenwechsel mit sich führen.

---

*) Vergl. Eckardt a. a. O. § 3.

Reelles Pentaeder.

Art:	Getrennte Mannigfaltigkeiten:
I $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha)$	$\frac{5!}{5!} = 1$
II $\left(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \frac{3\alpha+k}{2},\ \frac{3\alpha+k}{2}\right)$	$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$
III $(\alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \beta,\ 2\alpha+k)$	$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$
IV $(\alpha,\ \beta,\ \beta,\ \beta,\ \alpha+\beta+k)$	$\frac{5!}{3!} = 20$
IV'' $(\alpha,\ \alpha,\ 2\alpha+k,\ 2\alpha+k,\ 2\alpha+k)$	$\frac{5!}{2!\,3!} = 10$
V $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ 4\alpha-k)$	$\frac{5!}{4!} = 5$
IV' $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ 4\alpha+k)$	$\frac{5!}{4!} = 5$
	81

Drei Ebenen reell.

II $\left(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \frac{\alpha-k}{2},\ \frac{\alpha-k}{2}\right)$	$\frac{3!}{3!} = 1$
III $(\alpha,\ \alpha,\ 2\alpha,\ k+i\beta,\ k-i\beta)$	$\frac{3!}{2!} = 3$
IV $\left(\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \frac{\alpha+k}{2},\ \frac{\alpha+k}{2}\right)$	$\frac{3!}{2!} = 3$
IV'' $(\alpha,\ \alpha,\ 2\alpha+k,\ 0+i\beta,\ 0-i\beta)$	$\frac{3!}{2!} = 3$
V $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha)$	$\frac{3!}{3!} = 1$
IV' $\left(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \frac{3\alpha+k}{2},\ \frac{3\alpha+k}{2}\right)$	$\frac{3!}{3!} = 1$
	12

Eine Ebene reell.

II $(\alpha,\ k,\ k,\ k,\ k)$	$\frac{2!}{2!} = 1$
III $(\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha)$	$\frac{2!}{2!} = 1$
IV'' $(k,\ k,\ k,\ \alpha,\ \alpha)$	$2! = 2$
	4

§ 8.

Ueber ein Verfahren, welches später benutzt werden wird.

Die Uebergangsflächen von denen mit reellem Pentaeder zu denen mit conjugirten Ebenen besitzen eine Doppelebene desselben.

Lässt man zwei Ebenen sich vereinigen, so ist die nächste Folge die Aufhebung der Identität $\Sigma x_i = 0$, welches Ergebniss die Unmöglichkeit unsers bisherigen Coordinatensystems mit sich führt.

Sofern man nicht auf äusserst specielle Flächen kommen will, müssen die Coefficienten der spätern consecutiven Ebenen passend bestimmt, dürfen insbesondere nie endlich gewählt werden, da in diesem Falle die Fläche, welche sich auf vier Cuben reduciren lässt, hervorgeht, welche, wie sich zeigen wird, bei weitem nicht die allgemeinste Art ist.

Wir betrachten die folgende Aufgabe, welche die von uns zu lösende als speciellen Fall in sich schliesst. Es liege vor die Function

$$F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3) \cdots + \alpha_n f(x_n),$$

in der die α constante Grössen bedeuten, f eine Function sei, welche sich nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln lässt. Wie heisst die allgemeinste Function F_n, welche entsteht, wenn alle Variabeln x_i sich einander unbegrenzt nähern?

Es seien zunächst zwei Functionen f vorhanden:

$$F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Dann machen wir behufs Vereinigung von x_1 und x_2 die Transformation

$$x_2 = x_1 + \delta y_1,$$

wo y_1 eine willkürliche Variabele vorstellt, δ als gegen die Null convergirend anzusehen ist; und entwickeln nach Potenzen von δ:

$$F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 \big(f(x_1) + \delta f'(x_1) y_1 + \frac{\delta^2}{2!} f''(x_1) y_1^2 + \cdots\big)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) f(x_1) + \alpha_2 \delta f'(x_1) y_1 + \frac{\alpha_2 \delta^2}{2!} f''(x_1) y_1^2 + \cdots.$$

Nun kann man α_1 und α_2 immer derartig wählen — unendlich werden lassen —, dass sowohl $\alpha_1 + \alpha_2$ als auch $\alpha_2 \delta$ endlich wird. Aber alle weitern Glieder der Entwickelung werden unendlich klein. Man erhält also als gesuchte Function

$$F_2 = a_1 f(x_1) + a_2 f'(x_1) y_1,$$

worin a_1 und a_2 irgend wie gewählt werden können, dann aber als Constanten zu betrachten sind, während y_1 eine Variabele ist.

Seien jetzt drei Functionen f gegeben. Dann führt die Transformation

$$x_3 = x_1 + \delta_1 y_2$$

— unter δ_1 eine andere ebenfalls unendlich klein werdende Grösse verstanden — zu keinem allgemeinern Resultate, sofern man y_2 willkürlich annimmt. Verläuft aber diese Grösse der Variabeln y_1 beim Grenzübergange unendlich nahe, so lässt sich eine Verallgemeinerung erzielen. Wir setzen dem entsprechend:

$$F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_1 + \delta y_1) + \alpha_3 f\big(x_1 + \delta_1 (y_1 + \delta_2 y_2)\big)$$

und entwickeln wie vorhin:

$$\begin{aligned} F = {} & \alpha_1 f(x_1) \\ & + \alpha_2\Big(f(x_1) + \delta f'(x_1) y_1 + \frac{\delta^2}{2!} f''(x_1) y_1{}^2 + \cdots\Big) \\ & + \alpha_3\Big(f(x_1) + \delta_1 f'(x_1)(y_1 + \delta_2 y_2) + \frac{\delta_1{}^2}{2!} f'(x_1)(y_1 + \delta_2 y_2)^2 + \cdots\Big) \\ = {} & f(x_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + f'(x_1)\Big(y_1(\alpha_2 \delta + \alpha_3 \delta_1) + \alpha_3 \delta_1 \delta_2 y_2\Big) \\ & + \frac{f''(x_1)}{2!}\Big(y_1{}^2(\alpha_2 \delta^2 + \alpha_3 \delta_1{}^2) + 2 y_1 y_2 \cdot \alpha_3 \delta_1{}^2 \cdot \delta_2 + y_2{}^2 \cdot \alpha_3 \delta_1{}^2 \delta_2{}^2\Big) + \cdots. \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt die α unendlich von der zweiten Ordnung, die δ wie sonst von der ersten, so werden alle Coefficienten der Producte und Potenzen der y unendlich klein, in denen mehr als zwei Factoren δ auftreten. Die übrigen bestehen aus endlichen Summanden, oder solchen, welche von derselben Ordnung unendlich werden. Aber auch die Summen letzterer kann man sich endlich denken, da die Grössen α und δ durchaus keinen weitern Bedingungen als den hieraus entspringenden unterworfen sind, namentlich nicht als Functionen definirt sind.

Die entspringende Function ist daher

$$F_3 = a_1 f(x_1) + (a_2 y_1 + a_3 y_2) f'(x_1) + a_4 y_1{}^2 f''(x_1).$$

Zur Bildung von F_4 hätte man analog zu setzen:

$$\begin{aligned} F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_1 + \delta y_1) + \alpha_3 f\Big(x_1 + \delta_1(y_1 + \delta_2 y_2)\Big) & \\ + \alpha_4 f\Big(x_1 + \delta_3\Big(y_1 + \delta_4(y_2 + \delta_5 y_3)\Big)\Big), & \end{aligned}$$

die α unendlich der dritten Ordnung zu nehmen und in der Entwickelung alle Glieder mit mehr als $3 = 4 - 1$ Factoren δ auszuscheiden — da diese verschwinden — und so fort bei beliebig vielen Functionen.

Heben wir noch hervor, dass die Summe der Zeiger aller y, welche in einem Product auftreten, stets mit der Anzahl der δ desselben übereinstimmt, so können wir die Regel hinstellen:

Die allgemeinste Function, welche durch Gleichwerden aller Variabeln x aus

$$F = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n(x_n)$$

entsteht, ist

$$F_n = f(x_1) + f'(x_1) \Sigma y_i + f''(x_1) \Sigma y_i y_k + f'''(x_1) \Sigma y_i y_k y_l + \cdots$$
$$i \leq k \leq l \cdots,$$

in der die y vollkommen willkürliche Variabeln sind und die Summation so auszuführen ist, dass

$$i + k + l + \cdots \gtreqless n - 1$$

ist.

Es sind der Einfachheit wegen die Coefficienten weggelassen, da man sie in den Variabeln aufgehen lassen kann.

Sollen nicht *alle* Variabeln einander gleich werden, so hat man nach der angegebenen Regel für die verlangte Anzahl die Function zu bilden und ihr noch die unbetheiligten Functionen f hinzuzufügen.

§ 9.

Die Flächen mit mehrfachen Pentaederebenen im Allgemeinen.

Die Gleichung einer auf ihr Pentaeder bezogenen Fläche dritter Ordnung hat die Form der Function F des vorigen Paragraphen, der Null gleich gesetzt.

Mittels des angegebenen Satzes sind wir daher im Stande, die Gleichungen von Flächen, deren Pentaeder unendlich nahe Ebenen besitzt, hinzuschreiben, wenn wir $f(x)$ ersetzen durch x^3.

Abgesehen von der Realität der Elemente sind dann die folgenden Fälle zu unterscheiden:

Pentaeder:	Gleichung der Fläche:
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ 2x_4$	$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + dx_4^3 + ex_4^2y_1 = 0,$
$x_1,\ 2x_2,\ 2x_3$	$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_2^2y_1 + dx_3^3 + ex_3^2z_1 = 0,$
$x_1,\ x_2,\ 3x_3$	$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + dx_3^2(y_1 + y_2) + ex_3y_1^2 = 0,$
$3x_1,\ 2x_2$	$ax_1^3 + bx_1^2(y_1 + y_2) + cx_1y_1^2 + dx_2^3 + ex_2^2z_1 = 0,$
$4x_1,\ x_2$	$ax_1^3 + bx_1^2(y_1 + y_2 + y_3) + cx_1(y_1^2 + y_1y_2) + dy_1^3 + ex_2^3 = 0,$
$5x_1$	$ax_1^3 + bx_1^2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + cx_1(y_1^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2^2) + dy_1^3 + ey_1^2y_2 = 0.$

In diesen Gleichungen bedeuten die y und z, der Null gleich gesetzt, Ebenen, die ganz willkürlich angenommen werden können. Sie sind aber nicht, wie die des Pentaeders, eindeutig bestimmt, sobald die Gleichung einer Fläche vorliegt. So z. B. wird $y_1 = 0$, ihrer Einführung durch die Gleichung $x_2 = x_1 + \delta y_1$ (vergl. den vorigen §) zufolge, immer durch eine Kante des Pentaeders gehen, nämlich durch die Schnittlinie der consecutiven Ebenen, aber im Uebrigen wird man sie beliebig verändern können. Z. B. kann man in der ersten Gleichung die Substitution

$$y_1 = x_4 + \lambda y_1$$

stets durch Aenderung von d und e wirkungslos machen. Aehnliches gilt auch für die andern hinzukommenden Ebenen.

Gewisse Lagen derselben wird es jedoch geben, für welche die Gleichungen eine besonders einfache Gestalt annehmen. Deren Aufsuchung macht aber die Betrachtung der einzelnen Arten nothwendig, zu der wir uns jetzt wenden.

§ 10.

Die Flächen mit einer Doppelebene des Pentaeders.

Durch die vier getrennt erscheinenden Ebenen ist ein Coordinatentetraeder gegeben. Setzen wir also in der abgeleiteten Gleichung:

$$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + dx_4^3 + ex_4^2y_1 = 0,$$

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$

so geht diese über in:

$$a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + (d + e a_4) x_4^3 + e x_4^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0,$$

welche sich durch geeignete Wahl der in den x implicite auftretenden Constanten auf die Form

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} - \delta x_4^3 - 3 \frac{x_4^2}{\alpha_4^2} (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

bringen lässt, in der x_1, x_2, x_3 *die einfachen Ebenen* sind, x_4 *die Doppelebene* ist.

Das Verschwinden der *Discriminante*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \tfrac{1}{2} \delta \alpha_4^3$$

ruft den Knoten

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4$$

hervor, dessen Coordinaten demnach nur für die drei ersten und des letzten Gliedes der Gleichung reell sein können.

Die Grösse δ ist für die Coordinaten also einflusslos; man hätte sie auch der Einheit gleichmachen können. Da aber dann die speciellen Flächen mit $\delta = 0$ ausgeschlossen wären, so musste von dieser Vereinfachung abgesehen werden.

Stellen wir jetzt die Beziehung der Ebene

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

zum Pentaeder fest. Wie bereits im vorigen § bemerkt wurde, muss ihre Schnittlinie mit $x_4 = 0$ eine Kante desselben und sie selbst, da sie die Ecke der einfachen Ebenen enthält, eine Diagonalebene sein. Um das besser einzusehen und gleich die Frage zu erledigen, ob noch alle Elemente des Pentaeders vollkommen bestimmt sind, bilden wir nach einer von Clebsch a. a. O. angegebenen Methode das Product der 10 Ecken in Ebenencoordinaten $u_1 \, u_2 \, u_3 \, u_4$:

$$u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot u_3^2 \cdot u_4 (u_1 - u_2)(u_2 - u_3)(u_3 - u_1) = 0$$

Hiermit ist die aufgeworfene Frage bejahend beantwortet, wir finden eine Configuration der Ecken, wie sie die Anschauung erwarten liess: *Die Schnittpunkte der einfachen Ebenen mit der Doppelebene zählen als Ecken doppelt. Zu diesen kommen in der nämlichen Ebene noch drei einfache Ecken auf der Linie* $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, *was mit der Eigenschaft von* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ *als Diagonalebene im Einklange steht. Mit der Ecke der einfachen Ebenen haben wir die Gesammtzahl aller:*

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 10^{*}).$$

*) Es ist nicht uninteressant, ausgehend von der gefundenen Gleichung der Fläche, das Pentaeder aufzusuchen, welches ohne Schwierigkeit mit Hülfe einiger von Herrn Gordan a. a. O. gegebenen Formeln geschehen kann.

Sei

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots = 0$$

die symbolische Darstellung der Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, von derem Pentaeder drei Ecken ξ, η, ζ auf einer Kante gegeben seien. Dann sind die drei Ebenen durch die conjugirte Ecke nach § 16, III jener Arbeit:

$$a_\xi a_\eta a_x = 0, \quad a_\eta a_\zeta a_x = 0, \quad a_\zeta a_\xi a_x = 0.$$

Auf Tafel II, Fig. 1 ist ein Pentaeder mit zwei sehr nahen Ebenen zur Anschauung gebracht; die später consecutiv werdenden Punkte sind von geschlossenen Curven umgeben.

Die Fläche besitzt im Allgemeinen keine Singularitäten und auch ihre Geraden zeigen keine Besonderheiten in ihrer Lage*). Die Diagonalebenen — ausser $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ —, welche nicht mit der Doppelebene vereinigt liegen, nämlich

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0,$$

geben aber die Möglichkeit zum Auftreten dreier reellen Knoten, sofern wir x_1, x_2, x_3 als *reell* voraussetzen, was zunächst geschehen soll.

Da Flächen mit 27 reellen Geraden und ihre Grenzflächen mit reellen Knoten stets ein allgemeines Pentaeder voraussetzen, so kann unsere *Fläche mit drei Knoten* nur *eine* II sein.

Die Form der Discriminante gestattet uns, das frühere bei der Ableitung der verschiedenen Arten angewendete Verfahren auch jetzt anzuwenden.

Nehmen wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, δ *positiv*, α_4 *reell*, so haben wir die Fälle reeller oder theilweise imaginärer $\alpha_{1,2,3}$ zu unterscheiden.

Seien 1) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ *reell* und so geordnet, dass $\alpha_1^2 \leqq \alpha_2^2 \leqq \alpha_3^2$.

Analog dem Verfahren des § 5. betrachten wir die Flächen:

Nennt man diese 1_x, 2_x, 3_x, so ist weiter nach § 16, II mit leicht erklärlicher Bezeichnung das Product der übrigen:

$$a_x b_x (ab\ 12)(ab\ 13) = 0$$

oder, in nicht symbolischer Form, die geränderte Hesse'sche Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 1_1 & 3_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & 1_2 & 3_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 1_3 & 3_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 1_4 & 3_4 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 0 & 0 \\ 2_1 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nimmt man nun als Ecken $\xi\ \eta\ \zeta$ auf einer Geraden die Punkte $u_1 - u_2 = 0$, $u_2 - u_3 = 0$, $u_3 - u_4$, so geben die mitgetheilten Formeln zunächst die drei Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

und dann mit deren Hülfe für die beiden übrigen

$$x_4^2 = 0,$$

womit das von uns aufgestellte Pentaeder als der Fläche eindeutig zugeordnet nachgewiesen ist. In ähnlicher Weise kann man für die übrigen Arten das Pentaeder bestimmen.

*) Herr Eckardt findet (a. a. O. § 6.) irrthümlich auf diesen Flächen einen uniplanaren Punkt, welches daher rührt, dass die drei einfachen Ebenen und die Doppelebene als durch einen Punkt gehend angenommen werden, indem die Identität $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ als erfüllt angesehen wird. Dann trifft allerdings die angegebene Specialisirung zu. (Vergl. §§ 19., 20. der vorliegenden Arbeit.)

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_4^3-3x_4^2(x_1+x_2+x_3)=0$ mit drei Knoten,
$x_1^3+x_2^3+x_3^3-6x_4^3-3x_4^2(x_1+x_2+x_3)=0$ mit isolirtem Knoten.

Dass der Knoten (1, 1, 1, 1) letzterer Fläche wirklich isolirt ist, erkennt man leicht durch Bildung seines Tangentenkegels, aber auch, wenn man bemerkt, dass er in der Kammer der Ebenen x_1, x_2, $x_3=0$ liegt, welche von der Kante der consecutiven Ebenen $(x_4=x_1+x_2+x_3=0)$ nicht durchsetzt wird und dieser Kammer offenbar diejenige solcher Knoten der angrenzenden Flächen mit drei reellen und zwei conjugirten Pentaederebenen entspricht.

Indem wir nun alle möglichen Variationen des Ausdrucks

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\tfrac{1}{2}\delta\alpha_4^3$$

aufstellen, finden wir in

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_4^2(x_1+x_2+x_3)=0$$

eine Fläche mit 15 Geraden; die hierauf bezügliche Untersuchung, sowie die Ableitung weiterer Flächen geschieht in der nämlichen Weise wie in § 5., so dass wir uns auf die tabellarische Zusammenstellung (s. den Schluss dieses §) beschränken können.

Hervorgehoben mag noch werden, dass die ausgezeichnete Diagonalebene $x_1+x_2+x_3=0$ die Knoten der inversen Flächen mit zwei Knoten enthält, was zu erwarten war, da bewiesenermassen nach der Ueberführung der Doppelebene in zwei imaginäre Ebenen die erwähnte Art der entsprechenden Diagonalebene angehört. —

Zu den Flächen mit *imaginären* $\alpha_{1,2,3}$ kann man gelangen durch Ueberschreitung der Fläche

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^3}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^3}-\delta x_4^3-3\frac{x_4^2}{\alpha_4^2}(x_1+x_2+x_3)=0,$$

für welche α_3 unendlich ist und welche daher einer Fläche mit imaginären α_3 benachbart erscheint.

Die angeführte Gleichung lässt aber den uniplanaren Punkt $x_1=x_2=x_4=0$ erkennen, welche diese Fläche für uns unbrauchbar macht*).

Es lässt sich dieselbe aber umgehen durch die Annahme $\alpha_4=\infty$, welche eine Fläche IV′ ohne Knoten hervorruft (§ 2.), auf welche aber die Vorzeichen der α^2 ganz ohne Einfluss sind. Folglich sind auch die *Flächen mit einem oder zweien imaginären* $\alpha_{1,2,3}$ IV′, da ein nachheriges Endlichwerden von α_4 nie einen reellen Knoten erzeugen kann.

---

*) Solchen Flächen werden wir noch bei andern Pentaedern unter Voraussetzung specieller Coefficienten begegnen; wir werden später zeigen (§ 19.), wie diese Specialformen aus einer allgemeinen sich ableiten lassen.

Sind insbesondere zwei der imaginären α einander gleich, so hat man die Schläfli'sche IV, 5 mit zwei imaginären Knoten, sofern die Discriminante durch Wahl der übrigen Vorzeichen zum Verschwinden gebracht werden kann. Gepaart können reelle und imaginäre Knoten demnach nicht auftreten.

Wir gehen über zu den Flächen mit zwei conjugirten Ebenen:

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{(x_2 + i x_3)^3}{(\alpha_2 + i \alpha_3)^2} + \frac{(x_2 - i x_3)^3}{(\alpha_2 - i x_3)^2} - \delta x_4^3 - 3 \frac{x_4^2}{\alpha_4^2} (x_1 + 2 x_2) = 0$$

mit der Discriminante

$$\alpha_1 + 2 \alpha_2 + \tfrac{1}{2} \delta \alpha_4^3 = 0.$$

Die beiden reellen Diagonalebenen

$$x_2 = 0, \quad x_1 + 2 x_2 = 0$$

ermöglichen das Auftreten von Flächen mit zwei reellen Knoten, nicht mit dreien, da ihre Schnittlinie in $x_1 = 0$ liegt.

Man kann folgendermassen nachweisen, dass solche Flächen immer II' sind.

Es mögen die Knoten zunächst in der Diagonalebene der isolirten Kante: $x_2 = 0$ liegen. Die Flächen mit zwei conjugirten Ebenen eines allgemeinen Pentaeders, deren Knoten in der entsprechenden Diagonalebene liegen, sind *immer* von der angegebenen Art (§ 5.). Daher sind es auch die unserigen, da man zwei der reellen Ebenen beliebig nahe bringen kann, ohne die Fläche zu zerstören. Denken wir uns ferner, bei derselben Fläche, zur Erledigung des zweiten Falles die Doppelebene durch eine unendlich kleine Aenderung der Constanten in zwei conjugirte Ebenen übergeführt (was allerdings nicht unter Beibehaltung unserer Gleichungsform möglich ist). Dadurch tritt kein Knoten auf, denn beim jetzigen Pentaeder mit zwei Paaren conjugirter Ebenen können nach § 6. nicht mehr als zwei reelle Knoten vorhanden sein.

Einem solchen Pentaeder kommt aber nur *eine* Art mit zwei Knoten zu (§ 6.), *diese muss also auch eine* II' *sein, welches Resultat wir daselbst vorausnahmen.*

Aber damit ist dasselbe für den Fall zweier Knoten in $x_1 + 2x_2 = 0$ bewiesen, da wir den Uebergang zu zwei conjugirten Ebenen ebenso gut bei einer solchen Fläche hätten bewirken können.

Durch den Process des Trennens werden wir demnach auf Flächen IV'', durch den des Verbindens auf II geführt.

Erstere Art entspringt wirklich bei der Annahme $\alpha_4 = \infty$. Nimmt man α_1 *negativ*, so lauten ihre Variationen, oder besser, die Variationen einer andern IV'' mit endlichem α_4

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\delta\alpha_4^3 & 2\alpha_2 & \\ + & + \cdots & + \\ + & - \cdots & + \\ - & + \cdots & - \end{array}$$

und zwar muss eine der beiden letzten in allen Fällen negativ sein. Durch Wachsenlassen von α_1 kann man drei negative Zeichen herstellen. Beim Passiren der aufgetretenen Nullen *verbanden* sich aber nothwendiger Weise Theile, da hierin die einzige Möglichkeit zur Erzeugung der II liegt, welche Art doch vorkommt und somit auch erhalten ist. Das Weitere bedarf keiner Erläuterung.

Für $\alpha_1 = \infty$ tritt freilich ein uniplanarer Punkt auf, aber diese Grenzfläche brauchen wir nie zu erreichen.

Flächen mit zwei *imaginären* Knoten kommen unter den eben betrachteten vor, wenn die Coefficienten der conjugirten Ebenen reell und positiv sind (vergl. §§ 5., 6.) und

$$\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\delta\alpha_4^3 = 0$$

ist. Auch auf diesen können nie reelle Knoten auftreten, wie es vorhin bei drei reellen Pentaederebenen erkannt wurde.

Ist endlich α_1 *imaginär*, so kann nie ein Knoten auftreten und die Betrachtung der Fläche mit $\alpha_4 = \infty$ zeigt, dass jene wie letztere *immer eine* IV″ ist. —

Tabelle I.

$x_1\ x_2\ x_3$ *reell.*

$$\text{Fläche: } \frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} + \delta x_4^3 - \frac{3x_4^2}{\alpha_4^2}(x_1+x_2+x_3) = 0,$$

$$\alpha_1^2 \leqq \alpha_2^2 \leqq \alpha_3^2, \quad \tfrac{1}{2}\delta\alpha_4^3 < 0, \quad \delta > 0.$$

Variationen einer Fläche mit 15 reellen Geraden.

A	B	C
$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$	$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$	$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$
$+ + + \cdots +$	$- + + \cdots +$	$- - + \cdots -$
	$+ - + \cdots +$	
	$+ + - \cdots +$	

a) Flächen mit positiven Coefficienten reeller Ebenen.

1) Flächen ohne reelle Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:
0	II
1 unter B	III
2 „ B	IV
1 „ B, 1 unter C	IV″
3 „ B	V
3 „ B, 1 „ A	IV′

2) Flächen mit einem reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	1 unter B	II
1 unter B	1 „ B	III
1 „ B	1 „ C	III′
2 „ B	1 „ B	IV
3 „ B	1 „ A	IV′

3) Flächen mit zwei reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2 unter B	II
0	1 „ B, 1 unter C	II′
1 unter B	2 „ B	III

4) Flächen mit drei reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	3 unter B	II

b) Flächen mit negativen Coefficienten einfacher Ebenen.

1 Coefficient negativ IV′

2 Coefficienten negativ IV′ (oder Schläfli'sche IV, 5).

Tabelle II.

Nur x_1 reell.

$$\text{Fläche:}\ \frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{(x_2+ix_3)^3}{(\alpha_2+i\alpha_3)^2}+\frac{(x_2-ix_3)^3}{(\alpha_2-i\alpha_3)^2}-\delta\,\alpha_4^3-3\,\frac{x_4^2}{\alpha_4^2}\,(x_1+2x_2)=0,$$

$$\alpha_1<0.$$

Variationen einer Fläche mit 15 reellen Geraden.

$2\alpha_2$	$\frac{1}{2}\delta\,\alpha_4^3$	
$+$	$+\cdots$	$-$
$+$	$-\cdots$	$-$
$-$	$+\cdots$	$-$

1) Flächen ohne reelle Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:
0	II
1	III (oder Schläfli'sche IV, 6)
2	IV″ (oder Schläfli'sche IV, 5).

2) Flächen mit einem reellen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	1	II
1	1	III′

3) Flächen mit zwei Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2	II′

§ 11.

Die Flächen mit zwei Doppelebenen des Pentaeders.

Nehmen wir $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ zu den Doppelebenen, $x_3 = 0$ zur einfachen, so geht die in § 7. gefundene Gleichung über in

$$a x_1^3 + x_1^2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)$$
$$+ b x_2^3 + x_2^2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4) + c x_3^3 = 0.$$

Da diese die Form

$$x_4(a_4 x_1^2 + b_4 x_2^2) + f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

hat, *so besitzt die Fläche einen biplanaren Knoten im Schnittpunkte der Doppelebenen mit der einfachen und die Ebenen des Knotens*

$$\sqrt{a_4}\, x_1 + \sqrt{b_4}\, x_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{a_4}\, x_1 - \sqrt{b_4}\, x_2 = 0$$

*sind harmonisch zu den Doppelebenen**). Aber die Axe des Knotens — der Durchschnitt seiner Ebenen — liegt nicht auf der Fläche, wir haben die niedrigste Art eines solchen Punktes, einen B_3, so genannt, weil die Classe einer Fläche durch sein Auftreten um drei Einheiten erniedrigt wird**). Die vorliegenden Flächen sind Schläfli'sche III und zwar die allgemeinsten.

Es verdient wohl bemerkt zu werden, dass conische Knoten nie von Einfluss auf das Pentaeder sind, während biplanare ganz specielle Pentaeder voraussetzen, aber unter Zugrundelegung dieser völlig unabhängig von der Wahl der Constanten auftreten.

Ehe wir zur Unterscheidung der verschiedenen Arten schreiten, sei an die Vertheilung der Geraden auf unsern Flächen erinnert***). Jede Ebene des biplanaren Punktes schneidet die Fläche in drei sich in ihm kreuzenden Geraden (Strahlen), von denen bei reellen Ebenen mindestens in jeder einer reell ist. Sind alle Strahlen reell, so hat die Fläche überhaupt nur reelle Linien. Ein Zusammenrücken zweier Strahlen bewirkt das Auftreten eines conischen Knotens und ein darauf folgendes Imaginärwerden eine Trennung der ihn umgrenzenden Partieen der Fläche. Rücken alle drei Strahlen zusammen, so entsteht ein weiterer B_3, deren höchstens drei auftreten können†). Bei imaginären Ebenen kann durch den Knoten nie ein reeller Strahl gehen und etwaige conische Knoten sind daher stets conjugirt. —

*) Vergl. meine Dissertation § 6.

**) In gleicher Weise möge stets die Zahl der Einheiten, um welche irgend eine höhere Singularität die Classe erniedrigt, dem bezeichnenden Buchstaben als Zeiger angehängt werden.

***) Vergl. Schläfli a. a. O., Klein a. a. O. § 3., oder Salmon-Fiedler Raumgeometrie II, Art. 267.

†) Solche Flächen verlangen jedoch eine weitere Specialisirung des Pentaeders. Vergl. die §§ 12. und 17. dieser Arbeit.

Für das Folgende ist zu unterscheiden, ob die Doppelebenen reell oder conjugirt sind. (Den Uebergang durch eine vierfache Ebene behandeln wir im nächsten §.)

Bei *reellen* x_1 *und* x_2 geben wir der Gleichung die Gestalt:

$$\gamma x_1^3 + \delta x_2^3 + 3\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}(x_3+x_4) + 3\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}(x_3-x_4) - 2\frac{x_3^3}{\alpha_3^2} = 0,$$

$$\gamma, \delta > 0.$$

Das Product der Knoten

$$u_4^4(u_3+u_4)^2(u_3-u_4)^2 \cdot u_1 u_2 = 0$$

zeigt die Vereinigung von 4 *Ecken im biplanaren Punkte*, ferner giebt es *zwei doppeltzählende auf der Axe und zwei einfache in der einfachen Pentaederebene*: $4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$. Wir haben eine Gruppirung, wie die Anschauung sie direct ergiebt. (Tafel II, Fig. 2.)

Es ist wichtig, die Ebenen

$$x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_3 - x_4 = 0$$

als, noch übrige, *Diagonalebenen* der einfachen Ecken zu erkennen, denn sie lassen die Möglichkeit von Flächen mit zwei conischen Knoten einsehen.

Der biplanare Punkt ist selbstverständlich bei der Aufstellung der Bedingung für einen Knoten auszuschliessen; thun wir dieses, so ergiebt sich als solche

$$\gamma\alpha_1^3 + \delta\alpha_2^3 + 4\alpha_3 = 0$$

für den conischen Knoten

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\alpha_1^3 + \delta\alpha_2^3.$$

Um bei einer speciellen Fläche leicht die Realitätsverhältnisse der Geraden übersehen zu können, nehmen wir für den Augenblick die Ebenen des Knotens zu Coordinatenebenen und setzen:

$$x_1' = \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} \qquad\qquad x_1 = \alpha_1\frac{x_1' + x_2'}{2}$$
$$\text{oder}$$
$$x_2' = \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} \qquad\qquad x_2 = \alpha_2\frac{x_1' - x_2'}{2}.$$

Dann erscheint die Form:

$$\gamma\alpha_1^3(x_1'+x_2')^3 + \delta\alpha_2^3(x_1'-x_2')^3 + 6(x_1'^2+x_2'^2)x_3$$
$$+ 12x_1'x_2'x_4 - 16\frac{x_3^3}{\alpha_3^2} = 0.$$

Unter der Voraussetzung *reeller* α findet sich in der Fläche mit $\gamma = \delta = 0$:

$$6x_1'x_2'x_4 + 3(x_1'^2+x_2'^2)x_3 - 8\frac{x_3^3}{\alpha_3^2} = 0,$$

eine Schläfli'sche III, 1, denn jede der Ebenen $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ schneidet in drei reellen Strahlen.

Die Ableitung der übrigen Arten aus dieser geschieht wie sonst durch Erzeugung von conischen Knoten und darauf folgendes Trennen

der angrenzenden Partien, resp. Erhaltung beliebig vieler Knoten. Tabelle I, a) enthält die nach diesem Princip gewonnenen Resultate.

Die Flächen mit theilweise imaginären α sind leicht erledigt.

Ist eine der Grössen α_1 und α_2 imaginär, so haben wir conjugirte Ebenen des Knotens, Schläfli'sche III, 4; ein ausserdem imaginäres α_3 giebt dieselbe Fläche, auf der aber bei geeigneten Werthen der übrigen Constanten zwei imaginäre Knoten auftreten können. (Tabelle I, b)*).

Sind endlich α_1 und α_2 imaginär oder, was dasselbe ist, ist bei reellen α_1 und α_2 α_3 imaginär, so erhält man stets in jeder der jetzt reellen Ebenen des Knotens einen reellen Strahl, wie die Specialfläche $\gamma = \delta = 0$ zeigt. Denn eine Aenderung kann nicht eintreten der Unmöglichkeit reeller Knoten wegen. (Tabelle I, c.)

Seien jetzt *die Doppelebenen conjugirt.* Dann sind es auch die Diagonalebenen, und zwei reelle Knoten können nicht auftreten. Da ferner die Coefficienten α_1 und α_2 conjugirt sein müssen und so die Möglichkeit eines einzigen reellen wegfällt, so lassen wir beide in x_1 und x_2 aufgehen, da sonst die Criterien der verschiedenen Arten minder einfach werden würden, und geben der Gleichung die Form:

$$(\gamma + i\delta)(x_1 + ix_2)^3 + (\gamma - i\delta)(x_1 - ix_2)^3 + 3(x_1 + ix_2)^2(x_3 + ix_4)$$
$$+ 3(x_1 - ix_2)^2 \cdot (x_3 - ix_4) - 2\frac{x_4^3}{\alpha_3^2} = 0.$$

Von Ecken bleibt nur reell der vierfach zählende biplanare Punkt, wie das abgeleitete Product für die jetzigen Elemente ergiebt.

Die Ebenen jenes Knotens sind

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

folglich stets reell, wodurch auch imaginäre conische Knoten ausgeschlossen sind. *Bei conjugirten Doppelebenen des Pentaeders sind die Ebenen des biplanaren Knotens reell und es treten nie zwei conische Knoten auf.*

Da höchstens in *einer* Ebene des B_3 drei reelle Strahlen liegen können, so bewirkt ein Durchgang durch einen Knoten die Ueberführung dieser Arten in solche, welche in jeder Ebene nur einen reellen Strahl aufweisen.

Die Bedingung für das Auftreten eines Knotens hat die Form

$$\gamma + 2\alpha_3 = 0$$

angenommen. Seine Coordinaten sind:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \alpha_3, \quad x_4 = \gamma.$$

---

*) Die Uebergangsflächen mit $\alpha_2 = \infty$ zeigen einen uniplanaren Punkt und diejenigen mit $\alpha_3 = \infty$ sind Regelflächen. Vergl. für die erstern § 19., für die letztern § 18.

Es kann also nur eine Veränderung in $x_2 = 0$ beim Passiren des Knotens vor sich gehen, und $x_1 = 0$ enthält demnach immer nur *einen* reellen Strahl.

Da nun *bei reellem* α_3 auf der Fläche mit $\gamma = 0$ sich in $x_2 = 0$ drei reelle Strahlen vorfinden, so haben alle Flächen, bei deren Ableitung aus dieser sich ein Knoten nothwendig macht, in derselben Ebene (also in jeder) nur einen reellen Strahl. (Tabelle II, a). Zur letztern Art gehören auch alle mit *imaginärem* α_3, wie dasselbe Beispiel zeigt, da der zur Abänderung nothwendige Knoten nicht auftritt. (Tabelle II, b.)

Tabelle I.

Reelle Doppelebenen.

Fläche: $\gamma x_1^3 + \delta x_2^3 + \frac{3 x_1^2}{\alpha_1^2}(x_3 + x_4) + \frac{3 x_2^2}{\alpha_2^2}(x_3 - x_4) - 2\frac{x_3^3}{\alpha_3^2} = 0,$

$$\gamma, \delta > 0.$$

a) $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ positiv.

$$\gamma\alpha_1^3 \lessgtr \delta\alpha_2^3, \quad \alpha_3 < 0.$$

Variationen von $\gamma\alpha_1^3 + \delta\alpha_2^3 + 4\,\alpha_3$ einer Fläche mit lauter reellen Geraden:

$$\begin{array}{cc} \gamma\alpha_1^3 & \delta\alpha_2^3 \\ + & + \cdots - \\ - & + \cdots - \end{array}$$

1) Flächen ohne reelle conische Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Art:
0	In jeder Ebene drei reelle Strahlen (Schläfli'sche III, 1)
1	„ einer „ „ „ „ („ III, 2)
2	„ keiner „ „ „ „ („ III, 3)

2) Flächen mit einem conischen Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art: In der unbetheiligten Ebene liegen
0	1	drei reelle Strahlen (Schläfli'sche VI, 1)
1	1	ein reeller Strahl (Schläfli'sche VI, 2)

3) Flächen mit zwei Knoten.

Anzahl der Zeichenwechsel:	Nullen:	Art:
0	2	Alles reell (Schläfli'sche XIII, 1).

b) α_1^2 oder α_2^2 negativ, α_3^2 positiv.

Die Ebenen des B_3 sind conjugirt. Schläfli'sche III, 4 (oder XIII, 2 mit 2 imaginären Knoten).

c) α_3^2 negativ, oder α_1^2 und α_2^2 negativ.

Schläfli'sche III, 3.

Tabelle II.

Conjugirte Doppelebenen.

$$\text{Fläche: } (\gamma+i\delta)(x_1+ix_2)^3+(\gamma-i\delta)(x_1-ix_2)^3 \\ +3(x_1+ix_2)^2(x_3+ix_4) \\ +3(x_1-ix_2)^2(x_3-ix_4)-2\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}=0.$$

a) α_3^2 positiv.

Die Fläche ist, wenn dem absoluten Werthe nach $\gamma \lesseqgtr 2\alpha_3$, eine

$$\text{Schläfli'sche}\left\{\begin{array}{l}\text{III}, 2\\ \text{VI}, 2\\ \text{III}, 3.\end{array}\right.$$

b) α_3^2 negativ.

Schläfli'sche III, 3.

§ 12.

Die Flächen mit vierfacher Pentaederebene.

Sie bilden den Uebergang zwischen den Flächen mit reellen Doppelebenen einerseits und conjugirten andererseits, und werden daher ebenfalls einen biplanaren Punkt aufweisen. Daher erscheint es gerechtfertigt, dieselben vor denen mit dreifacher Ebene zu betrachten, wenn auch letztere allgemeinerer Natur sind.

Behält man in der abgeleiteten Gleichung

$$ax_1^3+bx_1^2(y_1+y_2+y_3)+cx_1(y_1^2+y_1y_2)+dy_1^3+ex_2^3=0$$

die vierfache Ebene $x_1=0$ und die einfache $x_2=0$ als Coordinatenebenen bei, setzt vorläufig

$$y_1+y_2+y_3=x_4,\quad y_1=x_3,\quad y_1+x_2=a_1x_2+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4,$$

so lässt die entspringende Form

$$ax_1^3+bx_1^2x_4+cx_1x_3(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)+dx_3^3+ex_2^3=0$$

schon den $B_3: 0, 0, 0, 1$ erkennen, dessen Ebenen sind:

$$x_1=0,\quad bx_1+ca_4x_3=0.$$

Folglich ist die vierfache Ebene eine Ebene des stets auftretenden B_3, wie zu erwarten war, da im allgemeinen Falle die Ebenen eines solchen Punktes zu den Doppelebenen des Pentaeders harmonisch sind.

Nimmt man die andere: $b_1x_1+ca_4x_3=0$ zu $x_3=0$, so kann man durch passende Veränderung von x_4 die Gleichung zu

$$\beta x_1^3-\frac{3x_1^2x_2}{\alpha_1^2}+6x_1x_3x_4+x_2^3+px_3^3=0$$

vereinfachen.

Flächen, bei denen eins der drei letzten Glieder fehlt, sind entweder Kegel oder haben einen uniplanaren Punkt oder zwei biplanare.

Nur bei der letztern, für welche $p = 0$ ist, sind noch die Ebenen des Pentaeders bestimmt, wenn auch, wie sich zeigen wird, die Ecken in gewisser Weise willkürlich sind.

Die Fläche mit $\alpha_1 = \infty$ hat einen osculirenden Kegel, dessen Berührungscurve in $x_2 = 0$ liegt. Für das Folgende ist es wichtig, in ihr eine Schläfli'sche III, 3 zu erkennen, jede Ebene des Knotens enthält einen reellen Strahl.

Für die allgemeine Fläche der vorliegenden Gattung findet man als *Product der Pentaederecken*

$$u_4^6 \cdot u_2^4 = 0;$$

ausser dem *sechsfach zählenden* B_3 findet sich noch *ein vierfacher auf der Axe:* $1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 10$.

Die Vermuthung, dass eine allgemeinere Lage der Ecken (z. B. 10 einfache in der vierfachen Ebene, welche Anordnung sich offenbar herstellen lässt) zu allgemeineren Flächen führen müsse, erweist sich als irrig mit Rücksicht auf den Gang der Entwickelung in § 8. Es ist auch folgendermassen einzusehen, dass jedes andere Eckensystem zu gewissen Unbestimmtheiten führen würde. Bekanntlich ist jeder Ecke eine Kante als Doppelgerade ihrer zerfallenden Polare zugeordnet, was jedenfalls bei völliger Bestimmtheit aller Elemente des Pentaeders voraussetzt, dass die einander entsprechenden auch gleich oft zählen. Bei obiger fingirter Annahme 10 einfacher Ecken erhalten wir aber (wie stets) die vierfache Schnittlinie der beiden getrennt erscheinenden Pentaederebenen (der einfachen und der vierfachen), wodurch ein eindeutiges Entsprechen unmöglich gemacht ist. Aehnliche Unzuträglichkeiten ergeben sich bei allen andern Annahmen mit Ausnahme der gefundenen Configuration. Denn bei dieser ist, wie die Polarenbildung zeigt, dem vierfachen Punkte die erwähnte vierfache Linie und dem sechsfachen die sechsfache Linie der consecutiven Ebenen, die Axe des Knotens, zugeordnet. —

Diagonalebenen giebt es nicht mehr, es kann demnach höchstens *ein conischer Knoten* auftreten.

Ein solcher ist vorhanden, wenn

$$\beta\alpha_1^3 - 2 = 0,$$

und hat als Coordinaten

$$\alpha_1, 1, 0, 0.$$

Die Classification geschieht jetzt durch Zugrundelegen der Fläche mit $\beta = 0$, welche bei *reellem* α_1 von $x_3 = 0$ in drei reellen Strahlen getroffen wird. Da in $x_1 = 0$ stets nur ein reeller Strahl vorhanden ist, so bewirkt ein Passiren des Knotens den Uebergang von Schläfli'schen III, 2 zu III, 3 (Tabelle I).

Die Flächen mit *imaginärem* α_1 sind sämmtlich Schläfli'sche III, 3, wie die am Anfange dieses § betrachtete Uebergangsfläche mit $\alpha_1 = \infty$.

Wir gehen über zu den *Flächen mit zwei biplanaren Knoten* ($p = 0$):

$$\beta x_1^3 - \frac{3\,x_1^2 x_2}{\alpha_1^2} + 6\,x_1 x_3 x_4 + x_2^3 = 0,$$

deren B_3 sind: 0, 0, 0, 1 und 0, 0, 1, 0.

Dass ein Auftreten zweier solcher Punkte stets eine vierfache Pentaederebene mit sich führt und daher eine jede derartige Fläche durch eine Gleichung unserer Form dargestellt werden kann, liegt darin begründet, dass die Axe eines biplanaren Knotens immer mit der Schnittlinie zweier Doppelebenen zusammenfällt, welche Bedingung eben nur durch ihre weitere Vereinigung zur vierfachen erfüllt sein kann. Flächen mit drei B_3 können kein bestimmtes Pentaeder mehr haben.

Die Ecken sind aber schon bei den vorliegenden unbestimmt, denn ihr Product, nach der angegebenen Methode gebildet, verschwindet identisch.

In der That sind auch die Gleichungen, welche durch Nullsetzen der Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} \beta x_1 - \frac{x_2}{\alpha_1^2} & -\frac{x_1}{\alpha_1^2} & x_4 & x_3 \\ -\frac{x_1}{\alpha_1^2} & x_2 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

entstehen, für einen beliebigen Punkt der Geraden

$$x_1 = x_2 = 0$$

erfüllt. *Alle Punkte der Schnittlinie der beiden getrennt erscheinenden Pentaederebenen haben die Eigenschaft der ehemaligen Pentaederecken.* Ausser diesen findet sich noch als völlig bestimmte Ecke der Schnitt der beiden Axen: 0, 1, 0, 0.

Die Lage der Kanten (wir gebrauchen jetzt noch wie auch in Zukunft beim Auftreten unbestimmter Elemente die alten Namen) erschliessen wir durch Polarenbildung.

Als Polaren eines Punktes 0, 0, y_3, y_4 der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ (Tafel II, Fig. 4) erhält man das Ebenenpaar

$$x_1(y_3 x_4 + y_4 x_3) = 0.$$

Deren Doppelgerade, die conjugirte Kante jenes Punktes, enthält die noch bestimmte Ecke. Alle jene Linien bilden daher ein Büschel in der vierfachen Ebene mit letztgenanntem Punkte als Centrum. Auf jeder Kante liegt ausser dem Centrum also noch eine Ecke der Geraden $x_1 = x_2 = 0$; für die fixirte Kante ist diese 0, 0, y_3, $-y_4$. Diese Punkte und die Pole bilden folglich eine Involution, deren Doppel-

punkte die B_3 sind, so dass allemal die conjugirte Kante eines solchen Punktes ihn selbst enthält, wie es im Falle eines einzigen ist. Die ausgezeichnete Ecke hat die Polare

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1} + x_2\right)\left(\frac{x_1}{\alpha_1} - x_2\right) = 0,$$

d. h. ihre conjugirte Kante enthält die variabeln Ecken.

Nur wenn $\alpha_1 = \infty$, wird letztere Kante ganz unbestimmt; die Fläche hat einen osculirenden Kegel, wie bereits bemerkt wurde*). —

Was die Flächen selbst anlangt, so bleibt die Bedingung für das Auftreten eines conischen Knotens $\beta\alpha_1^3 - 2 = 0$ unverändert, aber bei der Eintheilung haben wir die Fälle reeller oder conjugirter B_3 zu trennen.

Bei *reellen* B_3 ist die Untersuchung durchaus nicht von der frühern verschieden, wir können auf Tabelle II, a) verweisen.

Bei *conjugirten* B_3 treten an Stelle von x_3 und x_4 resp. $x_3 + ix_4$ und $x_3 - ix_4$; die Gleichung hat die Form:

$$\beta x_1^3 - \frac{3\,x_1^2 x_2}{\alpha_1^2} + 3\,x_1\,(x_3^2 + x_4^2) + x_2^3 = 0.$$

Der mögliche conische Knoten kann jetzt isolirt sein. Das Auftreten von zwei Arten von Flächen mit Knoten rührt daher, dass zwei im Zeichen von β verschiedene Flächen nicht mehr in einander transformirt werden können. Man erkennt auch sofort durch Bildung des Tangentenkegels im Knoten:

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1} + x_2\right)^2 + \alpha_1\,(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

dass derselbe nur reell, wenn α_1 negativ und in Folge der Bedingung für sein Auftreten auch β negativ ist. Folglich: Bei positivem β erhält man Flächen mit isolirtem (Schläfli'sche XVII, 2), bei negativem β Flächen mit nicht isolirtem Knoten (Schläfli'sche XVII, 3).

Hinsichtlich der weitern Eintheilung heben wir hervor, dass die reelle Gerade der conjugirten Ebenen der beiden Knoten: $x_3 = x_4 = 0$ die Fläche in drei Punkten schneidet, in welchen sich die drei (imaginären) Geradenpaare begegnen, welche in jenen Ebenen liegen. Diese Geradenpaare bestimmen die drei dreifachen Tangentenebenen, welche ausser $x_1 = 0$ noch durch die Verbindungslinie der Knoten ($x_1 = x_2 = 0$) gehen und deren Realitätsverhältnisse die Art der Fläche bedingen**). Die Frage nach letzterer ist also auf die einfachere nach der Zahl der reellen jener Punkte zurückgeführt.

Sei zunächst α_1 *reell*; dann finden wir bei der Fläche $\beta = 0$ nach dem eben Gesagten drei reelle Ebenen. Ein wachsendes β kann einen

*) Vergl. die Anmerkung auf der folgenden Seite, sowie § 17.

**) Vergl. Schläfli a. a. O. IX.

isolirten, ein abnehmendes einen nicht isolirten Knoten erzeugen, woraus zu entnehmen, dass die vorliegende, sowie alle zwischen den beiden mit Knoten behafteten Flächen aus zwei Theilen bestehen. Bei weiterer Aenderung verschwindet der Knoten, wenn β positiv, im andern Falle werden Theile verbunden.

Während nun derartig erzeugte Flächen ohne jede Singularität und bestimmtem Pentaeder bei Erhaltung desselben (IV′ und IV) nicht in einander übergeführt werden konnten, ohne Dazwischentreten von Knoten, ist dieses bei den unserigen möglich, wie wir gleich sehen werden.

Ein Uebergang durch $\alpha_1 = \infty$ zu *imaginärem* α_1 ändert die Art nicht, alle Flächen sind IX, 4, denn nie tritt ein reeller Knoten auf. Eben bei diesen Flächen können wir daher β beliebig variiren lassen, ohne neue Arten herbeizuführen, womit dann die vorhin behauptete Möglichkeit der Ueberleitung solcher Flächen in einander constatirt ist, die sich im Vorzeichen von β unterscheiden und aus einem Theile bestehen. Damit kommt dann aber auch die Unterscheidung der allgemeinen Flächen IV′ und IV in Wegfall, sofern man das Pentaeder unbeachtet lässt, da man imaginäre Singularitäten stets umgehen kann*). —

Tabelle I.

Alle Elemente des Pentaeders bestimmt. Ein B_3.

Fläche: $\beta x_1^3 - \frac{3x_1^2 x_2}{\alpha_1^2} + 6x_1x_3x_4 + x_2^3 + px_3^3 = 0.$

1) α_1^2 positiv.

$$x_3 \text{ enthält} \left\{\begin{array}{ll} \text{3 reelle Strahlen (Schläfli'sche} & \text{III, 2),} \\ \text{1 reellen Knoten (} \quad \text{„} & \text{VI, 2),} \\ \text{1 reellen Strahl (} \quad \text{„} & \text{III, 3),} \end{array}\right\} \text{wenn } \beta\alpha_1^3 - 2 \lesseqgtr 0.$$

2) α_1^2 negativ.

Schläfli'sche III, 3.

---

*) Es mag gestattet sein, hier einige metrische Betrachtungen einzuflechten. Nimmt man bei den Flächen mit zwei conjugirten B_3 $x_2 = 0$ parallel mit $x_1 = 0$, indem man setzt $x_2 = x_1 - h$, nimmt ferner x_1, x_3, x_4 als Ebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so erkennt man in

$$\beta x_1^3 - \frac{3x_1^2(x_1 - h)}{\alpha_1^2} + 3x_1(x_3^2 + x_4^2) + (x_1 - h)^3 = 0$$

die Gleichung einer Fläche, welche durch Rotation einer symmetrischen Curve dritter Ordnung um ihre Symmetrieaxe $x_3 = x_4 = 0$ entstanden ist. Die B_3 liegen auf der unendlich fernen Geraden von $x_1 = 0$ und werden bestimmt durch alle Kreise, welche der Parallelbüschel zu dieser Ebene aus der Fläche ausschneidet. Folglich: *Jede Rotationsfläche dritter Ordnung hat die imaginären Kreispunkte ihrer Asymptotenebene zu* B_3, Dieser Satz ist umkehrbar.

Schneiden sich nun bei der erzeugenden Curve die drei reellen Wendetangenten in einem Punkte (der natürlich auf der Rotationsaxe liegt), so geht von

Tabelle II.

Ecken und Kanten theilweise unbestimmt. Zwei B_3.

a) Reelle B_3.

Fläche: $\beta x_1^3 - \frac{3 x_1^2 x_2}{\alpha_1^2} + 6 x_1 x_3 x_4 + x_2^3 = 0$.

1) α_1^2 positiv.

Die Ebenen x_3 und x_4 enthalten jede

$$\left.\begin{array}{lll} \text{drei reelle Strahlen} & (\text{Schläfli'sche} & \text{IX}, 1), \\ \text{einen Knoten} & (\quad\text{"} & \text{XVII}, 1), \\ \text{einen reellen Strahl} & (\quad\text{"} & \text{IX}, 2), \end{array}\right\} \text{wenn } \beta\alpha_1^3 - 2 \lesseqgtr 0.$$

2) α_1^2 negativ.

Schläfli'sche IX, 2.

b) Conjugirte B_3.

Fläche: $\beta x_1^3 - \frac{3 x_1^2 x_2}{\alpha_1^2} + 3 x_1 (x_3^2 + x_4^2) + x_2^3 = 0$.

1) α_1^2 positiv.

Bedeutet $\beta \alpha_1^3$ den absoluten Werth dieser Grösse, so erhält man, wenn $\beta \alpha_1^3 - 2 \gtreqless 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{eine dreifache Ebene durch } x_1 = x_2 = 0 & (\text{Schläfli'sche IX}, 4), \\ \text{einen} \left\{\begin{array}{l} \text{isolirten} \\ \text{nicht isolirten Knoten,} \end{array}\right\} \text{wenn } \beta \gtrless 0 & \left\{\begin{array}{l} (\quad\text{"}\quad \text{XVII}, 2), \\ (\quad\text{"}\quad \text{XVII}, 3), \end{array}\right. \\ \text{drei dreifache Ebenen durch } x_1 = x_2 = 0 & (\quad\text{"}\quad \text{IX}, 3). \end{array}$$

2) α_1^2 negativ.

Schläfli'sche IX, 4.

§ 13.

Die Flächen mit dreifacher Pentaederebene.

Nimmt man zur Vereinfachung ihrer Gleichung

$$a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + d x_3^2 (y_1 + y_2) + e x_3 y_1^2 = 0$$

unter Beibehaltung von $x_3 = 0$ als dreifache und x_1, $x_2 = 0$ als einfache Ebenen, als solche des Coordinatensystems

$$y_1 = x_4,$$
$$y_2 = x_1 + x_2 - x_4,$$

so entsteht die Form:

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \gamma x_3^3 - 3 \frac{x_3^2 (x_1 + x_2)}{\alpha_3^2} - 3 x_3 x_4^2 = 0 \cdot \cdot \cdot \alpha_1 \leqq \alpha_2,$$

---

diesem ein osculirender Kegel an die Fläche, dessen Berührungscurve aus einem Kreise, in $x_1 = h$, und der unendlich fernen Geraden besteht. Wir haben den Fall $\alpha_1 = \infty$.

in der wir α_3^2 stets als positiv voraussetzen können, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Wie im vorigen § ergiebt *das Product der Ecken*

$$u_4^3 \cdot u_2^3 \cdot u_1^3 (u_1 - u_2) = 0,$$

für diese verhältnissmässig speciellere Lagen, als eine willkürliche Näherung dreier Ebenen bedingt. Die consecutiven Ebenen bestimmen für sich drei ebensolche Gerade ($x_3 = x_4 = 0$) und die einfache Ecke ($u_1 - u_2 = 0$). Der letztern entspricht die Kante der einfachen Ebenen. Die beiden dreifachen Punkte u_4^3 und u_2^3 sind demnach Durchschnitte der dreifachen Geraden mit letztgenannten Ebenen, während deren Kante den Punkt u_1^3 auf der dreifachen Ebene verzeichnet. Auf Tafel II, Fig. 5 sind diese Verhältnisse zur Anschauung gebracht. —

Die Ebene $x_1 + x_2 = 0$ ist hiernach als einzige *Diagonalebene* gekennzeichnet, es giebt daher Flächen mit zwei Knoten.

Aber *im Allgemeinen haben die vorliegenden Flächen keine Singularitäten.* Wir bemerken aber, dass der Durchschnitt mit der dreifachen Ebene $x_3 = 0$: $\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} = 0$ aus drei sich in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ treffenden Geraden besteht. Folglich: *Die dreifache Ebene enthält stets drei Gerade der Fläche, welche sich im Schnittpunkte jener mit den beiden einfachen Ebenen treffen. Je nachdem die letztern reell oder conjugirt sind, erhält man eine oder drei reelle der bezeichneten Linien.*

Das Verschwinden des Ausdrucks

$$-\tfrac{1}{2}\gamma\alpha_3^3 + \alpha_1 + \alpha_2$$

deutet den Knoten

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0$$

an. Als zur Eintheilung verwerthbare Specialflächen erweisen sich die Arten mit $\alpha_3 = \infty$:

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \gamma x_3^3 - 3\,x_3 x_4^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung erscheint nach Reduction der binären cubischen Form $\gamma x_3^3 - 3\,x_3 x_4^2$ auf zwei Cuben als Summe von vieren. Die beiden letzten sind nun reell oder conjugirt, je nachdem $\gamma \lesseqgtr 0$, und wir haben also (vergl. §§ 2., 5., 6.), wenn:

a) x_1	und	x_2 reell	und	$\gamma < 0$	eine	IV′,
b) x_1	„	x_2 „	„	$\gamma > 0$	„	IV″,
c) x_1	„	x_2 conjugirt	„	$\gamma < 0$	„	IV″,
d) x_1	„	x_2 „	„	$\gamma > 0$	„	II.

Wir haben noch die frühere Bezeichnung beibehalten, obgleich für die unserigen Gleichungsformen in gewissen Fällen die Unterscheidung der verschiedenen Arten IV wegfällt.

Die Fläche $\gamma = 0$ besitzt die Eigenthümlichkeit, dass sie nie *einen* Knoten haben kann, sondern bei der Gleichheit der Grössen α_1 und α_2 sofort zwei auftreten. Eine beliebige Aenderung von γ muss also bei constanten α_1 und α_2 aus letzterer Fläche eine andere ohne Knoten erzeugen und *zwar muss die Auflösung der Knoten bei beiden die nämliche gewesen sein*, da keiner ausgezeichnet ist. Wir werden dieses Resultat bald verwerthen.

Zur Erzeugung von reellen Knoten sind, bei *reellen Ebenen* x_1 *und* x_2, auch *reelle* α_1 *und* α_2 erforderlich, welche wir zunächst voraussetzen.

Bei diesen Flächen ist die Ableitung der verschiedenen Arten nicht so einfach wie sonst, da es uns an einer Fläche fehlt, die genügend viele reelle Linien besitzt, um Aenderungen durch die biplanare Form an einem erzeugten Knoten ohne Einfluss zu lassen. Uns stehen bis jetzt nur Arten IV′ und IV″ zu Gebote. Unter Zugrundelegung eines allgemeinen Pentaeders könnten wir mit Sicherheit, von diesen Flächen ausgehend, beim ersten Erscheinen eines Knotens auf eine IV′ resp. III′ schliessen. Bei dem vorliegenden Pentaeder bedarf dieser Schluss einer Bestätigung. Sehr einfach ist diese bei der IV′, da ein imaginärer Kegel des Knotens die Fläche völlig charakterisirt. Ein solcher Kegel findet sich wirklich, wie man durch eine leichte Rechnung findet, bei der Fläche mit

$$-\tfrac{1}{2}\gamma\alpha_3^3 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \cdots\cdots \gamma < 0,$$

welche durch Endlichwerden von α_3 aus der unter a) angeführten IV′ entsteht. Setzen wir insbesondere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so geht diese Art auch aus der Fläche mit zwei Knoten: $\gamma = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ durch Uebergehen von γ ins Negative hervor; wodurch letztere als III charakterisirt wird. Diese Aenderung von γ bewirkt also an den beiden Knoten zunächst ein Trennen und dann ein Zusammenziehen des paaren Theils der jetzigen V zum isolirten Knoten. Nach einer oben gemachten Bemerkung muss daher ein Positivwerden von γ ein Verbinden von Flächentheilen mit sich führen: die zunächst entstehenden Flächen sind III. Der bei weiterm Wachsen von γ noch auftretende Knoten, wenn

$$-\tfrac{1}{2}\gamma \cdot \alpha_3^3 + 2\alpha = 0,$$

gehört jetzt nothwendig einer III′ an, da diese Fläche ersichtlich nicht direct aus der III mit zwei Knoten durch Auflösung eines derselben hervorgehen kann, andererseits aber auch nicht von einem grössern Zusammenhange ist, da ein Verschwinden des Knotens, hervorgerufen durch Wachsen von α_3, zu einer Fläche führt, welche für $\alpha_3 = \infty$ auf continuirliche Weise in die IV″ unter b) übergeleitet ist.

Die Untersuchung der Flächen mit beliebigem α_1 und α_2 ist von nun an leicht, da die begrenzenden Gebiete der Flächen mit Knoten

gefunden sind. Wir verweisen des Nähern wegen auf Tabelle I. am Schlusse.

Bisher hatte die Aufstellung von Unterarten der IV also noch Sinn; sind jedoch *beliebig viele der Grössen* α_1 *und* α_2 *imaginär*, so ist der Unterschied verschwunden. Denn an den Specialflächen a) und b) hat sich offenbar gar nichts geändert und auch ein endliches α_3 kann nie eine Abänderung der Art bewirken, da reelle Knoten unmöglich sind, wir können insbesondere γ ungestört von positiven zu negativen Werthen führen und so die IV′ in eine IV″ verwandeln, womit dann die Gleichartigkeit dieser Flächen ausgesprochen ist. Ist bei gleichen α_1 und α_2, $\gamma = 0$, so hat man die Fläche mit imaginären Knoten.

Bei *conjugirten* x_1 *und* x_2 ist durch die unter d) gefundene Fläche II ein günstiges Ausgangselement gegeben. Die auftretenden Flächen mit zwei Knoten sind II′, da eine geringe Deformation der dreifachen Ebene in drei getrennte nur die angegebene Art als möglich erscheinen lässt. (§§ 5., 6.) Die Flächen mit einem Knoten sind daher II oder III′ und das alleinige Auftreten letzterer von Arten III überhaupt beweist, dass die Bezeichnung der durch Trennen aus ihnen hervorgehenden Fläche ohne Knoten mit IV″ noch Berechtigung hat. Imaginäre Knoten können wie sonst auftreten, sobald die conjugirten Ebenen reelle positive Coefficienten haben.

Tabelle I.

Reelle einfache Ebenen.

Fläche: $\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \gamma x_3^3 - 3\,\frac{x_3^2(x_1+x_2)}{\alpha_3^2} - 3x_3x_4^2 = 0 \cdots \alpha_1 \leqq \alpha_2.$

a) α_1^2 und α_2^2 positiv.

$$\gamma \geqq 0.$$

Variationen einer III: $\frac{-\gamma\alpha_3^3}{2} \begin{cases} +\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \cdots \mathrm{A} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \cdots - \cdots \mathrm{B}. \end{cases}$

1) Flächen ohne Knoten.

Zeichenwechsel:	Art:
0	III
1 unter B	IV
1 „ A	IV″

2) Flächen mit einem Knoten.

Null unter B	III
„ „ A	III′

3) Flächen mit zwei Knoten.

2 Nullen	III

$$\gamma < 0.$$

Sei mit $\frac{\gamma \alpha_3^2}{2}$ der absolute Betrag dieser Grösse bezeichnet.

$$\frac{1}{2}\gamma\alpha_3^3 \begin{cases} +\alpha_1 - \alpha_2 < 0 & \text{IV} \\ +\alpha_1 - \alpha_2 = 0 & \text{IV mit einem Knoten.} \\ +\alpha_1 - \alpha_2 > 0 & \text{V} \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 & \text{IV}' \text{ mit einem Knoten.} \\ -\alpha_1 - \alpha_2 > 0 & \text{IV}'. \end{cases} \qquad \text{Art:}$$

b) Eine oder beide der Grössen α_1^2 und α_2^2 negativ.

Alle Arten sind IV, aber die Eintheilung in Unterarten fällt fort.

$\gamma = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$ liefert die Uebergangsflächen: Schläfli'sche IV, 5.

Tabelle II.

Conjugirte einfache Ebenen.

Fläche: $\frac{(x_1+ix_2)^3}{(\alpha_1+i\alpha_2)^2} + \frac{(x_1-ix_2)^3}{(\alpha_1-i\alpha_2)^2} + \gamma x_3^3 - 6\frac{x_3^2 x_1}{\alpha_3^2} - 3x_3x_4^2 = 0.$

$$\gamma \geqq 0.$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\alpha_3^3 + 2\alpha_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0 \begin{cases} \text{II} \\ \text{II mit Knoten; wenn } \gamma = 0 \text{ II}' \text{ mit zwei Knoten.} \\ \text{III (oder Schläfli'sche IV, 6).} \end{cases}$$

$$\gamma < 0.$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\alpha_3^3 - 2\alpha_1 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \begin{cases} \text{IV}'' \\ \text{III}' \text{ mit Knoten.} \\ \text{III} \end{cases}$$

§ 14.

Die Flächen mit einer dreifachen und einer Doppelpentaederebene.

Aus der gefundenen Gleichung

$$ax_1^3 + bx_1^2(y_1+y_2) + cx_1y_1^2 + dx_2^3 + ex_2^2z_1 = 0$$

leiten wir die einfachere

$$3x_4\left(\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2}\right) + \gamma x_1^3 + \delta x_2^3 - 3x_1x_3^2 = 0,$$

in der $x_1 = 0$ die dreifache, $x_2 = 0$ die Doppelebene des Pentaeders ist. *Die Constante* δ wollen wir *stets positiv* wählen.

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist ein biplanarer Punkt mit den Ebenen

$$\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} = 0, \quad \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} = 0,$$

aber die Axe ($x_1 = x_2 = 0$) gehört jetzt der Fläche an, der Knoten ist ein B_4. Da ferner $x_1 = 0$ die Fläche längs der Axe berührt, so können wir den Satz hinstellen: *Die Fläche besitzt einen B_4, dessen Ebenen harmonisch zur dreifachen und Doppelebene des Pentaeders sind; die dreifache Ebene ist die Tangentenebene längs der Axe.*

Die Flächen sind die allgemeinsten mit der auftretenden Singularität. Während bei einem B_3 noch verschiedene Pentaeder möglich sind, bedingt ein B_4 stets eins der vorliegenden Art, da durch drei Elemente eines harmonischen Büschels (die Ebenen des Knotens und die Tangentenebene) stets das vierte eindeutig bestimmt ist.

Das Product der Ecken

$$u_4^6 \cdot u_3^3 \cdot u_2 = 0$$

giebt den B_4 als sechsfach zählend (die beiden dreifachen bei der vorigen Fläche haben sich durch das Zusammenrücken der damals getrennten Ebenen vereinigt). Die übrigen Ecken sind geblieben. Eine Diagonalebene: $x_4 = 0$, ist noch vorhanden, ein Zeichen, dass noch *zwei conische Knoten* auftreten können.

Die Fläche hat einen Knoten

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ 0, \ -\gamma\alpha_1^3 + \delta\alpha_2^3,$$

wenn

$$\gamma\alpha_1^3 + \delta\alpha_2^3 = 0.$$

Die weitere Untersuchung vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Fälle reeller und conjugirter Ebenen des Knotens trennt. Dann können die α der Einheit gleich gesetzt werden, da sie nie unendlich werden dürfen. Mit dieser Erleichterung können wir dann unsere Flächen darstellen durch die Gleichungen

$$3x_4^2(x_1^2 \mp x_2^2) + \gamma_1^3 + \delta x_2^3 - 3x_1x_3^2 = 0,$$

wo das obere Zeichen reelle, das untere conjugirte Ebenen des Knotens bedingt.

Aus der angegebenen Bedingung für den Knoten ist jedoch zu ersehen, dass ein solcher nur im ersten Falle reell sein kann, im zweiten existirt nur eine Art, da nie ein Uebergang zu einer andern stattfinden kann.

Bemerken wir, dass auf der Specialfläche $\delta = 0$, $\gamma > 0$ stets die beiden Linien reell sind, welche in jeder Ebene des Knotens ausser der Axe noch liegen, d. h. überhaupt alle Geraden reell sind, so finden sich leicht die Resultate, wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Tabelle I.

Reelle Ebenen des Knotens.

$$3x_4(x_1^2-x_2^2)+\gamma x_1^3+\delta x_2^3-3x_1x_3^2=0 \cdots \delta \geqq 0.$$

$$\gamma \geqq 0.$$

$$\gamma \gtreqless \delta \begin{cases} \text{Alles reell} & \text{Schläfli'sche V, 1,} \\ \text{In } x_1+x_2=0 \text{ ein Knoten} & \text{„ X, 1, für } \gamma=0 \text{ zwei Knoten XVIII, 1,} \\ \text{Nur in } x_1-x_2=0 \text{ zwei reelle Strahlen} & \text{„ V, 2.} \end{cases}$$

$$\gamma < 0.$$

Wenn dem absoluten Werthe nach

$$\gamma \lesseqgtr \delta, \text{ erhält man} \begin{cases} \text{Schläfli'sche V, 2,} \\ \text{„ X, 2,} \\ \text{„ V, 3.} \end{cases}$$

Tabelle II.

Conjugirte Ebenen des Knotens.

$$3x_4(x_1^2+x_2^2)+\gamma x_1^3+\delta x_2^3-3x_1x_3^2=0.$$

Schläfli'sche V, 4 (oder XVIII, 2 mit zwei conjugirten Knoten).

§ 15.

Die Flächen mit fünffacher Pentaederebene.

Bringt man die abgeleitete Gleichung

$$ax_1^3+bx_1^2(y_1+y_2+y_3+y_4)+cx_1(y_1^2+y_1y_2+y_1y_3+y_2^2)$$
$$+dy_1^3+ey_1^2y_2=0$$

auf die Form

$$ax_1^3+x_1^2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)+cx_1(x_2^2+x_2x_3+x_2x_4+x_3^2)$$
$$+dx_2^3+ex_2^2x_3=0,$$

so erkennt man den biplanaren Knoten $x_1=x_2=x_3=0$ mit den Ebenen $x_1=0$, $a_4x_1+cx_2=0$: *Die Fläche hat einen B_5, die fünffache Pentaederebene ist diejenige Ebene des Knotens, welche längs der Axe berührt.*

Durch das Zusammenfallen der beiden im vorigen § noch getrennt erscheinenden mehrfachen Pentaederebenen hat sich auch eine Ebene des Knotens mit jenen vereinigt, was als directe Folge der harmonischen Lage erklärlich ist.

Das Product der Ecken

$$u_4^{10}=0$$

liefert *den B_5 als zehnfach zählend* und das Fehlen einer Diagonalebene

beweist, dass höchstens ein Knoten auftreten kann. Die Gleichung der Fläche lässt sich reduciren auf

$$x_1 x_2 x_4 + 3 x_1 x_3^2 + 3 x_2^2 x_3 - a x_1^3 = 0,$$

welche für $a = 0$ den als noch möglich hingestellten Knoten in der Ebene $x_2 = 0$ enthalten zeigt, durch dessen verschiedenartige Auflösung die Arten der Tabelle I. hervorgehen. —

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn in der ursprünglichen Gleichung $e = 0$ ist. Dann ist die Beseitigung des Gliedes x_2^3 nicht mehr möglich und die einfachste Form ist

$$x_1 x_2 x_4 + 3 x_1 x_3^2 + 3 x_2^3 - a x_1^3 = 0.$$

Der biplanare Punkt ist jetzt ein B_6, die Pentaederebene osculirt. Das Product der Ecken verschwindet identisch. Man erhält auch für einen beliebigen Punkt der Axe

$$0,\ 0,\ y_3,\ y_4$$

als Polare das Ebenenpaar

$$x_1(x_3 y_3 + x_2 y_4) = 0.$$

Alle den Punkten jener Reihe entsprechenden Kanten bilden demnach einen ihr projectivischen Büschel, dessen Centrum der Knotenpunkt ist. Hiernach ist die Fläche (vergl. § 12.) aus der mit $2 B_3$ durch Zusammenrücken letzterer abzuleiten, wobei dann auch deren Axen sich zur Axe des B_6 vereinigen.

Die Untersuchung der Fläche selbst ist wie die der vorigen. Wir verweisen auf die Tabelle, welche übrigens nur eine Reproduction der Schläfli'schen ist.

Tabelle I.

Alle Ecken bestimmt: Flächen mit einem B_5.

In der nicht berührenden Ebene, je nachdem

$$a \gtreqless 0 \begin{cases} \text{zwei reelle Strahlen} & (\text{Schläfli'sche VII, 1}), \\ \text{ein Knoten} & (\quad \text{"} \quad \text{XIV}), \\ \text{zwei imaginäre Strahlen} & (\quad \text{"} \quad \text{XVII, 2}). \end{cases}$$

Tabelle II.

Die Ecken theilweise unbestimmt: Flächen mit einem B_6.

Das Verhalten der nicht osculirenden Ebene ist wie in Tabelle I. Die Fläche ist, wenn

$$a \gtreqless 0 \begin{cases} \text{Schläfli'sche XI, 1}, \\ \quad \text{"} \quad \text{XIX}, \\ \quad \text{"} \quad \text{XI, 2}. \end{cases}$$

§ 16.

Die Flächen mit unbestimmten Pentaedern.

Es erübrigt noch die Flächen zu betrachten, bei denen nicht allein einige Ecken, sondern auch Ebenen unbestimmt sind. Conische Knoten, ein B_3 oder zwei B_3, sowie die übrigen Arten biplanarer Knoten geben hierzu im Allgemeinen noch keine Veranlassung. Aber wie wir schon wissen, giebt es andererseits Flächen ohne Singularitäten, welche eine ganz unbestimmte Pentaederebene haben; nämlich diejenigen, welche sich auf 4 Cuben reduciren lassen. Wir werden diese Arten unter den etwas allgemeinern finden, deren Pentaeder aus vier sich in einem Punkte treffenden Ebenen und einer beliebigen fünften besteht, wo dann erstere vier gewisse Unbestimmtheiten zeigen.

Ausser diesen sind zu untersuchen die Flächen mit uniplanarem Punkte und die Regelflächen. Erstere treten unter speciellen Annahmen von Coefficienten überall auf, sobald das Pentaeder mindestens eine mehrfache Ebene hat, wie sich leicht an den Gleichungen dieser Flächen ersehen lässt und wir überdies bei einigen Pentaedern erkannt haben, wo sich diese Flächen der Ableitung mancher Arten störend entgegenstellten. Es bleibt demnach zu zeigen, wie jene speciellen Formen in einer allgemeinern enthalten sind.

Regelflächen besitzen gewissermassen in jedem Punkte ihrer Doppelgeraden einen biplanaren Punkt und in zweien derselben uniplanare, welche sich auch noch vereinigen können. Das Pentaeder wird daher solche Willkürlichkeiten in der Gestalt aufweisen, dass man seine Ebenen, ohne die Fläche zu ändern, in Lagen bringen kann, wie sie die angegebenen Singularitäten bedingen.

§ 17.

Die Flächen, deren Pentaeder vier Ebenen durch einen Punkt besitzt*). (Flächen mit einem osculirenden Kegel.)

Dieser Specialisirung des Pentaeders entspricht die Gleichung

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} + \frac{x_4^3}{\alpha_4^2} + \frac{x_5^3}{\alpha_5^2} = 0.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

I. Vom Schnittpunkt der vier ausgezeichneten Ebenen geht ein osculirender Kegel an die Fläche, dessen Berührungscurve in der fünften liegt und durch

*) Vergl. Eckardt a. a. O. § 8.

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}+\frac{x_4^3}{\alpha_4^2}=0, \quad x_5=0$$

gegeben ist. Jede ternäre cubische Form lässt sich aber auf zweifach unendlich viele Arten auf vier Cuben reduciren, mithin unsere Gleichung eben so oft auf fünf, und die Frage nach der kanonischen Form ist, sobald die Ebene $x_5=0$ gefunden, übereinstimmend mit der nämlichen für Curven.

Wie Eckardt bemerkt hat, schneiden sich die 27 Geraden der Fläche neunmal zu dreien in den Wendepunkten der Berührungscurve, während die 9 Ebenen, deren jede solche drei Linien ausschneidet, durch die Spitze des Kegels gehen. Man erkennt dieses leicht durch Herstellung der Form

$$x_1x_2x_3+k(x_1+x_2+x_3)^3+\frac{x_5^3}{\alpha_5^2}=0,$$

welche nach bekannten Sätzen über Curven dritter Ordnung eine allgemeine ist*). Die Ebenen $x_1x_2x_3$ schneiden die Geraden aus, welche sich in den drei reellen Wendepunkten (auf $x_1+x_2+x_3=0$) treffen. In jeder Ebene ist stets nur eine reell. Die übrigen 18 sind aber sicher imaginär, da es ihre Kreuzungspunkte — die Wendepunkte — sind. Demnach sind nur drei Gerade der Fläche reell. Es kann jedoch nie die Art V auftreten. Denn, sei der Theil des Berührungskegels, welcher dem paaren Stück der Fläche angehört, reell, so schneidet jede seiner Erzeugenden den unpaaren auch noch, osculirt also nicht. Ist andererseits jener Theil imaginär, so wird das paare Stück von jeder Geraden durch den Scheitel geschnitten, es kann also ebenfalls keine osculiren. Folglich: Geht von einem Eckpunkte des Pentaeders ein osculirender Kegel an die Fläche, so ist dieselbe im Allgemeinen eine der Arten IV, welche jedoch jetzt in einander verschmolzen sind.

Ob Knoten vorhanden sind oder nicht, hängt einzig und allein von der Berührungscurve, nicht etwa noch von dem Coefficienten von x_5^3 ab. Besitzt jene Curve einen Doppelpunkt, so ist dieser auch Knoten der Fläche, wie man der Gleichung sofort ansieht. Sofern nämlich der Doppelpunkt ein gewöhnlicher ist, kann die Form

$$x_1x_2x_3+f_3(x_1x_2)+\frac{x_5^3}{\alpha_5^2}=0,$$

sofern er ein Rückkehrpunkt ist, die Form

$$x_1^2x_3+f_3(x_1x_2)+\frac{x_5^3}{\alpha_5^2}=0,$$

hergestellt werden und diese Gleichungen lassen einen biplanaren resp.

---

*) Die Flächen, bei denen sich die oben angewendete Form nicht herstellen lässt, finden im nächsten § ihre Erledigung, mit ihnen auch solche mit conjugirt imaginären osculirenden Kegeln.

einen uniplanaren Punkt erkennen; conische Knoten treten daher überhaupt nicht auf.

Die letztgenannte Fläche kann aber nicht mehr auf fünf Cuben gebracht werden, dann ihre Berührungscurve nicht mehr auf vier. Wir betrachten sie daher, als nicht unserem Pentaeder angehörig, später (§ 18.).

Bei der Annahme eines oder zweier weiterer Doppelpunkte, welcher die Ausartung der Curve in einen Kegelschnitt und eine Gerade resp. in drei Gerade entspricht, erhalten wir ebenso viele neue biplanare Knoten. Aber von allen erzeugten Flächen ist nur die letzte mit dreien die allgemeinste ihrer Art hinsichtlich der auftretenden singulären Punkte; denn nach Schläfli kann solche Fläche dargestellt werden durch die Gleichung

$$x_1 x_2 x_3 + x_5^3 = 0,$$

welche die Ausartung des osculirenden Kegels in drei Ebenen $x_1 x_2 x_3$ zeigt. Damit sind alle Fälle aufgezählt.

§ 18.

Tetraederflächen.

Wir behandeln jetzt einen Specialfall des vorigen §, dessen wir dort in einer Note erwähnten. Verschwindet für die Berührungscurve des Kegels die Aronhold'sche Invariante S, so schneiden sich ihre Wendetangenten dreimal zu dreien in einem Punkte und die Form, deren wir uns zur Untersuchung der Realität der Geraden auf der Fläche bedienten, lässt sich nicht mehr herstellen. Bekanntlich sind aber unter dieser Bedingung nur drei Cuben zur Darstellung der Curve erforderlich, die Transformation ist eine völlig bestimmte und ebenso also auch diejenige unserer Flächen auf vier Cuben. Da hiernach den vorliegenden Gattungen nur noch ein *Tetraeder* zugeordnet ist, haben wir sie mit obigem Namen belegt.

Aus der Gleichberechtigung aller vier Ecken des Tetraeders folgt: *Verschwindet für die Berührungscurve des eine Fläche osculirenden Kegels die Aronhold'sche Invariante S, so sind vier solche Kegel vorhanden. Nimmt man die Ebenen der Curven zu Coordinatenebenen, so erscheint die Gleichung der Fläche als Aggregat von vier Cuben.*

Hierbei ist vorausgesetzt, dass nicht etwa zwei oder mehr Ebenen vereinigt liegen, welche Fälle wir, der völligen Bestimmtheit jener Elemente wegen, von nun an wieder besonders zu betrachten haben.

Berücksichtigen wir noch Verschiedenheiten, welche hinsichtlich der Realität der Ebenen sich darbieten, so finden wir nach § 9. im Ganzen 9 Arten, die folgenden:

a) Eigentliches Tetraeder.

1) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{IV}'\ (\S\ 4.)$,

2) $x_1^3 + x_2^3 + (x_3 + ix_4)^3 + (x_3 - ix_4)^3 = 0 \cdots\cdots \mathrm{IV}''\ (\S\ 5.)$,

3) $(x_1 + ix_2)^3 + (x_1 - ix_2)^3 + (x_3 + ix_4)^3 + (x_3 - ix_4)^3 \cdots\ \mathrm{II}\ (\S\ 6.)$.

b) Eine Doppelebene $x_3 = 0$.

4) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 x_4 = 0 \cdots$ Fläche mit U_6 (Schläfli'sche XII, 2),

5) $(x_1 + ix_2)^3 + (x_2 - ix_2)^3 + x_3^2 x_4 = 0 \cdots$ Fläche mit U_6 (Schläfli'sche XII, 1).

c) Zwei Doppelebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ resp. $x_1 + ix_3 = 0$, $x_1 - ix_3 = 0$.

6) $x_1^2 x_2 + x_3^2 x_4 = 0 \cdots\cdots$ Regelfläche (Schläfli'sche XXII, 1),

7) $(x_1 + ix_3)^2 x_2 + (x_1 - ix_3)^2 x_4 = 0$ „ („ XXII, 2).

d) Eine dreifache Ebene $x_1 = 0$, eine einfache Ebene $x_2 = 0$.

8) $x_1^2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0 \cdots$ Fläche mit U_8 (Schläfli'sche XX).

e) Eine vierfache Ebene $x_1 = 0$.

9) $x_1^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 + x_2^3 = 0 \cdots$ Regelfläche mit vereinigten Directrixen (Cayley'sche).

Die Hesse'sche Fläche fällt bei jeder dieser Flächen mit dem ihr eigenthümlichen Tetraeder zusammen, aber nicht umgekehrt gehört eine Fläche, deren Hesse'sche aus Ebenen besteht, zu den vorliegenden. So z. B. kommt diese Eigenschaft den Flächen mit drei biplanaren Knoten zu, welche nichtsdestoweniger nur durch fünf Cuben darstellbar sind. —

Jede Ebene des Raumes kann als fünfte eines Pentaeders unserer Flächen betrachtet werden, indem man sie mit Null multiplicirt deren Gleichung hinzufügt. Alle Punkte der Kanten des Tetraeders sind daher als Ecken, alle Geraden der Seitenflächen als Kanten des Pentaeders aufzufassen, was sich durch Polarenbildung leicht bestätigt.

Die Arten 1) mit vier reellen Kegeln und 2) mit zwei reellen Kegeln sind schon unter den Flächen des vorigen § enthalten; man braucht zu ihrer Erzeugung nur einen der Coefficienten $\alpha_{1,2,3,4}$ unendlich werden zu lassen. Hingegen die Art 3) mit vier imaginären Kegeln findet sich nicht vor, da überhaupt nur von reellen Flächen die Rede ist, alle angrenzenden Flächen mit nur einem osculirenden Kegel aber imaginär sind. Diese Fläche nimmt daher einen völlig isolirten Stand ein, was auch aus der abweichenden Zahl ihrer reellen Linien, 15 statt 3, ersichtlich ist.

Bei den Flächen mit uniplanarem Punkte U_6 sind noch zwei eigentliche osculirende Kegel vorhanden, die beiden übrigen sind vereinigt in der Ebene des Knotens. Bei 4) sind jene Kegel reell, bei 5) con-

jugirt; ihre Berührungscurven haben an der singulären Stelle einen Rückkehrpunkt.

Während bei den bisherigen Arten das Pentaeder speciellerer Natur ist, als es die auftretende Singularität nothwendig macht, finden wir bei den Flächen 6—9 stets die angegebene Gruppirung der Ebenen; die von uns gefundenen Gleichungen stimmen mit den Schläfli'schen überein. Nur bei 8) giebt es noch einen eigentlichen osculirenden Kegel, dessen Berührungscurve aus einem Kegelschnitt und einer ihn berührenden Geraden besteht.

Für die Regelflächen 6) tritt jetzt das Verhältniss zu denen mit B_3 hervor, dessen wir in § 16. erwähnten, da jeder Punkt der Doppeldirectrix $x_1 = x_3 = 0$ als Schnittpunkt der beiden Doppelebenen des Pentaeders mit der beliebigen fünften angesehen werden kann, ein solcher Punkt aber nach § 11. stets ein B_3 ist.

Ebenso kann man Eigenschaften, welche bei bestimmtem Pentaeder nur *einem* Punkte der Fläche zukommen, bei den übrigen der unserigen für unendlich viele nachweisen, was wir nicht weiter ausführen.

§ 19.

Die Flächen mit uniplanarem Punkte im Allgemeinen.

Nimmt man die Ebene des Knotens zu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

so sind die vorliegenden Flächen enthalten in der Gleichung

$$3\,x_4\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 + f_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Wählt man $x_4 = 0$ so, dass für ihre Schnittcurve mit der Fläche:

$$f_3\,(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Invariante S verschwindet, so lässt sich deren Gleichung durch drei Cuben darstellen, so dass unter dieser Voraussetzung die Gleichung der Fläche die Form

$$3\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + \frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} = 0$$

annehmen kann, welche wir benutzen werden. Es giebt unendlich viele solche Ebenen $x_4 = 0$, sie umhüllen eine Fläche vierter Classe, von Gordan*) Aronhold'sche Fläche genannt. Die angegebene Reduction ist demnach auf unendlich viele Arten ausführbar.

Die gefundene Form hat die grösste Aehnlichkeit mit derjenigen der Flächen mit Doppelpentaederebene, sie geht aus letzterer hervor,

*) Vergl. Gordan a. a. O. § 14.

wenn man die Doppelebene durch den Schnitt der drei einfachen legt. Folglich: *Eine Fläche mit uniplanarem Punkte hat dessen Ebene zur Doppelebene des Pentaeders, während sich die drei einfachen in ihm schneiden, und umgekehrt. Die einfachen Ebenen sind dann nicht mehr völlig bestimmt.*

Es handelt sich bei gegebener Fläche darum, die Bedingung zu finden, welcher drei durch den Knoten gehende Ebenen genügen müssen, um Pentaederebenen zu sein. Hierzu und zugleich zur Auffindung des Orts der ehemaligen Ecken — unendlich viele sind es jedenfalls — bilden wir die Hesse'sche Form:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\alpha_1^2} + x_4 & x_4 & x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4 & \frac{x_2}{\alpha_2^2} + x_4 & x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4 & x_4 & \frac{x_3}{\alpha_3^2} + x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 \left(\frac{x_1 x_2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} + \frac{x_2 x_3}{\alpha_2^2 \alpha_3^2} + \frac{x_3 x_1}{\alpha_3^2 \alpha_1^2} \right) = 0.$$

Die Hesse'sche Fläche zerfällt also in einen Kegel zweiter Ordnung K mit dem Knoten als Spitze und der zweifach zählenden singulären Ebene. Alle Unterdeterminanten H_{ik} mit Ausnahme von

$$H_{44} = \frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2} + x_4 \left(\frac{x_1 x_2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} + \frac{x_2 x_3}{\alpha_2^2 \alpha_3^2} + \frac{x_3 x_1}{\alpha_3^2 \alpha_1^2} \right)$$

verschwinden für einen beliebigen Punkt von $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. $H_{44} = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist demnach der gesuchte Ort der Ecken.

Die Pentaederecken bilden folglich eine Curve dritter Ordnung C in der Ebene des Knotens. Letzterer ist Doppelpunkt, dessen Tangenten die Schnittlinien des zur Hesse'schen Fläche gehörigen Kegels mit der Ebene der Curve sind.

Die Curve C hat drei Wendepunkte auf einer Geraden. Demnach können wir unsere Gleichung noch dadurch vereinfachen, dass wir die Ebene $x_4 = 0$ jene Gerade verzeichnen lassen, wodurch die Coefficienten α specielle Werthe annehmen werden, aber sonst keine Aenderung der Form erfolgen wird.

Zur Auffindung dieser besondern Lage machen wir von dem Satze Gebrauch, dass bei einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt die Tangenten in ihm die Hesse'sche Form der durch seine Verbindungslinien mit den Wendepunkten gegebenen binären cubischen Form darstellen. Also soll

$$\frac{x_1 x_2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} + \frac{x_2 x_3}{\alpha_2^2 \alpha_3^2} + \frac{x_3 x_1}{\alpha_3^2 \alpha_1^2} = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

die Hesse'sche Form von

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2} = 0$$

sein; was nur der Fall ist, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Nehmen wir noch diesen Werth der Einheit gleich, was der Allgemeinheit keinen Abbruch thut, so entsteht die einfachste Form:

$$3\, x_4 (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Durch die Transformation

$$x_4 - \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = x_4', \quad x_1 + x_2 = x_3' \text{ etc.}$$

erhalten wir Schläfli's Gleichung:

$$\frac{3\, x_4'}{2}(x_1' + x_2' + x_3')^2 - x_1' x_2' x_3' = 0,$$

welche ein übersichtliches Bild der Vertheilung der Geraden gewährt. Sie lässt die *Wendepunkte der Curve C als Schnittpunkte der drei unären Geraden der Fläche mit denen des Knotens* erkennen.

Nur so lange die Wendepunkte reell sind, sind es die Ebenen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sofern man die specielle Lage der Ebenen x_4 verwendet, während im allgemeinen Falle immer alle drei reell sein können, da man $x_4 = 0$ stets so legen kann, dass C von ihr in drei reellen Punkten getroffen wird.

Zur Aufsuchung der zu einer als gegeben angenommenen Ebene $x_4 = 0$ gehörigen Pentaederebenen bemerken wir, dass jene offenbar die Rolle der Ebene y_1 bei den allgemeinsten Flächen mit Doppelebene spielt. (§ 10.) Demnach ist ihr Schnitt mit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Pentaederkante, zu der also jede Gerade dieser Ebene gemacht werden kann. Die auf der Kante liegenden Ecken bestimmen sich als Schnitt mit C, und die einem solchen Punkttripel angehörigen Ebenen kann man etwa durch Polarenbildung finden, da jede derselben zwei der Doppelgeraden dieser Flächen enthalten muss. Sehr einfach erhält man die Pentaederebenen auch mit Hülfe der bereits in einer Note des § 10. benutzten Gordan'schen Formeln. Wir ziehen jedoch hier den andern Weg vor, da doch noch die Gleichung der Polaren später benutzt werden wird. Zu ihrer Bildung empfiehlt es sich, die Coordinaten von C als rationale Functionen eines Parameters darzustellen, welches möglich, da die Curve vom Geschlecht $p = 0$ ist. Es ist dann nach der gefundenen Gleichung:

$$x_1 = \lambda_1 m, \quad x_2 = \lambda_2 m, \quad x_3 = \lambda_3 m, \quad x_4 = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

wo

$$m = \alpha_3^2 \lambda_1 \lambda_2 + \alpha_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \alpha_2^2 \lambda_3 \lambda_1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes $y_1 y_2 y_3 y_4$:

$$y_1\left(x_4(x_1+x_2+x_3)+\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}\right)+y_2\left(x_4(x_1+x_2+x_3)+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}\right)$$
$$+y_3\left(x_4(x_1+x_2+x_3)+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}\right)+y_4(x_1+x_2+x_3)^2=0$$

geht für diese Werthe der y über in:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^4}\lambda_1^2\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}+\frac{\lambda_3}{\alpha_3^2}\right)+\frac{x_2^2}{\alpha_2^4}\lambda_2^2\left(\frac{\lambda_3}{\alpha_3^2}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2}\right)+\frac{x_3^2}{\alpha_3^4}\lambda_3^2\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}\right)$$
$$-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}=0,$$

welche mit Nothwendigkeit ein Ebenenpaar darstellt.

Den drei Punkten auf $x_4=0$ entsprechen die Parameter

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0, \end{array}$$

ihre Polaren sind demnach:

$$\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=0,\quad \frac{x_3^2}{\alpha_3^2}-\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}=0,\quad \frac{x_1^2}{\alpha_1^2}-\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}=0$$

Ebenenpaare, deren Doppelgerade die Pentaederebenen

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0$$

bestimmen und wie bei allgemeinen Flächen mit ihnen harmonische Büschel bilden. Hiermit ist bewiesen: *Sobald eine Gerade der Ebene des Knotens als Pentaederkante angenommen ist, sind alle übrigen Elemente eindeutig bestimmt.*

Es sei noch bemerkt, dass die Doppelgeraden der Polaren den Kegel K bilden, nur dem Knoten entspricht doppeltzählend seine Ebene als Polare, wodurch es sich erklärt, dass jede Gerade als Kante aufgefasst werden kann.

Die speciellen Formen, in denen wir früher den Gleichungen der vorliegenden Flächen begegneten, lassen sich jetzt leicht durch specielle Annahme der Kante in $x_4=0$ erklären, für welche zwei oder drei Pentaederecken auf ihr vereinigt liegen. —

Die Ebenenpaare der zerfallenden Polare umhüllen einen Kegel, zu dessen Untersuchung wir uns jetzt wenden wollen. Seine Gleichung dürfte folgendermassen am einfachsten aufzustellen sein. Ist $u_x v_x=0$ eines jener Ebenenpaare, so hat man identisch:

$$(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)(v_1x_2+v_2x_2+v_3x_3)$$
$$=\frac{x_1^2}{\alpha_1^4}\lambda_1^2\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}+\frac{\lambda_3}{\alpha_3^2}\right)+\frac{x_2^2}{\alpha_2^4}\lambda_2^4\left(\frac{\lambda_3}{\alpha_3^2}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2}\right)+\frac{x_3^2}{\alpha_3^4}\lambda_3^2\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}\right)$$
$$-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}.$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\frac{\lambda_1^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}+\frac{\lambda_3}{\alpha_3^2}\right)=p_1 \text{ etc.}$$

findet man durch Vergleichung der Coefficienten der x

$$1)\ u_1 v_1 - \frac{p_1}{\alpha_1^2} = 0,$$

$$2)\ u_2 v_2 - \frac{p_2}{\alpha_2^2} = 0,$$

$$3)\ u_3 v_3 - \frac{p_3}{\alpha_3^2} = 0,$$

$$4)\ u_1 v_2 + v_1 u_2 + 2\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} = 0.$$

$$5)\ u_2 v_3 + v_3 u_2 + 2\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} = 0,$$

$$6)\ u_3 v_1 + v_1 u_3 + 2\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} = 0.$$

Nimmt man hierzu noch $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, welche Gleichung sich auch ersetzen lässt durch

$$7)\ p_1+p_2+p_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{1}{\alpha_2^2\alpha_3^2}+\frac{1}{\alpha_3^2\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\right)=0,$$

so hat man 7 Gleichungen, linear und homogen in den 7 Unbekannten

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\quad p_1,\ p_2,\ p_3,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

deren Elimination auf die Gleichung des gesuchten Kegels in Ebenencoordinaten:

$$P=\begin{vmatrix}
u_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & u_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & u_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_3^2} & 0 \\
u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} \\
0 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} \\
u_3 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha_2^2\alpha_3^2}+\frac{1}{\alpha_3^2\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}
\end{vmatrix}=0$$

oder

$$P = u_1u_2u_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+\alpha_1^2u_1^3+\alpha_2^2u_2^3+\alpha_3^2u_3^3$$
$$-\alpha_1^2u_1^2(u_2+u_3)-\alpha_2^2u_2^2(u_3+u_1)-\alpha_3^2u_3^2(u_1+u_2)=0$$

führt, zu der wir noch $u_4=0$ gesetzt denken müssen.

Dieser Kegel ist dritter Classe und besitzt die Ebene des Knotens zur Doppeltangentenebene längs den Tangenten des Doppelpunkts der Curve C. Der Kegel K wird dreimal von ihm berührt, längs den Doppelgeraden der Polaren, welche den drei Wendepunkten von C angehören, während die auftretenden drei Rückkehrtangentenebenen von P selbst Polaren der nämlichen Punkte in Bezug auf K sind. Diese Sätze sind einfach zu beweisen, wenn man die abgeleitete Gleichung anwendet, welche der Wendepunktslinie von C, als Pentaederkante gewählt, zukommt.

Fig. 1, Tafel III bringt die auftretenden Gebilde für den Fall eines U_6 mit drei reellen Geraden zur Anschauung. Der Knoten von C ist isolirt, die Linie ihrer drei (reellen) Wendepunkte ist zur unendlich fernen gewählt.

§ 20.

Classification der Flächen mit uniplanarem Punkte.

Die Fläche

$$x_4(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}=0$$

wird von der Ebene des Knotens entweder in drei oder nur einer reellen Geraden getroffen, so lange der Knoten der allgemeinste, ein U_6 ist. Hiernach sind zwei Arten zu unterscheiden. Den Uebergang vermitteln Flächen mit berührender Ebene des Knotens; die Discriminante der cubischen Form, welche durch die Knotengeraden gegeben ist, verschwindet für diese Art:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,$$

und diese Gleichung stellt somit *die Bedingung für das Auftreten eines U_7 dar.*

Die Curve der Pentaederecken C hat einen Rückkehrpunkt, der zur Hesse'schen Fläche gehörige Kegel K berührt die Ebene des Knotens längs der Rückkehrtangente von C.

Der Kegel P ist jetzt darstellbar durch

$$(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3)\big(\alpha_1(u_1^2+u_2u_3)+\alpha_2(u_2^2+u_3u_1)\\ +\alpha_3(u_3^2+u_1u_2)\big)=0,$$

er ist demnach in einen Kegel zweiter Classe und eine auf ihm liegende Gerade (Classenscheitel einer beliebig wählbaren Leitlinie) zerfallen. Wie zu erwarten war, ist letztere die Rückkehrtangente von C. Die gegenseitige Lage dieser Gebilde ist auf Tafel III, Fig. 2 dargestellt, in der der Wendepunkt von C unendlich fern angenommen ist.

Die Ebenen der zerfallenden Polaren zeigen insofern ein verschiedenes Verhalten, als die eine sich um die Rückkehrtangente dreht, die andere Tangentenebene des Kegels ist.

Alle übrigen Flächen sind Tetraederflächen (vergl. § 18.), C zerfällt in Gerade, jetzt als Kanten des Tetraeders aufzufassen. In diese Arten gehen dann auch die Regelflächen ein. Die Ausartungen der Curve C für die einzelnen hierher gehörigen Flächen des § 18. sind die folgenden:

Art:	C
4) und 5) mit U_6	Drei Gerade, von denen sich zwei im Knoten schneiden.
8) mit U_8	Eine Doppelgerade, eine einfache.
Regelflächen 6) und 7)	In jeder Ebene der beiden als U_7 aufzufassenden Punkte der Doppeldirectrix eine solche Curve.
Regelfläche 9)	In der Ebene des als U_8 aufzufassenden Punktes ein dreifache Linie.

Die Flächen 4) und 5) verhelfen uns, in Verbindung mit der gefundenen Bedingung für einen U_7, zu Criterien für die verschiedenen Arten mit U_6. Ausgehend von den genannten, welche einem unendlich grossen Werthe einer der Grössen α entsprechen, finden wir:

a) Bei der Annahme reeller x_1, x_2, x_3 in der Fläche

$$x_4(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}=0 \cdots \alpha_1<\alpha_2<\alpha_3,$$

$$\text{wenn } \alpha_1+\alpha_2 \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \alpha_3 \left\{\begin{array}{lll}\text{drei reelle Linien des } U_6 & (\text{Schläfli'sche} & \text{XII, 1}),\\ \text{einen } U_7 & (\quad\text{„} & \text{XV}),\\ \text{eine reelle Linie des } U_6 & (\quad\text{„} & \text{XII, 2}).\end{array}\right.$$

Ist α_3 imaginär, so ist die Fläche ebenfalls von der letzten Art.

b) Bei der Annahme conjugirter x_1 und x_2 in der Fläche

$$x_4(2x_1+x_3)+\frac{(x_1+ix_2)^3}{(\alpha_1+i\alpha_2)^2}+\frac{(x_1-ix_2)^3}{(\alpha_1-i\alpha_2)^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}=0,$$

$$\text{wenn } 2\alpha_1 \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} \alpha_3 \left\{\begin{array}{ll}\text{Schläfli'sche} & \text{XII, 1},\\ \quad\text{„} & \text{XV},\\ \quad\text{„} & \text{XII, 2}.\end{array}\right.$$

§ 21.

Zusammenstellung der Resultate.

Wir geben zum Schlusse eine Tabelle (Tafel IV), welche einerseits die möglichen Pentaeder einer Flächenart, andererseits alle Arten, welche einem und demselben Pentaeder zukommen, erkennen lässt. Das Vorhandensein einer Fläche ist durch ein + angedeutet. Die Schläfli'schen Bezeichnungen sind durch zwei Zahlen charakterisirt, so dass keine Verwechselung mit der von Herrn Klein und mir benutzten entstehen kann. Eingeklammerte Zahlen bei Flächen mit imaginären Knoten bezeichnen die Flächen mit reellen bez. ohne Knoten, zwischen denen die betreffenden sich vorfinden, ohne einen Uebergang zu einer andern Art zu bewirken*).

*) Ich beabsichtige im Anschlusse an diese Arbeit eine Collection von Modellen der verschiedenen Arten von Flächen dritter Ordnung und einiger ihrer Hesse'schen Flächen erscheinen zu lassen, welche das concrete Erfassen der Singularitäten erleichtern werden.

Im December 1877.

Eintheilung der Flächen dritter Ordnung nach der Art ihres Pentaeders.		Alle Elemente des Pentaeders bestimmt.												Ecken u. Kanten theilweise unbestimmt.	
		5 Ebenen reell	3 Ebenen reell, 2 E. conj.	1 Ebene reell, 4 E. conj.	Doppelebene, 3 E. reell	Doppelebene, 1 E. reell, 2 E. conj.	2 reelle Doppelebenen	2 conj. Doppelebenen	Vierfache Ebene	Dreifache Ebene, 2 E. reell	Dreifache Ebene, 2 E. conj.	Dreifache Ebene, Doppelebene	Fünffache Ebene	Vierfache Ebene	Fünffache Ebene
Keine Singularität	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	III	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·	·
	IV	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV″	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·	·
	V	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV′	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
1 C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	III	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	III′	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·	·
	IV	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV′	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
2 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II′	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	III	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
3 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	I′	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2 conj. C_2	IV, 4 (V)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	IV, 5 (IV)	·	+	·	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV, 5 (IV″)	·	·	+	·	+	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV, 5 (IV′)	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·
	IV, 6 (III)	·	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
1 reeller + 2 conj. C_2	VIII, 3 (IV′)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 4 (IV)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 5 (III)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 5 (III′)	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2 reelle + 2 conj. C_2	XVI, 2 (III)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4 paarweise conj. C_2	XVI, 3 (III)	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
B_3: 2·3 Strahlen reell	III, 1	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·
B_3: 1·3+1·1 „ „	III, 2	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·	·
B_3: 2·1 „ „	III, 3	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·	·
B_3: Ebenen conj.	III, 4	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·
$B_3 + C_2$	VI, 1	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·
	VI, 2	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·	·
$B_3 + 2C_2$	XIII, 1, 2	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·
2 reelle B_3	IX, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
	IX, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
2 conj. B_3	IX, 3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
	IX, 4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
$2B_3 + C_2$	XVII, 1,2,3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
$3B_3$	XXI, 1, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
B_4; $B_4 + C_2$; $B_4 + 2C_2$	V, 1, 2, 3, 4; X, 1, 2; XVIII, 1, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·	·	·
B_5; $B_5 + C_2$	VII, 1, 2; XIV, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·	·

…aeders			Ecken u. Kanten theilweise unbestimmt.		Einige Ebenen in ein. Bünd. beliebig wählbar.		Eine Ebene völlig unbestimmt (Tetraederflächen).								
Dreifache Ebene, 2 E. conj.	Dreifache Ebene, Doppelebene	Fünffache Ebene	Vierfache Ebene	Fünffache Ebene	4 Ebenen durch einen Punkt	Doppelebene und 3 einfache E. d. e. P.	4 Ebenen reell	2 Ebenen reell, 2 E. conj.	2 Ebenen reell, 4 E. conj.	Doppelebene, 2 E. reell	Doppelebene, 2 E. conj.	2 reelle Doppelebenen	2 conj. Doppelebenen	Dreifache Ebene	Vierfache Ebene
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Eintheilung der Flächen dritter Ordnung nach der Art ihres Pentaeders.

		bestimmt.												unbestimmt
		5 Ebenen reell	3 Ebenen reell, 2 E. conj.	1 Ebene reell, 4 E. conj.	Doppelebene, 3 E. reell	Doppelebene, 1 E. reell, 2 E. conj.	2 reelle Doppelebenen	2 conj. Doppelebenen	Vierfache Ebene	Dreifache Ebene, 2 E. reell	Dreifache Ebene, 2 E. conj.	Dreifache Ebene, Doppelebene	Fünffache Ebene	Vierfache Ebene
Keine Singularität	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·
	III	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·
	IV	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV''	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·
	V	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV'	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
1 C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·
	III	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	III'	+	+	+	+	+	·	·	·	+	+	·	·	·
	IV	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV'	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
2 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II'	+	+	+	+	+	·	·	·	·	+	·	·	·
	III	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
3 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	I'	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	II	+	+	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4 reelle C_2	I	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2 conj. C_2	IV, 4 · · (V)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	IV, 5 (IV)	·	+	·	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV, 5 (IV'')	·	·	+	·	+	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV, 5 (IV')	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·	·
	IV, 6 · (III)	·	+	+	·	+	·	·	·	·	+	·	·	·
1 reeller + 2 conj. C_2	VIII, 3 · (IV')	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 4 · (IV)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 5 (III)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	VIII, 5 (III')	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2 reelle + 2 conj. C_2	XVI, 2 · (III)	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4 paarweise conj. C_2	XVI, 3 · (III)	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
B_3, 2·3 Strahlen reell	III, 1	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·
B_3, 1·3+1·1 „ „	III, 2	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·
B_3, 2·1 „ „	III, 3	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·
B_3, Ebenen conj.	III, 4	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·
$B_3 + C_2$	VI, 1	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·
	VI, 2	·	·	·	·	·	+	+	+	·	·	·	·	·
$B_3 + 2C_2$	XIII, 1, 2	·	·	·	·	·	+	·	·	·	·	·	·	·
2 reelle B_3	IX, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+
	IX, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+
2 conj. B_3	IX, 3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+
	IX, 4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+
$2 B_3 + C_2$	XVII, 1,2,3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+
$3 B_3$	XXI, 1, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
B_4; $B_4 + C_2$; $B_4 + 2C_2$	V, 1, 2, 3, 4; X, 1, 2; XVIII, 1, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·	·
B_5; $B_5 + C_2$	VII, 1, 2; XIV, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+	·
B_6; $B_6 + C_2$	XI, 1, 2; XIX, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
U_6, 3 Strahlen reell	XII, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
U_6, 1 Strahl reell	XII, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
U_7	XV, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
U_8	XX, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Regelfläche, Doppelebenen reell	XXII, 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
„ „ conj.	XXII, 2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Cayleysche Regelfläche		·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

······························+++·····+···++++··+++++··	Dreifache Ebene, 2 E. reell	
·····························+·········+····+·+···+·++·	Dreifache Ebene, 2 E. conj.	
·········+···	Dreifache Ebene, Doppelebene	
········+··	Fünffache Ebene	
···········+++++·······································	Vierfache Ebene	unbe-stimmt.
·······+···	Fünffache Ebene	
··········+·+·+····++···························+·++···	4 Ebenen durch einen Punkt	beliebig wählbar.
····+++··	Doppelebene und 3 einfache E. d. e. P.	
··+······	4 Ebenen reell	flächen).
··+····	2 Ebenen reell, 2 E. conj.	
···+·	2 Ebenen reell, 4 E. conj.	
·····+···	Doppelebene, 2 E. reell	
······+··	Doppelebene, 2 E. conj.	
··+··	2 reelle Doppelebenen	
·+···	2 conj. Doppelebenen	
···+···	Dreifache Ebene	
+··	Vierfache Ebene	

Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

Von

Felix Klein in München.

In meinen „Untersuchungen über das Ikosaeder“ (diese Annalen Bd. XII, p. 503 ff.) hatte ich mir ausdrücklich vorbehalten, noch ausführlich auf die Theorie der elliptischen Functionen und ihre Bedeutung für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zurückzukommen. Ich wünschte die in dieser Richtung vorliegenden Entwickelungen vom Ikosaeder aus zu verstehen und womöglich zu vereinfachen. Zugleich hoffte ich neue Gesichtspunkte für die Behandlung der elliptischen Functionen zu gewinnen. Auf solche Art ist die nachfolgende Arbeit entstanden. Einmal soll sie meine früheren Untersuchungen über Gleichungen fünften Grades vervollständigen und in gewisser Hinsicht abschliessen; nach der anderen Seite soll sie den Zugang zu umfassenderen Fragen eröffnen und also eine Vorarbeit für weitere Untersuchungen sein*).

Dabei muss ich von vorneherein betonen, dass mein Ausgangspunkt zur Behandlung der elliptischen Functionen mit demjenigen enge verwandt ist, den Hr. Dedekind in seinem Aufsatze über elliptische Modulfunctionen (Borchardt's Journal Bd. 83) benutzt hat. Ich muss das hier um so mehr, als ich, damals mit diesem Aufsatze (der im September vorigen Jahres erschien) unbekannt, der *Naturforscherversammlung in München* ein erstes Resultat meiner Untersuchungen vorlegte**), das sich aus den Dedekind'schen Entwickelungen unmittelbar ergiebt.

---

*) Siehe z. B. eine Note: *Ueber Gleichungen siebenten Grades*, die ich am 4. März 1878 der Erlanger Societät vorlegte.

**) Amtlicher Bericht, p. 104.

Abschnitt I.

Einiges über die Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung.

In diesem ersten Abschnitte stelle ich eine Reihe von Beziehungen zusammen, welche nicht eigentlich neu sind, sondern fast alle in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten her entwickelt worden sind, die aber in ihrer Gesammtheit noch wenig bekannt zu sein scheinen, so dass ich sie zum Verständniss des Folgenden hier vorausschicken muss.

§ 1.

Die rationalen Invarianten des elliptischen Integrals. Beziehung zu den Perioden.

Das elliptische Differential:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}, \tag{1}$$

welches homogen geschrieben die folgende Form annimmt:

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{a_0 x_0^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4}},$$

kann als Covariante der im Nenner stehenden biquadratischen binären Form angesehen werden; denn führt man statt x_1, x_2 durch eine lineare Substitution neue Veränderliche ein, so tritt die Substitutionsdeterminante als Factor vor. Demnach ist es wesentlich abhängig von den rationalen Invarianten dieser binären Form. Im Anschlusse an die Vorlesungen von Weierstrass bezeichne ich diese Invarianten mit g_2, g_3 und schreibe demnach:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \tag{2}$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Aus g_2 und g_3 setzt sich die Discriminante Δ der biquadratischen Form in bekannter Weise zusammen:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2. \tag{4}$$

Ich benutze sie, um die *absolute* Invariante zu bilden. Als solche wähle ich nämlich nicht, wie gewöhnlich geschieht, $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, sondern $\frac{g_2^3}{\Delta}$. Bezeichnet man sie mit J, so hat man also die Formeln:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta}. \tag{5}$$

Es wird sich in den folgenden Paragraphen darum handeln, die *Perioden* des aus dem Differential (1) entspringenden elliptischen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

welche ω_1 und ω_2 genannt werden sollen, durch g_2, g_3 auszudrücken, oder aber, was für die folgenden Untersuchungen zunächst zweckmässiger ist, das *Verhältniss* der Perioden $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ durch die absolute Invariante J darzustellen. Man könnte ω_1 und ω_2 die *transcendenten* Invarianten nennen. Ihre transcendente Natur findet darin ihren Ausdruck, dass sie unendlich vielwerthig sind. Denn mit ω_1, ω_2 ist, wie bekannt, jedes andere Werthepaar

$$(6)\qquad \begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases}$$

gleichberechtigt, sofern α, β, γ, δ (wie immer im Folgenden) ganze Zahlen bedeuten, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Eins ist. Die Formel (6) giebt zugleich *alle* Werthe, deren ω_1, ω_2 bei einem vorgelegten Integrale fähig sind. — *Invarianten* aber sind die Perioden, weil sie sich nur um die Substitutionsdeterminante als Factor ändern, wenn man in das gegebene Integral statt x_1, x_2 neue Veränderliche durch lineare Substitution einführt.

Soll man mit Hülfe der Perioden *absolute* Invarianten bilden, so hat man zunächst das Periodenverhältniss $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, man hat ferner solche Combinationen wie $\omega_i \sqrt[12]{\Delta}$, $\omega_i \sqrt[4]{g_2}$, $\omega_i \sqrt[6]{g_3}$, wo $i = 1$ oder 2 sein mag. Es ist vielfach zweckmässig, das elliptische Integral in der Weise zu normiren, dass seine Perioden ohne Weiteres absolute Invarianten sind. Man schreibe also das Integral etwa in folgender Form, die weiterhin gelegentlich als *Normalform* bezeichnet sein soll:

$$(7)\qquad \int \frac{\sqrt[12]{\Delta} \cdot dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Diese Normalform (7) ist natürlich im einzelnen Falle nur bis auf eine zwölfte Einheitswurzel bestimmt.

§ 2.

Die algebraischen Invarianten des elliptischen Integrals.

Wenn man die vier Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ (die Verzweigungspunkte des Integrals) als gegeben ansieht, so setzt sich die absolute Invariante J bekanntermassen aus denjenigen Ausdrücken rational zusammen, die man in der synthetischen Geometrie als die

Doppelverhältnisse der vier Wurzeln bezeichnet. Nennt man eins derselben σ, so sind die übrigen durch die oft gebrauchten Formeln gegeben:

$$(8) \qquad \frac{1}{\sigma}, \quad 1-\sigma, \quad \frac{1}{1-\sigma}, \quad \frac{\sigma-1}{\sigma}, \quad \frac{\sigma}{\sigma-1},$$

und die absolute Invariante J erhält den Werth:

$$(9) \qquad J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

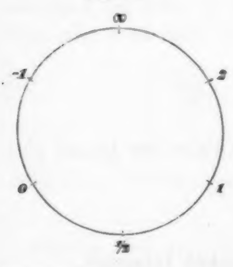
oder

$$(9a) \qquad J - 1 = \frac{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2}{27\,\sigma^2(1-\sigma)^2} \text{ *)}.$$

Diese Gleichung (9), welche ich *die Gleichung für das Doppelverhältniss* nennen will, ist nach Formel (8) eine derjenigen mit linearen Transformationen in sich. Sie gehört, nach der von Schwarz und mir bei früheren Gelegenheiten gebrauchten Ausdrucksweise, dem *Doppelpyramidentypus* an, und zwar ist die betr. Doppelpyramide eine sechsseitige. Ich gebrauche im Folgenden vor allen Dingen die conforme Abbildung, welche durch unsere Gleichung vermittelt wird, und will dieselbe also hier ausführlich schildern, ohne übrigens die sehr elementaren Beweisgründe anzugeben.

Man interpretire die complexen Werthe von J in einer Ebene, die complexen Werthe von σ auf der Kugel, und Letzteres in der Art, dass $\sigma = 0, 1, \infty$ drei äquidistante Punkte eines grössten Kreises, welcher der Aequator heissen soll, entsprechen. In ihnen wird $J = \infty$ und also $\Delta = 0$. Die Werthe $\sigma = 2, \frac{1}{2}, -1$ (für welche g_3 verschwindet und $J = 1$ wird) gehören dann ebenfalls drei äquidistanten Punkten des Aequators an, welche zwischen den erstgenannten in der Mitte liegen:

Figur 1.



Für $J = 0$, resp. $g_2 = 0$ ergeben sich die beiden Werthe $\sigma = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; sie sind durch Nord- und Südpol der Kugel vorgestellt.

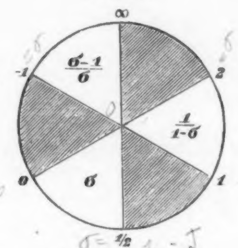
Jetzt zerlege man die Kugel durch die sechs Halbmeridiane, welche Nord- und Südpol mit den sechs auf dem Aequator markirten Punkten verbinden, und übrigens durch den Aequator selbst in 12 sphärische Dreiecke. Die conforme Abbildung ist dann einfach die, dass σ ein solches sphärisches Dreieck durch-

*) Vergl. z. B. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, p. 170. — Uebrigens werde ich solche Formeln später immer in der Art zusammenfassen, dass ich schreibe:

$$J : J - 1 : 1 = 4(1-\sigma+\sigma^2)^3 : (1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2 : 27\,\sigma^2(1-\sigma)^2.$$

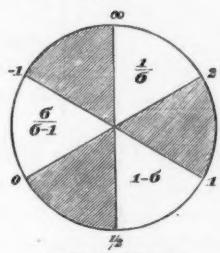
läuft, wenn sich J über seine positive oder seine negative Halbebene bewegt. Die Ecken entsprechen in der soeben angegebenen Weise $J = 0, 1, \infty$. Schraffirt man diejenigen Dreiecke, welche der positiven Halbebene J entsprechen und lässt die anderen frei, so ergeben die beiden Halbkugeln, auf die Aequatorebene parallel zur Axe projicirt, folgendes Bild:

Figur 2a.



Nördliche Halbkugel.

Figur 2b.



Südliche Halbkugel.

Ich habe in die nicht schraffirten Gebiete die Ausdrücke σ, $\frac{1}{\sigma}$, $1-\sigma$, $\frac{1}{1-\sigma}$, $\frac{\sigma-1}{\sigma}$, $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ in der Weise hineingeschrieben, dass die Drehungen kenntlich sind, welche die Kugel bei den betr. Substitutionen erfährt.

Uebrigens ist die hiermit geschilderte Figur im Wesentlichen identisch mit derjenigen, die ich früher (Math. Annalen Bd. IX, p. 191) zur Versinnlichung des Formensystems einer binären cubischen Grundform angegeben habe. In der That, schreibt man statt σ homogen machend $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, so hat man:

$$J : J-1 : 1 = 4(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^3 : [(\sigma_1+\sigma_2)(\sigma_1 - 2\sigma_2)(2\sigma_1 - \sigma_2)]^2 \\ : 27\,[\sigma_1\sigma_2(\sigma_1-\sigma_2)]^2,$$

und betrachtet man hier $\sigma_1\sigma_2(\sigma_1-\sigma_2)$ als binäre cubische Grundform, so ist (von Zahlenfactoren abgesehen) $(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$ die Hesse'sche Form derselben, $(\sigma_1+\sigma_2)(\sigma_1-2\sigma_2)(2\sigma_1-\sigma_2)$ die Functionaldeterminante beider.

§ 3.

Der Modul $\varkappa$ und die Legendre'sche Normalform*).

Man kann durch lineare Substitution erreichen, dass die binäre Form f in

$$y_1 y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - \sigma y_2)$$

*) Vergl. die Darstellung bei F. Müller, Schlömilch's Zeitschrift, XVIII, p. 280.

übergeht, wo σ irgend eines der sechs Doppelverhältnisse ist. Dann also wird, von einem Zahlenfactor abgesehen, das elliptische Integral

$$(10)\qquad \int \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{\sqrt{y_1 y_2 (y_2 - y_1)(y_2 - \sigma y_1)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\sigma y)}}.$$

Die Invarianten g_2, g_3, Δ nehmen folgende Werthe an:

$$(11)\qquad \begin{cases} g_2 = \dfrac{\sigma^2 - \sigma + 1}{12}, \\ g_3 = \dfrac{(\sigma+1)(2\sigma-1)(\sigma-2)}{432}, \\ \Delta = \dfrac{\sigma^2(1-\sigma)^2}{256} \end{cases}$$

und normiren wir (10), indem wir $\sqrt[12]{\Delta}$ im Zähler zusetzen, so kommt:

$$(12)\qquad \int \frac{\sqrt[6]{\dfrac{\sigma(1-\sigma)}{16}} \cdot dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\sigma y)}} = \int \frac{\sqrt[3]{\dfrac{\varkappa\varkappa'}{4}} \cdot dy}{\sqrt{y \cdot (1-y)(1-\varkappa^2 y)}},$$

wo ich, wie es üblich ist, $\sigma = \varkappa^2$, $1 - \sigma = \varkappa'^2$ gesetzt habe*). Der Modul $\varkappa$ ist also hier die *Quadratwurzel* aus dem Doppelverhältnisse und als *solche* von keiner wesentlichen Bedeutung. Vielmehr ist *das Doppelverhältniss selbst* im Folgenden überall die eigentlich in Betracht kommende Grösse, und ich schreibe nur gelegentlich $\varkappa^2$ statt σ, um die Formeln den gewöhnlich gebrauchten ähnlicher zu machen.

Nun aber betrachtet man durchgängig nicht (10) als die einfachste Form des elliptischen Integrals, sondern die Legendre'sche Normalform:

$$(13)\qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - \varkappa^2 z^2}},$$

die, von dem Zahlenfactor 2 abgesehen, aus (10) durch die quadratische Transformation $y = z^2$ entsteht. Dem gegenüber kann nicht stark genug betont werden, dass alle Entwickelungen in der Theorie der elliptischen Functionen, welche an Jacobi's Darstellungsweise anknüpfen, sich im Wesen der Sache auf das Integral (10) beziehen und nur der historischen Continuität zu Liebe im Legendre'schen Normalintegrale ihren Ausgangspunkt nehmen. In der That, die Perioden von (13) sind nach Jacobi's Bezeichnung $4K$, $2iK'$, während (10) $2K$ und $2iK'$ als Perioden ergiebt; und $\frac{iK'}{K}$ ist diejenige Grösse,

*) Was Hr. Dedekind in seinem Aufsatze *Valenz* nennt, ist also nichts Anderes als die absolute Invariante des Integrals (10) oder (12):

$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}.$$

welche man als transcendenten Modul zu betrachten pflegt, nicht $\frac{iK'}{2K}$. Anders ist es vielfach in Abel's Arbeiten; bei ihm wird das Legendre'sche Integral aus dem allgemeinen $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ durch *lineare* Substitution hergestellt. Ich werde weiter unten noch auf die sich dann ergebenden Beziehungen zurückkommen, und bemerke hier nur, dass dann die Bedeutung von $\varkappa$ minder einfach ist (siehe Abschn. II., § 9.).

§ 4.

Die quadratische Transformation und die Transformation vierter Ordnung.

Neben dem Legendre'schen Integrale entstehen aus (10) durch quadratische Transformation noch zwei andere, die man erhält, wenn man $(1-y)$, bez. $(1-\sigma y)$ durch z^2 ersetzt. Für den soeben gekennzeichneten Standpunkt sind diese drei Integrale gleichberechtigt, und so mögen sie, von Factoren befreit, hier zusammengestellt werden. Es sind diese:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2 \cdot 1-\sigma z^2}}, \\ &\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2 \cdot 1-(1-\sigma)z^2}}, \\ &\int \frac{dz}{\sqrt{1-\sigma z^2 \cdot 1-(\sigma-1)z^2}}. \end{aligned} \right.$$

Für ihre Invarianten hat man folgende Werthe:

(15)

	g_2	g_3	Δ
I	$\frac{\sigma^2+14\sigma+1}{12}$	$\frac{\sigma^3-33\sigma^2-33\sigma+1}{216}$	$\frac{\sigma(1-\sigma)^4}{16}$
II	$\frac{\sigma^2-16\sigma+16}{12}$	$\frac{-\sigma^3-30\sigma^2+96\sigma-64}{216}$	$\frac{\sigma^4(1-\sigma)}{16}$
III	$\frac{1-16\sigma+16\sigma^2}{12}$	$\frac{-1-30\sigma+96\sigma^2-64\sigma^3}{216}$	$\frac{\sigma(\sigma-1)}{16}$

und also für die Grösse J in den drei Fällen:

$$(16) \qquad J = \frac{(\sigma^2+14\sigma+1)^3}{108\,\sigma(1-\sigma)^4}, \quad \frac{(\sigma^2-16\sigma+16)^3}{108\,\sigma^4(1-\sigma)}, \quad \frac{(1-16\sigma+16\sigma^2)^3}{108\,\sigma(1-\sigma)}.$$

Wir können an diese Formeln Folgerungen für die quadratische und die biquadratische Transformation des elliptischen Integrals knüpfen. Einmal hat man:

Ist J die absolute Invariante des gegebenen Integrals, so erhält man die absoluten Invarianten der durch quadratische Transformation hervorgehenden Integrale, wenn man einen Werth von σ der Gleichung entnimmt:

$$J = \frac{1}{27} \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2 (1 - \sigma)^2}$$

und ihn in die Ausdrücke (16) *einträgt.* Oder auch: *wenn man die sechs Werthe von σ der vorstehenden Gleichung entnimmt und sie in einen der drei Ausdrücke* (16) *einträgt* (*wobei nur drei verschiedene Werthe resultiren*).

Andererseits folgt:

Will man die Invarianten derjenigen Integrale berechnen, die aus dem gegebenen mit der Invariante J durch Transformation vierter Ordnung hervorgehen, so bestimme man aus einer der drei Gleichungen (16) *die sechs Werthe von σ und trage sie in eine zweite der drei Gleichungen ein.*

§ 5.

Darstellung der rationalen Invarianten durch die Perioden.

Ich stelle hier einige den Jacobi'schen Fundamenten entnommene Formeln zusammen, die man zur Berechnung von Δ und g_2 und also von J benutzen kann. Nach dem, was soeben gesagt wurde, entspricht das Jacobi'sche $\frac{iK'}{K}$ unserem $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Soll der Zähler dem Zähler, der Nenner dem Nenner zugeordnet werden, so beachte man, dass $\omega_1 \sqrt[12]{\Delta}$ resp. $\omega_1 \sqrt[4]{g_2}$ absolut invariant ist. Daher kommt:

$$(17) \quad \begin{cases} \sqrt[12]{\Delta} \cdot \omega_1 = 2iK' \sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}, \\ \sqrt[12]{\Delta} \cdot \omega_2 = 2K \sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}, \end{cases}$$

sowie:

$$(17\,a) \quad \begin{cases} \sqrt[4]{g_2} \cdot \omega_1 = 2iK' \sqrt[4]{\frac{\varkappa^4 - \varkappa^2 + 1}{12}}, \\ \sqrt[4]{g_2} \cdot \omega_2 = 2K \sqrt[4]{\frac{\varkappa^4 - \varkappa^2 + 1}{12}}. \end{cases}$$

Nun findet man p. 89 der Fundamenta:

$$\{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots\}^6 = \frac{2\varkappa\varkappa' K^3}{\pi^3 \sqrt{q}}, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Also folgt:

$$(18) \qquad \omega_2 \sqrt[12]{\Delta} = \pi \cdot q^{\frac{1}{6}} \cdot \Pi (1 - q^{2\nu})^2, \quad q = e^{i\pi\omega}.$$

*Diese Formel lässt Δ aus ω_1, ω_2 berechnen**). (Umgekehrt kann sie auch dazu dienen, um bei dem normirten Integrale, bei welchem $\Delta = 1$ ist, ω_2 und ω_1 durch ihr Verhältniss ω auszudrücken.)

Man findet ferner p. 114 der Fundamenta:

$$(1-\varkappa^2+\varkappa^4)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 1 + 15 \cdot 16 \left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3 q^4}{1-q^4} + \frac{3^3 q^6}{1-q^6} + \cdots\right\},$$

also, vermöge (17a):

$$(19) \quad g_2 \cdot \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3 q^4}{1-q^4} + \frac{3^3 q^6}{1-q^6} + \cdots\right\}.$$

Aus dieser Formel berechne man g_2.

Beachten wir noch, welchem Werthe sich $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ nähert, wenn q verschwindet. Man findet in erster Annäherung:

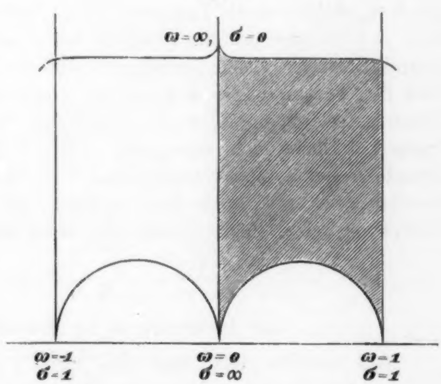
$$(20) \qquad J = \frac{1}{1728\, q^2}.$$

§ 6.

Das Doppelverhältniss als Function von ω. Conforme Abbildung.

Man kann bekanntlich die Perioden $2K$, $2iK'$ als hypergeometrische Reihen darstellen, die Particularlösungen derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $\sigma = \varkappa^2$ als unabhängiger Veränderlicher sind. Daher bildet der Quotient $\omega = \frac{iK'}{K}$ die Halbebene σ auf ein Kreisbogendreieck ab, und es zeigt sich, dass die Winkel dieses Dreiecks sämmtlich Null sind**). Benutzt man für $2K$, $2iK'$ die gewöhnlich angegebenen Reihenentwickelungen, so haben die beiden Dreiecke, welche der positiven und negativen Halbebene σ (der nördlichen und südlichen Halbkugel) entsprechen und von denen das erstere schraffirt werden soll, in der ω-Ebene die in Figur 3. gegebene Lage.

Figur 3.



---

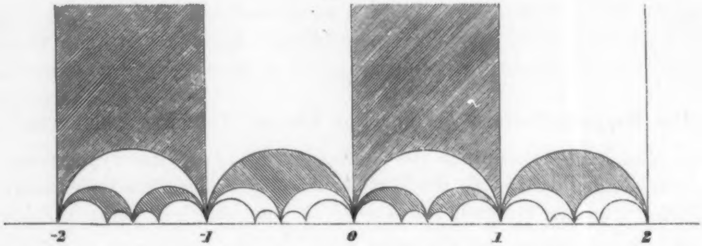
*) Die rechter Hand in (18) stehende Function ist von dem Factor π abgesehen, das Quadrat der bei Dedekind zu Grunde gelegten Function $\eta(\omega)$.

**) Siehe Schwarz in Borchardt's Journal Bd. 75, p. 319.

Zwei Dreieckseiten sind, wie man sieht, gerade Linien geworden, welche sich, als parallele Linien, unter einem Winkel gleich Null treffen; die dritte Seite ist ein Halbkreis, der die beiden geradlinigen Seiten in Punkten der reellen Axe berührt.

Vervielfältigt man diese Dreiecke nach dem Gesetze der Symmetrie, so erhält man eine beliebig zu vermehrende Zahl derselben, welche in lückenloser Aufeinanderfolge die positive Halbebene ω überdecken, aber niemals auf die negative Halbebene hinübergreifen. Ihre Spitzen liegen alle auf der Axe der reellen Zahlen und drängen sich dort in jedem rationalen Punkte zu unendlich vielen zusammen. Die folgende Figur (die nach Belieben vervollständigt werden kann) mag dies Verhältniss erläutern.

Figur 4.



Diese Figur giebt in völlig anschaulicher Weise, wie ω als Function von σ verzweigt ist. Wollte man die Riemann'sche Fläche construiren, welche ω als Function von σ darstellt, so würde man unendlich viele Blätter erhalten, welche bei $\sigma = 0, 1, \infty$ unendlich oft zu unendlich vielen zusammenhängen würden. Statt dessen benutzen wir hier den Umstand (der sich aus der conformen Abbildung selbst ohne Weiteres ergiebt), dass σ eine eindeutige Function von ω ist und zerlegen die Ebene ω in unendlich viele den Halbebenen von σ entsprechende Gebiete. Ich betone dieses Verfahren, weil ich es später oft benutze, um Verhältnisse klar zu legen, die sich auf der *mehrblättrigen* Riemann'schen Fläche kaum übersehen lassen.

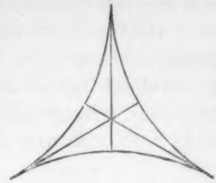
§ 7.

Die Invariante J als Function von ω.

Man beachte jetzt, dass sich nach § 2. die Halbebene σ (resp. die von dem Aequator begrenzte Halbkugel σ) in sechs Unterdreiecke zerlegt, welche den Halbebenen J entsprechen. Genau ebenso kann man ein Kreisbogendreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind, in sechs Unterdreiecke zerlegen. Für das symmetrisch gestaltete Dreieck dieser Art ziehe man einfach, wie Figur 5. zeigt, die drei Höhen:

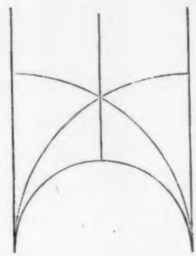
die Unterdreiecke sind dann geradezu congruent. Allgemein also hat man zum Zwecke der Zerlegung durch jede der drei Ecken denjenigen Kreis zu ziehen, der in der Ecke die beiden dort zusammenstossenden Kreisbogen berührt, während er auf der dritten Seite senkrecht steht. Dies liefert z. B. bei den Dreiecken der Figur 3. das in Figur 6. gegebene Bild.

Figur 5.



Jetzt folgt aus dem Princip der Symmetrie: *dass sich ω eben über ein solches kleines Dreieck bewegt, wenn J über seine Halbebene läuft.*

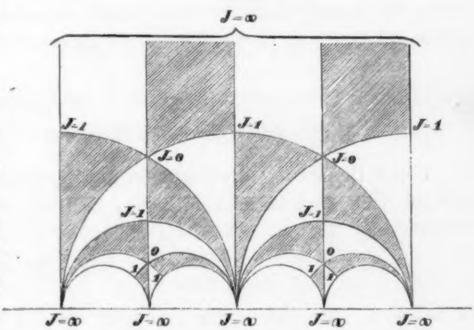
Figur 6.



Man erhält also die conforme Abbildung, welche die Beziehung zwischen J und ω darstellt, wenn man jedes Dreieck der Figur 4. in der nun angegebenen Weise in sechs kleine Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke, der Zeichnung 2 entsprechend, abwechselnd schraffirt, resp. freilässt. So entsteht die Figur 7.

Will man die Sache anders darstellen, indem man ω als Function von J durch eine unendlich-blättrige Riemann'sche Fläche repräsentirt, so folgt, dass bei $J=0$ immer je drei, bei $J=1$ immer je zwei, bei $J=\infty$ immer unendlich viele Blätter cyklisch zusammenhängen.

Figur 7.



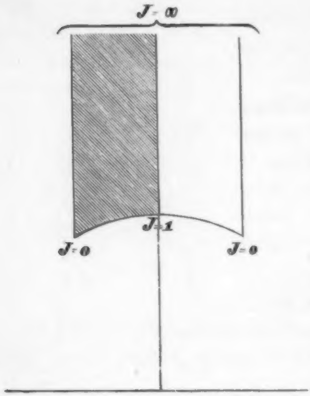
Diese Figur nun — welche die eigentliche Grundlage für das Nachfolgende abgiebt — ist eben diejenige, von der Dedekind bei seiner Darstellung ausgeht. Er kommt zu ihr durch rein arithmetische Betrachtung. Die Werthe von ω, welche zu einem Werthe von J gehören, sind, wie oben bemerkt, aus einem solchen Werthe durch die Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{22}$$

zu berechnen. Nennen wir solche Werthe von ω einander *äquivalent*, so ist aus der Entstehung unserer Figur klar, dass man zu einem beliebig gegebenen Punkte der positiven Halbebene ω, der einem schraf-

firten oder nicht schraffirten Dreiecke angehören mag, die Gesammtheit der mit ihm äquivalenten erhält, wenn man in allen schraffirten, bez. nicht schraffirten Dreiecken die entsprechend gelegenen Punkte markirt. Umgekehrt also — und das ist der Weg, den Hr. Dedekind einschlägt — muss man, von der Untersuchung der Substitutionen (22) ausgehend, zu unserer Dreiecksfigur gelangen, und dann, wenn man will, von ihr aus zur Definition der Grösse J (der *Valenz*).

Figur 8.



Dieser Weg hat in principieller Hinsicht vor dem hier von mir eingeschlagenen durchaus den Vorzug; aber ich wünschte mich möglichst an die bekannten Resultate der Theorie der elliptischen Functionen anzuschliessen, da ich später doch auf sie zurückgreifen muss, wenn ich nicht zu weitläufig werden will.

Uebrigens sei es mir weiterhin gestattet, die Dreiecke der Figur 7. als *Elementardreiecke* zu bezeichnen. Die Vierecke aber von der Art des in nebenstehender Figur dargestellten, welche durch Aneinanderlegung zweier Elementardreiecke entstehen und somit als Bilder der (zweckmässig zerschnittenen) Gesammtebene J gelten können, sollen gelegentlich *Elementarvierecke* genannt werden.

§ 8.

Eintheilung der Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$.

Unter Benutzung der nunmehr gewonnenen Figur ist es sehr leicht und für viele Zwecke sehr nützlich, sich ein deutliches Bild der Transformationen (22):

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

zu machen. Beachten wir hier nur die bei einer solchen Transformation fest bleibenden Elemente. Sie können conjugirt imaginär, zusammenfallend, oder reell und verschieden sein. Im ersteren Falle will ich die Substitution eine *elliptische*, im zweiten Falle eine *parabolische*, im dritten eine *hyperbolische* nennen. Bei einer elliptischen Substitution gehört eins der beiden festbleibenden Elemente der *positiven* Halbebene ω an, die durch unsere Figur überdeckt wird. Markiren wir vorab in ihr die zu einem beliebig gewählten Anfangswerthe äquivalenten Punkte und fragen nun, wann von diesen verschiedenen Punk-

ten im besonderen Falle einige zusammenfallen können. Es ist das offenbar nur dann der Fall, wenn wir es mit einer Ecke des Fundamentaldreiecks zu thun haben. Für die eine Ecke ist $J=0$ $(g_2=0)$, die mit ihr äquivalenten Punkte rücken zu drei und drei zusammen. Für die zweite Ecke ist $J=1$ $(g_3=0)$ und die äquivalenten Stellen sind zu zwei und zwei vereinigt. Die dritte Ecke kommt hier nicht in Betracht, da sie der Axe der reellen Zahlen angehört. Nun repräsentirt in Figur 8. die eine Ecke des schraffirten Dreiecks, $(g_2=0)$, den Werth $\omega=\varrho=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, die andere $(g_3=0)$ den Werth i.

Dementsprechend werden wir den Satz aufstellen:

Von elliptischen Substitutionen $\omega'=\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *giebt es nur zwei Classen; die Einen haben die Periode Drei, die anderen die Periode Zwei. Die ersteren lassen solche Punkte ungeändert, welche mit* $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{3}$, *die anderen solche Punkte, die mit* $\pm i$ *äquivalent sind.*

Arithmetisch bestätigt sich dies durch folgende einfache Ueberlegung. Die Realität der bei den Substitutionen $\omega'=\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ festbleibenden Elemente hängt wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ von dem Vorzeichen der Grösse $(\alpha+\delta)^2-4$ ab. Soll also die Substitution eine elliptische sein, so kann $(\alpha+\delta)$ nur Null oder ± 1 sein. Im ersteren Falle sind die festbleibenden Elemente $\omega=\frac{-\delta\pm i}{\gamma}$, im anderen Falle $\omega=\frac{-\delta\pm\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}{\gamma}$, und dies sind Werthe, welche mit $\pm i$, bez. mit $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ äquivalent sind. — Allgemein berechnet man die Periode einer Substitution, indem man letztere auf die Gestalt bringt:

$$\frac{\omega'-a}{\omega'-b}=\lambda\cdot\frac{\omega-a}{\omega-b},$$

wo a, b die beiden festbleibenden Elemente sind; ist dann n der Exponent der niedrigsten Potenz von λ, welche gleich Eins ist, so ist n die Periode. Nun ergiebt sich in unserem Falle mit Rücksicht auf $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ durch Coefficientenvergleichung:

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=(\alpha+\delta)^2-2.$$

Setzen wir hier $(\alpha+\delta)=0$, so kommt $\lambda=-1$, setzen wir $(\alpha+\delta)=\pm 1$, so kommt $\lambda=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, womit bestätigt ist, was über die Perioden der elliptischen Substitutionen gesagt wurde.

Die Bestimmung der Doppelelemente zeigt, dass man eine *parabolische* Substitution hat, wenn $(\alpha+\delta)=\pm 2$ ist. Die Periode der

Substitution (welche dann nicht mehr durch die letztangegebene Regel gegeben wird, da die festbleibenden Elemente zusammenfallen) ist dann nothwendig unendlich; das festbleibende Element wird gleich $-\frac{\delta}{\gamma}$. Das heisst:

Jeder rationale reelle Werth von ω ist festbleibendes Element bei einer parabolischen Substitution.

Diese festbleibenden Elemente sind also keine anderen als diejenigen, in denen $J=\infty$, $\Delta=0$ wird. In der That stossen in jedem solchen Punkte unendlich viele Elementardreiecke zusammen. —

Für die *hyperbolischen* Substitutionen endlich ergiebt sich, dass auch sie eine unendlich grosse Periode besitzen und dass die bei ihnen festbleibenden Elemente niemals rationale Werthe aufweisen. Denn die Quadratwurzel aus $(\alpha+\delta)^2-4$ kann nie rational sein, wenn $|\alpha+\delta|>2$ ist.

§ 9.

Die Perioden ω_1, ω_2 als hypergeometrische Reihen, welche nach J fortschreiten.

Die Dreiecksfigur des § 7. lehrt uns ferner, ω_1 und ω_2 in Function der rationalen Invarianten zu berechnen. Zuvörderst ergiebt sich, dass $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ der Quotient zweier Particularlösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung ist, deren unabhängige Veränderliche die absolute Invariante J ist. Denn allgemein vermittelt der Quotient zweier Particularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung die Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogendreieck*). In unserem Falle sind die drei Winkel des Kreisbogendreiecks $=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ und wir können daher die Constanten α, β, γ der hypergeometrischen Differentialgleichung nach bekannten Formeln folgendermassen wählen:

$$\alpha=\frac{1}{12},\quad \beta=\frac{1}{12},\quad \gamma=\frac{2}{3}.$$

Die Differentialgleichung lautet dann:

$$J(1-J)\cdot\frac{d^2z}{dJ^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}J\right)\cdot\frac{dz}{dJ}-\frac{z}{144}=0. \tag{23}$$

Ich will nun zuerst zwei Particularlösungen z_1, z_2 dieser Differentialgleichung in der Weise angeben, dass $\omega=\frac{z_1}{z_2}$ sich eben über das in Figur 8. gezeichnete Elementarviereck bewegt, wenn J seine ganze Ebene durchläuft. Ich setze jede der Particularlösungen z_1, z_2 in drei Formen, von denen für ein gegebenes J immer mindestens eine

*) Vergl. die Abhandlung von Schwarz in Borchardt's Journal Bd. 75.

convergirt. Von den doppelten Vorzeichen gilt das obere für ein J, das der positiven Halbebene angehört, das untere für die J der negativen Halbebene. Man findet durch elementare Methoden:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
z_1 &= \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J}}\left(\left(\log J - k\right)\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1, \tfrac{1}{J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12}+\varrho, \frac{5}{12}+\varrho, 1+2\varrho, \frac{1}{J}\right)}{\partial\varrho}_{(\varrho=0)}\right)\\
&= \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J-1}}\left(\left(\log(J-1) - k\right)\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, 1, \tfrac{1}{1-J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12}+\varrho, \frac{7}{12}+\varrho, 1+2\varrho, \frac{1}{1-J}\right)}{\partial\varrho}_{(\varrho=0)}\right)\\
&= \pm\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}, J\right)\\
&\quad + \left(i\mp(2+\sqrt{3})\right)\cdot\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}, 1-J\right)\\
z_2 &= -\frac{1}{\sqrt[12]{J}}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1, \tfrac{1}{J}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt[12]{J-1}}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, 1, \tfrac{1}{1-J}\right)\\
&= \pm i\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}, J\right)\\
&\quad + \left(1\mp(2+\sqrt{3})\,i\right)\cdot\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}\cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}, 1-J\right).
\end{aligned}\right.$$

Hier bedeutet k die Zahl

$$-5\log 2 - 3\log 3 + 2\sqrt{3}\log\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Um jetzt ω_1, ω_2 selbst zu berechnen, setze man $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_1 = Mz_1$, $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = Mz_2$, wo M einen Multiplicator bedeutet, und findet zunächst:

$$\omega_1\frac{d\omega_2}{dJ} - \omega_2\frac{d\omega_1}{dJ} = \frac{-iM^2}{2\pi\sqrt[6]{\Delta}}J^{-\frac{2}{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber nach dem Früheren

$$\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_1 = 2iK'\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}},\qquad \sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = 2K\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}$$

und man hat die bekannte Formel:

$$iK' \cdot \frac{dK}{d(\varkappa^2)} - K\frac{d(iK')}{d(\varkappa^2)} = \frac{i\pi}{4\varkappa^2(1-\varkappa^2)}.$$

Der Vergleich ergiebt nach kurzer Zwischenrechnung:

$$M = \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}},$$

und also haben wir für ω_1, ω_2 allgemein folgende Darstellung:

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{z_1}{\sqrt[12]{\Delta}}, \\ \omega_2 &= \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{z_2}{\sqrt[12]{\Delta}}. \end{aligned} \right.$$

Ist also ein elliptisches Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ vorgelegt, so bedarf man zur Berechnung der Perioden ω_1, ω_2 durchaus nicht der Auflösung der Gleichung $f = 0$, wie man gewöhnlich annimmt, indem man die Perioden durch die zwischen den Verzweigungspunkten genommenen Integrale definirt. Sondern es genügt, aus den Coefficienten von f die rationalen Invarianten zu berechnen und ihre Werthe in (24), (25) einzutragen.

Der Erste, der dieses Resultat abgeleitet hat, scheint Hr. Bruns zu sein*). Ich glaubte es hier von mir aus entwickeln zu sollen, weil es für das Folgende durchaus wesentlich ist, die Beziehung zwischen den Perioden ω_1, ω_2 und den Invarianten g_2, g_3, Δ als eine directe zu betrachten, zu deren Herstellung man der Vermittelung von $\sigma = \varkappa^2$ nicht bedarf, und habe eben deshalb auch die fertigen, bei der Berechnung unmittelbar brauchbaren Formeln hergesetzt.

---

*) Dorpater Festschrift: *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung*. 1875. Hr. Bruns beschränkt sich auf die Betrachtung des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

und giebt den hypergeometrischen Reihen eine etwas andere Form.

Abschnitt II.

Die Gleichungen zwischen den Invarianten bei Transformation der elliptischen Functionen. Auflösung der Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades mit $A=0$.

§ 1.

Gleichungen, welche einen Parameter enthalten.

Es sei

$$\varphi(s, z) = 0$$

eine Gleichung, in der s die Unbekannte, z einen veränderlichen Parameter bedeuten soll. So construire man über der Ebene, welche die complexen Werthe von z repräsentirt, die zu s gehörige Riemann'sche Fläche. Dieselbe hat eine doppelte Eigenschaft, welche sie geeignet erscheinen lässt, als gemeinsames Charakteristicum aller Gleichungen zu dienen, die aus $\varphi = 0$ durch Tschirnhausentransformation entstehen. Erstlich nämlich bleibt sie ungeändert, wenn man statt s eine rationale Function s' von s und z als neue Unbekannte einführt; zweitens gilt auch der umgekehrte Satz, dass s' in s und z rational ist, wenn s' in Bezug auf z dieselbe Riemann'sche Fläche besitzt wie s.

Handelt es sich also darum, eine Gleichung, die den Parameter z enthalten soll, in einfachster Weise aufzustellen, so studire man zunächst die zu ihr gehörige über der z-Ebene construirte Riemann'sche Fläche. *Dann führe man als Unbekannte die einfachste algebraische Function ein, welche in dieser Riemann'schen Fläche existirt.*

Diese Forderung einer einfachsten Function wird, sobald das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche grösser als Null ist, einer Definition bedürfen und je nach dem Zwecke, den man verfolgt, verschieden ausfallen. Ist aber $p=0$ — und das ist der Fall bei allen im Folgenden explicite behandelten Gleichungen — so kann kein Zweifel sein, dass man als einfachste Function diejenige zu betrachten hat, durch die sich alle anderen rational ausdrücken. Diese Function, die weiterhin τ genannt werden soll, ist, von linearen Substitutionen $\left(\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ abgesehen, völlig bestimmt. Durch ihre Einführung gewinnt die Gleichung folgende Gestalt:

$$z = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}, \tag{1}$$

wo φ, ψ zwei ganze rationale Functionen sind, und die vielfachen Wurzeln, welche die Gleichung

$$z \cdot \psi(\tau) - \varphi(\tau) = 0$$

bei veränderlichem z aufweist, entsprechen genau den Verzweigungspunkten, welche die Riemann'sche Fläche besitzt.

§ 2.

Gleichungen, welche sich durch elliptische Modulfunctionen lösen lassen.

Der Parameter, welcher soeben z genannt wurde, soll jetzt die absolute Invariante eines elliptischen Integrals sein und demnach mit J bezeichnet werden. So frage man: *Wie muss s als Function von J verzweigt sein, wenn sich die Gleichung*

$$\varphi(s, J) = 0$$

durch elliptische Modulfunctionen soll lösen lassen? Ich meine, die Gleichung soll sich in der Weise lösen lassen, dass man aus J das Periodenverhältniss ω berechnet und man nun eindeutige in der ganzen positiven Halbebene ω definirte Functionen von ω hat, welche die Wurzeln von $\varphi = 0$ repräsentiren.

Dazu ist nöthig und hinreichend, dass sich die einzelne Wurzel s, als Function von ω aufgefasst, innerhalb der positiven Halbebene ω nicht verzweigt.

Daher hat man unmittelbar mit Rücksicht auf Abschnitt I. den Satz: *Verzweigungsstellen dürfen in der Riemann'schen Fläche, welche s als Function von J darstellt, nur bei $J = 0, 1, \infty$ liegen. Bei $J = 0$ können beliebig oft drei Blätter zusammenhängen, bei $J = 1$ beliebig oft zwei Blätter. Bei $J = \infty$ kann die Verzweigung irgend welche sein**).

Suchen wir insbesondere Gleichungen vom Geschlechte Null und setzen sie in die Form (1):

$$J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

so darf φ neben einfachen Factoren nur dreifache, $\varphi - \psi$ neben einfachen Factoren nur doppelte, ψ Factoren beliebiger Multiplicität enthalten. Aber keine Gleichung $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, die von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi - \psi = 0$ verschieden ist, darf mehrfache Wurzeln besitzen.

Zu diesen Gleichungen gehören z. B. die Gleichungen (9) und (16) des vorigen Abschnitts. Es gehören aber auch dazu, wie ich beiläufig anführe, zwei der drei Gleichungen, die ich Math. Annalen Bd. XII, p. 175 aufstellte. Diese Gleichungen sind deshalb bemerkenswerth,

---

*) Genau ebenso bestimmt man alle transcendenten Functionen von J, welche sich durch Modulfunctionen darstellen lassen. Zugleich erledigt man das Problem: *Alle Untergruppen aufzustellen, welche in der Gesammtheit der Substitutionen*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

enthalten sind.

weil sie mit dem Transformationsproblem der elliptischen Functionen Nichts zu thun haben, und also ein erstes ausgerechnetes Beispiel abgeben für die allgemeineren in diesem Paragraphen gemeinten durch elliptische Modulfunctionen lösbare Gleichungen.

§ 3.

Die Gleichungen zwischen J' und J.

Ich lasse nunmehr die Beschränkung auf das Transformationsproblem der elliptischen Functionen eintreten. J und J' seien die absoluten Invarianten zweier elliptischer Integrale, die durch Transformation n^{ter} Ordnung aus einander hervorgehen, wo n eine Primzahl sein mag. Um die Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades aufzustellen, welche J' mit J verknüpft, studire ich nach § 1. zunächst die Verzweigung von J' in Bezug auf J.

Bekanntlich sucht man gewöhnlich nicht die Gleichungen zwischen J und J', sondern die Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen (Modulquadraten) $\varkappa^2$, λ^2 oder die zwischen den achten aus ihnen gezogenen Wurzeln $u=\sqrt[4]{\varkappa}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$. Ich werde weiter unten (§ 1. des vierten Abschnittes) einige auf diese *Modulargleichungen* bezügliche Bemerkungen machen. Hier sei nur erwähnt, dass die Verzweigung, welche z. B. v in Bezug auf u aufweist, sehr viel complicirter ist, als die von J' in Bezug auf J.

Die Gleichungen zwischen J' und J sind zuerst von Felix Müller in seiner 1867 erschienenen Dissertation im Anschlusse an Weierstrass' Vorlesungen behandelt worden*). Er geht von dem Studium der doppeltperiodischen Functionen aus und gelangt für $n=2, 3, 4, 5, 7$ zu fertigen Gleichungen. Es hat dann 1874 Brioschi die Frage von algebraischer Seite in Angriff genommen, indem er die Transformation des elliptischen Integrals direct in Betracht zog**). Die folgende Herleitung der Transformationsgleichungen für $n=2, 3, 4, 5, 7, 13$ unterscheidet sich wesentlich dadurch, dass nur von den Variablen J und ω, nicht aber von der Integrationsvariablen des elliptischen Integrals oder von diesem Integrale selbst Gebrauch gemacht wird***). Und selbst die Variable ω tritt nur in die *Betrachtung* ein, vermöge deren die Verzweigung von J' in Bezug auf J erschlossen wird, nicht aber in die *Rechnung*.

---

*) *De transformatione functionum ellipticarum*, Berlin 1867. Vergl. auch die spätere Veröffentlichung: *Ueber die Transformation vierten Grades der elliptischen Functionen*, Berlin, Programm der Realschule, 1872.

**) *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques*, Comptes Rendus 79, p. 1065 (1874), und 80, p. 261 (1875).

***) Etwas Aehnliches scheint Hr. Dedekind zu beabsichtigen; vergl. den Schlussparagraphen seiner Arbeit.

§ 4.

Verzweigung von J' in Bezug auf J.

Ich will, des einfacheren Ausdrucks wegen, die Primzahl n im Folgenden grösser als 3 voraussetzen. Ich denke mir ferner J' so berechnet, dass man irgend einen zu J gehörigen Werth von ω herausgreift und nun ω' der Reihe nach gleichsetzt:

$$(2) \qquad \frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega+1}{n}, \ldots\ldots \frac{\omega+(n-1)}{n}, \quad -\frac{1}{n\omega}.$$

Dem Früheren zufolge kann eine Verzweigung von J' in Bezug auf J nur bei $J=0,\ 1,\ \infty$ Statt haben.

Bei $J=0$ hängen die Blätter der (unendlich-blättrigen) Riemann'schen Fläche, welche ω als Function von J darstellt, nach § 7. des ersten Abschnittes zu drei und drei zusammen. Dies ist also, allgemein zu reden, auch bei der Riemann'schen Fläche der Fall, welche J' darstellt, insofern J' eine eindeutige Function von ω ist. Ausgenommen ist nur, wenn an einer solchen Stelle auch $J'=0$ ist. Dann ist das betr. Blatt der Fläche J' an der Stelle $J=0$ gar nicht verzweigt.

Jetzt ist für $J=0$ ein Werth von ω gleich $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\varrho$. Das entsprechende J' ist somit aus folgenden Werthen von ω' zu berechnen:

$$\omega' = \frac{\varrho}{n}, \quad \frac{\varrho+1}{n}, \ldots\ldots \frac{\varrho+(n-1)}{n}, \quad -\frac{1}{n\varrho}$$

und es entsteht die Frage, ob unter diesen Werthen einige sind, welche mit ϱ äquivalent sind, und für die also auch $J'=0$ ist?

Man hat also den Ansatz:

$$(3) \qquad \frac{\varrho+\varkappa}{n} = \frac{\alpha\varrho+\beta}{\gamma\varrho+\delta},$$

wo $\varkappa$ eine der Zahlen $0,\ 1, \cdots (n-1)$ bedeutet und $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ irgend welche ganze Zahlen sind, die $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ergeben. Dies erweist sich als möglich und zwar zweimal als möglich, wenn n sich in complexe Factoren der Form

$$(\gamma\varrho+\delta)\,(\gamma'\varrho+\delta')$$

zerlegen lässt, d. h. also, da $n>3$ angenommen wurde, wenn n von der Gestalt $6\mu+1$ ist.

Daher haben wir den Satz:

Ist $n=6\mu+5$, so hängen bei $J=0$ die $(n+1)$ Blätter der auf J' bezüglichen Riemann'schen Fläche zu drei und drei cyklisch zusammen. Für $n=6\mu+1$ dagegen verlaufen bei $J=0$ zwei Blätter isolirt und nur die übrigen $(n-1)$ ordnen sich zu drei und drei in Cyklen.

Genau so erschliesst man die Verzweigung bei $J=1$. Dann ist ein zu J gehöriger Werth von ω gleich i, und es fragt sich, ob sich

unter den zugehörigen Werthen von ω' solche befinden, die mit i äquivalent sind. Man findet, dass es zwei solche Werthe giebt, wenn $n = 4\mu + 1$ ist, dass es aber keinen solchen Werth giebt für $n = 4\mu + 3$ Daher:

Bei $J = 1$ hängen für $n = 4\mu + 3$ alle Blätter paarweise zusammen; ist aber $n = 4\mu + 1$, so bleiben zwei Blätter isolirt und nur die übrigen verzweigen sich zu zwei und zwei.

Betrachten wir endlich den Werth $J = \infty$. Ich behaupte:

Die $(n+1)$ zugehörigen Werthe von J' sind ebenfalls unendlich. Aber nur n der betr. Blätter hängen in einem Cyklus zusammen, ein Blatt verläuft isolirt.

Denn nehmen wir etwa, $J = \infty$ entsprechend, $\omega = i\infty$, d. h. gleich einer sehr grossen rein imaginären Zahl. Dann werden unter den Werthen (2) von ω' die n ersten:

$$\frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega+1}{n}, \ldots \frac{\omega+(n-1)}{n}$$

ebenfalls gleich $i\infty$, der letzte:

$$-\frac{1}{n\omega}$$

gleich Null. Die zugehörigen J' sind also gewiss alle unendlich. Jetzt lassen wir $i\infty$ allmählich um *reelle* Incremente wachsen, bis es $i\infty + 1$ geworden ist. Dann vertauschen sich die n ersten Repräsentanten cyklisch, da

$$\frac{\omega+n}{n} \text{ mit } \frac{\omega}{n}$$

äquivalent ist. Der letzte Repräsentant aber ist mit seinem eignen Anfangswerthe äquivalent geworden.

§ 5.

Vertauschung von J und J'.

Selbstverständlich ist J in Bezug auf J' gerade so verzweigt, wie J' in Bezug auf J. Wir erhalten also dieselbe Riemann'sche Fläche in doppelter Bedeutung, oder, anders ausgedrückt: *Es giebt eine eindeutige Transformation der Riemann'schen Fläche in sich, welche der Vertauschung von J und J' entspricht.*

Diese eindeutige Transformation hat nothwendig die Periode *Zwei*, weil eine zweimalige Vertauschung den ursprünglichen Zustand wieder herstellt. Nun entsprechen $J = \infty$, wie wir soeben sahen, nur zwei Punkte der Riemann'schen Fläche, und für diese war auch J' gleich ∞. Ich behaupte zunächst:

Bei der in Rede stehenden eindeutigen Transformation werden diese beiden Punkte mit einander vertauscht.

Man sieht dies sofort, wenn man wieder, wie es eben geschah, $\omega = i\infty$ setzt und um reelle Incremente wachsen lässt. So geht

$$\omega' = -\frac{1}{n\omega}$$

bereits in einen mit seinem anfänglichen Werthe äquivalenten Werth über, wenn ω um $\frac{1}{n}$ zugenommen hat, so dass es n-mal einen äquivalenten Werth angenommen hat, wenn ω zum ersten Male mit seinem Anfangswerthe äquivalent geworden ist. Für die anderen n Repräsentanten ω' gilt das Umgekehrte; sie werden mit ihrem ursprünglichen Werthe zum ersten Male äquivalent, wenn ω dies bereits n-mal gethan hat. —

Beachten wir ferner solche, nach dem vorigen Paragraphen möglicherweise paarweise vorhandene Stellen, in denen J und J' gleichzeitig Null oder gleichzeitig Eins sind, und die sich dadurch auf der Riemann'schen Fläche kenntlich machen, dass bei $J = 0$ resp. bei $J = 1$ zwei Blätter isolirt verlaufen. Offenbar ändern diese Stellen bei Vertauschung von J und J' ihren Charakter nicht; *sie bleiben also bei der betr. eindeutigen Transformation entweder einzeln erhalten oder vertauschen sich wechselweise.* Welches von Beiden eintritt, mag hier unentschieden bleiben.

§ 6.

Das Geschlecht der Transformationsgleichung.

Um das Geschlecht der Gleichung zwischen J und J' zu berechnen, unterscheide man jetzt n nach dem Modul 12. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wie oft bei $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$ eine Anzahl von μ Blättern im Cyklus zusammenhängen. Also z. B. $4\nu \cdot 3 + 2 \cdot 1$ heisst, dass 4ν-mal je 3 Blätter zusammenhängen und ausserdem zweimal je ein Blatt isolirt verläuft.

	$J = 0$	$J = 1$	$J = \infty$
$n = 12\nu + 1$	$4\nu \cdot 3 + 2 \cdot 1$	$6\nu \cdot 2 + 2 \cdot 1$	$1 \cdot (12\nu + 1) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 5$	$(4\nu + 2) \cdot 3$	$(6\nu + 2) \cdot 2 + 2 \cdot 1$	$1 \cdot (12\nu + 5) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 7$	$(4\nu + 2) \cdot 3 + 2 \cdot 1$	$(6\nu + 4) \cdot 2$	$1 \cdot (12\nu + 7) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 11$	$(4\nu + 4) \cdot 3$	$(6\nu + 6) \cdot 2$	$1 \cdot (12\nu + 11) + 1 \cdot 1$

Nun hat man die bekannte Regel

$$p = -n + \sum \frac{\nu - 1}{2},$$

wo n die um Eins verminderte Blätterzahl, ν die Zahl der im einzelnen

Verzweigungspunkte cyklisch verbundenen Blätter ist. Daher kommt in den vier Fällen:

(4) $$p = \nu - 1,\ \ \nu,\ \ \nu,\ \ \nu + 1.$$

Das Geschlecht ist also gleich Null für $n = 5, 7, 13$. *Für* $n = 11$, 17, 19 *wird es gleich Eins etc.*

Die Fälle $n = 2$, 3 blieben im Vorangehenden ausgeschlossen; wir werden weiterhin sehen, dass auch bei ihnen das Geschlecht gleich Null ist.

§ 7.

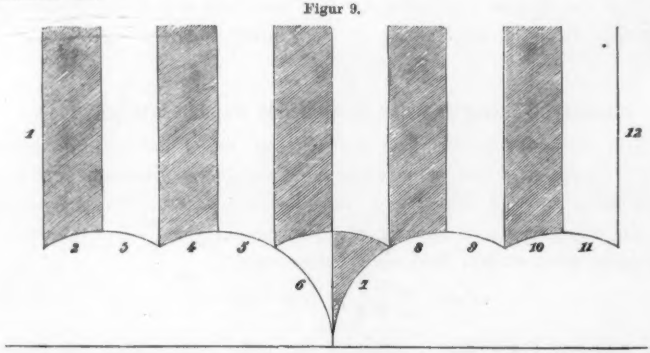
Das Fundamentalpolygon.

Nachdem bekannt ist, welche Verzweigungsstellen J' in Bezug auf J aufweist, handelt es sich darum, zu entscheiden, wie die verschiedenen Verzweigungspunkte auf einander bezogen sind (wie sie durch Verzweigungsschnitte zu verbinden sind). Um hierüber Klarheit zu bekommen, betrachte ich in der ω-Ebene ein Polygon, welches aus $(n+1)$ neben einander liegenden Elementarvierecken besteht (Abschnitt I., § 7.) und das ich wegen seiner Wichtigkeit für die Transformationstheorie das *Fundamentalpolygon* nenne. Man wende nämlich auf das Elementarviereck der Figur 8. die $(n+1)$ Substitutionen an:

$$\omega' = \omega,\ \ \omega \pm 1,\ \cdots\ \omega \pm \left(\frac{n-1}{2}\right),\ \ -\frac{1}{\omega}.$$

So entsteht eine Figur, welche z. B. für $n = 5$ folgendermassen gestaltet ist.

Figur 9.



Man lasse jetzt ω das Polygon durchlaufen, setze $\omega' = \frac{\omega}{n}$ und betrachte die zugehörigen J und J'. So entsteht offenbar, wenn wir von den Randpunkten des Polygons absehen, jede mögliche Combination J und J' *einmal.* Die Randpunkte aber müssen, allgemein zu reden, paarweise zusammengehören, so, dass zwei zusammengehörige Randpunkte *dasselbe* J und *dasselbe* J' liefern.

Heftet man jetzt die Ränder des Fundamentalpolygons in zweckentsprechender Weise zusammen, so entsteht eine geschlossene Fläche, deren einzelner Punkt ausnahmslos eindeutig der einzelnen Combination J, J' zugeordnet ist. Mit anderen Worten: *dies ist eben die Riemann'sche Fläche, welche wir suchen; nur ist sie, statt* $(n+1)$*-blättrig über der* J*-Ebene ausgebreitet zu sein, frei im Raume gelegen gedacht.* Den Halbebenen J entsprechend zerfallen die $(n+1)$ Blätter der ursprünglichen Riemann'schen Fläche in $2(n+1)$ Halbblätter; dem entspricht hier, dass unser Fundamentalpolygon und also unsere neue Fläche in $2(n+1)$ abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Dreiecke zerlegt ist. Wo die ursprüngliche Fläche Verzweigungspunkte besitzt, da stossen auf der neuen Fläche eine grössere (nothwendig *gerade*) Zahl von Dreiecken zusammen. Und statt zu überlegen, wie die Verzweigungspunkte durch Verzweigungsschnitte zu verbinden waren, beachten wir hier die Aufeinanderfolge der Dreiecke. —

Die Benutzung solcher im Raume gelegener Flächen, welche, statt mehrblättrig zu sein, in Gebiete zerlegt sind, scheint in vielen Fällen äusserst zweckmässig, wie ich in Ergänzung einer analogen Bemerkung des § 6. (Abschn. I.) ausdrücklich hervorheben möchte*). Die Regel, vermöge deren man das Geschlecht der Fläche aus Blätterzahl und Verzweigungspunkten berechnet, verwandelt sich für sie in den sogenannten verallgemeinerten Euler'schen Polyedersatz:

$$e + s = k - 2p + 2; \tag{5}$$

die Zahl der Ecken (e), vermehrt um die Zahl der Seitenflächen (s), ist gleich der Zahl der Kanten (k) vermindert um $(2p-2)$.

§ 8.

Zusammengehörigkeit der Kanten des Fundamentalpolygons.

Die Zusammengehörigkeit der Kanten des Fundamentalpolygons ist im einzelnen Falle sehr einfach anzugeben. Zusammengehörige Randpunkte müssen dasselbe J und dasselbe J' besitzen; es müssen also die zugehörigen ω sowohl, als die zugehörigen $\frac{\omega}{n}$ äquivalent sein. Nun sieht man sofort, dass eine Substitution

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dann und nur dann ein $\frac{\omega'}{n}$ ergiebt, das mit $\frac{\omega}{n}$ äquivalent ist, *wenn* β *durch* n *theilbar ist.* Man suche also unter den Substitutionen, deren β durch n theilbar ist, diejenigen aus, welche aus einer Kante des Fundamentalpolygons eine andere machen: die beiden Kanten sind dann auf der Riemann'schen Fläche zu vereinigen.

*) Ich gebe diese Bemerkungen hier nicht als neu, da ich höre, dass Riemann selbst sich vielfach seine Flächen in dieser Weise gedacht hat.

Ich bemerke, dass sich unter diesen Substitutionen immer zwei *parabolische* befinden, nämlich:

$$\omega' = \omega + n, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega + 1}.$$

Es findet sich ferner jedesmal ein Paar elliptischer Substitutionen, sobald für $J = 0$ oder $J = 1$ zwei Blätter der Fläche J' isolirt verlaufen. Der Rest wird von *hyperbolischen* Substitutionen gebildet.

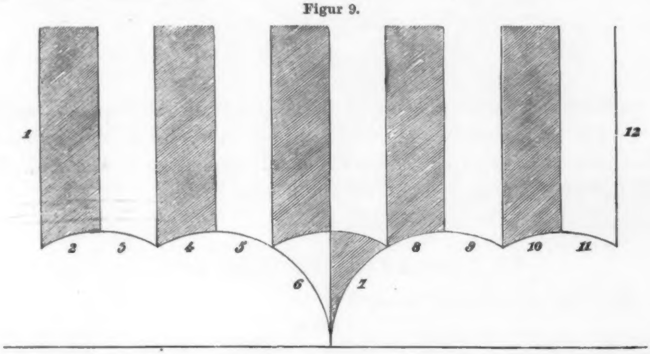
Ich werde dies jetzt in den nächstfolgenden Paragraphen für diejenigen Fälle, welche $p = 0$ ergeben, also $n = 5, 7, 13$ näher ausführen. Die Riemann'sche Fläche kann dann in eine Ebene ausgebreitet und also ihre Eintheilung in Gebiete unmittelbar durch Zeichnung veranschaulicht werden.

§ 9.

Die Riemann'sche Fläche für $n = 5$.

Ich setze das bereits oben angegebene Fundamentalpolygon für $n = 5$ noch einmal her:

Figur 9.



die nebengeschriebenen Zahlen dienen zur genauen Bezeichnung der Kanten. So hat man folgende Substitutionen:

1) Die parabolischen Substitutionen

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega' = \omega + 5, \\ \omega' = \dfrac{\omega}{\omega + 1}. \end{cases}$$

Die erstere vereinigt die Kanten 1 und 12, die andere 4, 5, 6 und 9, 8, 7.

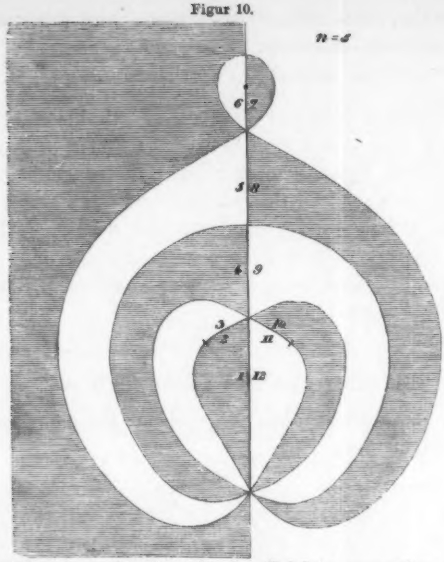
2) Die elliptischen Substitutionen von der Periode 2:

$$(7) \qquad \omega' = \frac{2\omega - 5}{\omega - 2}, \quad \omega' = -\frac{2\omega + 5}{\omega + 2}.$$

Die erstere vereinigt 10 und 11, die zweite 2 und 3.

Wir erhalten daher folgende Figur für die Eintheilung der Riemann'schen Fläche in Gebiete:

Figur 10.



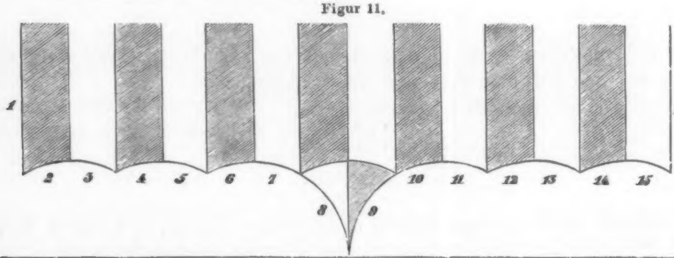
Es versteht sich, dass die Gestalt der Gebiete nur schematisch gemeint ist. — Die Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ 12 weisen auf, wo in der Figur die ebenso numerirten Kanten des Fundamentalpolygons zu suchen sind. Die betr. Linienstücke sind etwas stärker ausgezogen.

§ 10.

Die Riemann'sche Fläche für $n = 7$.

Man hat das Fundamentalpolygon:

Figur 11.



dann ferner die Substitutionen:

1) Parabolische:

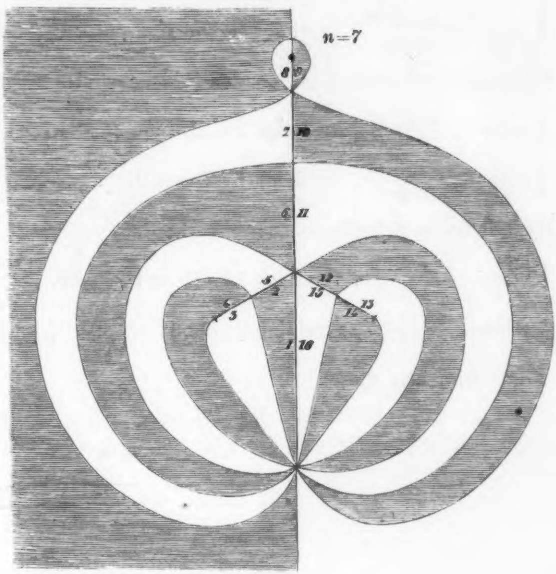
$$(8) \qquad \begin{cases} \omega' = \omega + 7, \text{ vereinigt 1 und 16.} \\ \omega' = \dfrac{\omega}{\omega + 1}, \text{ vereinigt 6, 7, 8 mit 11, 10, 9.} \end{cases}$$

2) Elliptische von der Periode 3:

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega' = \dfrac{2\omega - 7}{\omega - 3}, \text{ vereinigt } 12,\ 13 \text{ mit } 15,\ 14, \\ \omega' = -\dfrac{2\omega + 7}{\omega + 3}, \text{ vereinigt } 2,\ 3 \text{ mit } 5,\ 4. \end{cases}$$

So kommt die Figur:

Figur 12.

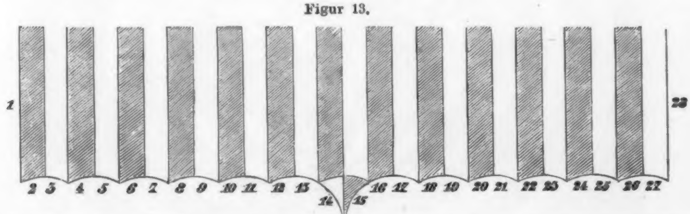


§ 11.

Die Riemann'sche Fläche für $n = 13$.

Das Fundamentalpolygon hat folgende Gestalt:

Figur 13.



Die zugehörigen Substitutionen sind:

1) Parabolische Substitutionen:

$$(10)\quad \begin{cases} \omega' = \omega + 13 \text{ (vereinigt 1 und 28)}, \\ \omega' = \dfrac{\omega}{\omega + 1} \text{ (vereinigt 12, 13, 14 und 17, 16, 15)}. \end{cases}$$

2) Elliptische Substitutionen von der Periode Zwei:

$$(11)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{5\omega - 26}{\omega - 5}, \text{ vereinigt 24 und 25}, \\ \omega' = -\dfrac{5\omega + 26}{\omega + 5}, \text{ vereinigt 4 und 5}. \end{cases}$$

3) Elliptische Substitutionen von der Periode Drei:

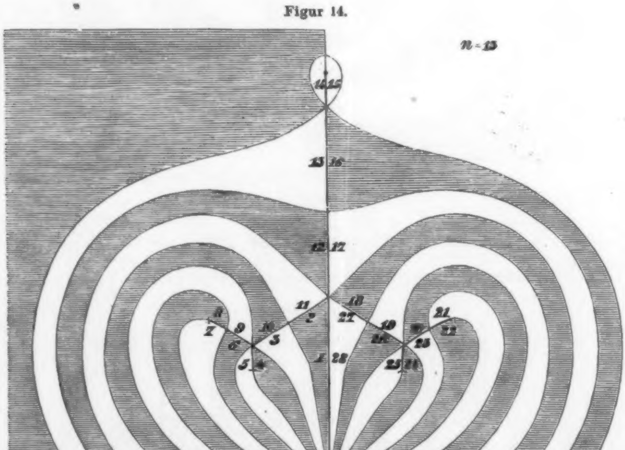
$$(12)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{3\omega - 13}{\omega - 4}, \text{ vereinigt 20, 21 mit 23, 22}, \\ \omega' = -\dfrac{3\omega + 13}{\omega + 4}, \text{ vereinigt 6, 7 mit 9, 8}. \end{cases}$$

4) Hyperbolische Substitutionen:

$$(13)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{6\omega - 13}{\omega - 2}, \text{ vereinigt 18, 19 mit 27, 26}, \\ \omega' = -\dfrac{6\omega + 13}{\omega + 2}, \text{ vereinigt 2, 3 mit 11, 10}. \end{cases}$$

Die Figur wird also diese:

Figur 14.

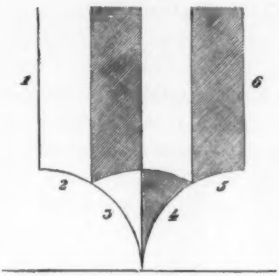


§ 12.

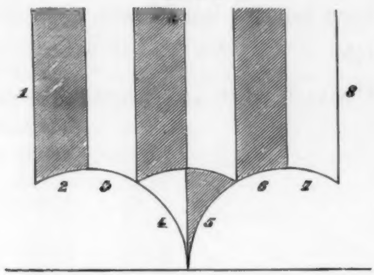
Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$, welche bei den vorangehenden Erörterungen ausgeschlossen blieben, behandelt man am besten direct. Die Fundamentalpolygone sind:

Figur 15a.



Figur 15b.

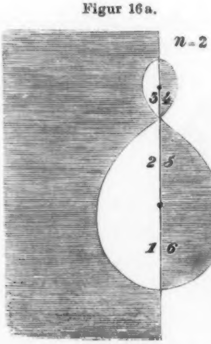


und beidemal genügen die beiden parabolischen Substitutionen:

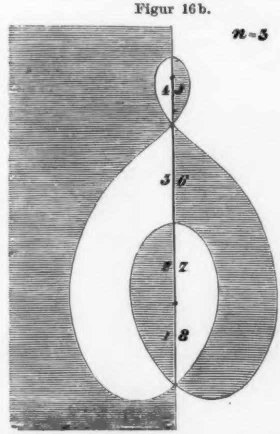
$$\omega' = \omega + n, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega + 1}, \tag{14}$$

um die Kanten zu vereinigen. So entstehen folgende Figuren:

Figur 16a.



Figur 16b.



Man sieht: Beidemal ist das Geschlecht $p = 0$. Bei $n = 2$ hängen von den 3 Blättern bei $J = 0$ alle, bei $J = 1$ zwei, bei $J = \infty$ wieder zwei im Cyklus zusammen. Bei $n = 3$ hat man 4 Blätter. Drei derselben sind bei $J = \infty$ zu einem Cyklus vereinigt, während eines isolirt

bleibt; ebenso bei $J = 0$. Bei $J = 1$ theilen sich die 4 Blätter in 2 Paare, die Blätter jedes Paares hängen cyklisch zusammen.

§ 13.

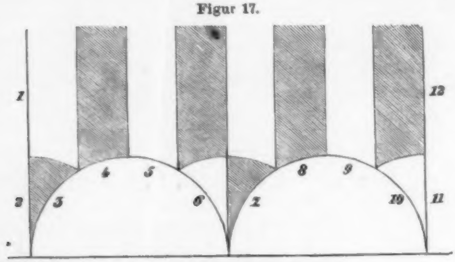
Der Fall $n = 4$.

Mit Rücksicht auf die spätere Vollständigkeit betrachte ich noch den einen Fall einer Primzahlpotenz, $n = 4$. Als „Repräsentanten" kann man bei ihm folgende sechs Ausdrücke betrachten:

$$\frac{\omega}{4},\quad \frac{\omega+1}{4},\quad \frac{\omega+2}{4},\quad \frac{\omega+3}{4},\quad \frac{-1}{4\omega},\quad \frac{2\omega-1}{4\omega}. \tag{15}$$

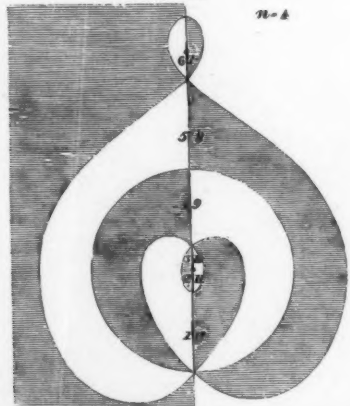
Demnach erhält man folgende Gestalt des Fundamentalpolygons:

Figur 17.



und also nachstehende Riemann'sche Fläche:

Figur 18.



Wiederum ist $p = 0$. Bei $J = \infty$ hängen 4 Blätter cyklisch zusammen, während 2 isolirt verlaufen. Bei $J = 0$ verzweigen sich die 6 Blätter zweimal zu Drei und Drei, bei $J = 1$ dreimal zu Zwei und Zwei.

§ 14.

Aufstellung der Transformationsgleichungen.

Nach den in § 1., 2. dieses Abschnittes erläuterten Principien werde ich jetzt in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ die Gleichungen zwischen J und J' in der Weise aufstellen, dass ich beide durch diejenige Variable τ rational darstelle, welche in der Riemann'schen Fläche jeden Werth nur einmal annimmt. Dabei gebrauche ich, wie ausdrücklich bemerkt sei, *nur* die Lage und Multiplicität der Verzweigungspunkte von J' in Bezug auf J, sowie die Erläuterungen des § 5., also nicht die in den letzten Paragraphen gegebenen Figuren, welche man übrigens als in der Ebene τ gelegen denken mag. Diese Figuren sollen also nicht das Mittel sein, um die Relation zwischen J und τ aufzustellen, sondern nur das Mittel, sie vollinhaltlich zu verstehen. Ausserdem werde ich sie noch im folgenden dritten Abschnitte verwenden.

Beginnen wir etwa mit dem Beispiele $n = 7$. Wir setzen

$$J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

wo φ, ψ ganze Functionen achten Grades von τ sind. Nach § 4. soll vor allen Dingen ψ aus einem einfachen und einem siebenfachen Factor bestehen. Wählen wir also τ so, dass der einfache Factor für $\tau = 0$, der siebenfache für $\tau = \infty$ verschwindet, so ist $\psi = c\tau$ zu nehmen, wo c eine unbekannte Constante ist. Nach § 4. soll ferner der Zähler φ zwei einfache und zwei dreifache Factoren haben; ich kann ihn also in der Form ansetzen:

$$\varphi = (\tau^2 + \alpha\tau + \beta)(\tau^2 + A\tau + B)^3.$$

Hier kann eine Constante, die gewiss von Null verschieden ist, noch beliebig angenommen werden, z. B. β*); denn es wurde bislang nur bestimmt, wo τ gleich Null und wo es unendlich werden soll. Ich setze β, was sich als zweckmässig erweist, gleich 49.

Betrachten wir jetzt

$$J - 1 = \frac{\varphi - \psi}{\psi}.$$

Dasselbe soll für vier Werthe von τ je doppeltzählend verschwinden (nach § 4.), d. h. $(\varphi - \psi)$ soll das volle Quadrat eines Ausdrucks vierten Grades sein. Dieser Ausdruck kann aber unmittelbar angegeben werden. Denn er muss in der Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} & \frac{d\psi}{d\tau} \end{vmatrix}$$

als einfacher Factor stecken, und diese reducirt sich, nach Abtrennung des

*) β kann nicht Null sein, weil sonst φ mit ψ einen gemeinsamen Factor hätte.

Factors $(\tau^2+A\tau+B)^2$, auf den vierten Grad. So findet man für den Ausdruck vierten Grades, von einem ev. Zahlenfactor abgesehen:

$$(\tau^2+\alpha\tau+49)(\tau^2+A\tau+B)-\tau(\tau^2+\alpha\tau+49)(6\tau+3A)$$
$$-\tau(\tau^2+A\tau+B)(2\tau+\alpha).$$

Jetzt identificire man das Quadrat dieses Ausdrucks, von dem Zahlenfactor abgesehen, mit $(\varphi-\psi)$. So hat man eine überzählige Zahl von Gleichungen zur Bestimmung von α, A, B. Die Rechnung giebt:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= (\tau^2+13\tau+49)(\tau^2+5\tau+1)^3, \\ \varphi-\psi &= (\tau^4+14\tau^3+63\tau^2+70\tau-7)^2 \,{}^{*)}, \\ \psi &= 1728\tau. \end{aligned}\right.$$

Um jetzt J' durch τ auszudrücken, führe ich die neue Grösse τ' ein, vermöge deren sich J' ebenso ausdrückt, wie J durch τ. Man hat dann also:

$$J' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')},$$

und frage nun nach der *Beziehung zwischen τ und τ'*.

Dieselbe muss vor allen Dingen *linear* sein. Denn τ und τ' sind beide in derselben Riemann'schen Fläche einwerthig. Zweitens muss die lineare Relation $\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ die Periode *Zwei* besitzen. Denn eine Wiederholung der Transformation führt von J' zu J, also von τ' zu τ zurück. Drittens muss die lineare Relation die Gestalt $\tau\tau'=C$ haben. Denn τ wird Null und Unendlich an denjenigen beiden Stellen der Riemann'schen Fläche, für welche $J=\infty$ ist, und diese beiden Stellen werden bei Vertauschung von J und J' nach § 5. mit einander verwechselt. Endlich: die Constante C muss gleich 49 sein. Denn die beiden Stellen der Riemann'schen Fläche, welche durch Nullsetzen des einfachen Factors von φ:

$$\tau^2+13\tau+49=0$$

bestimmt sind, ergeben, nach § 4., sowohl $J=0$ als $J'=0$, müssen also, nach § 5., durch dieselbe Gleichung in τ' gegeben sein:

$$\tau'^2+13\tau'+49=0.$$

Also ist $\tau\tau'=49$.

§ 15.

Fertige Formeln für $n=2, 3, 4, 5, 7, 13$.

Durch das soeben geschilderte Verfahren erhält man für $n=2$, 3, 4, 5, 7, 13 folgende Formeln.

---

*) Man bemerke, dass der in der Klammer stehende Ausdruck sich so schreiben lässt:

$$(\tau^2-7\tau+21)^2-28(\tau-4)^2.$$

1) *Transformation zweiter Ordnung.*

$$(16)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (4\tau - 1)^3 : (\tau - 1)\,(8\tau + 1)^2 : 27\,\tau, \\ J' : J' - 1 : 1 = (4\tau' - 1)^3 : (\tau' - 1)\,(8\tau' + 1)^2 : 27\,\tau', \\ \qquad \tau\,\tau' = 1. \end{cases}$$

2) *Transformation dritter Ordnung.*

$$(17)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau - 1)\,(9\tau - 1)^3 : (27\,\tau^2 - 18\,\tau - 1)^2 : -\,64\,\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\,\tau' = 1. \end{cases}$$

3) *Transformation vierter Ordnung* (vgl. § 4. des ersten Abschnitts).

$$(18)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + 14\,\tau + 1)^3 : (\tau^3 - 33\,\tau^2 - 33\,\tau + 1)^2 : 108\,\tau(1-\tau)^4, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau + \tau' = 1. \end{cases}$$

4) *Transformation fünfter Ordnung.*

$$(19)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 - 10\,\tau + 5)^3 : (\tau^2 - 22\,\tau + 125)\,(\tau^2 - 4\,\tau - 1)^2 : -\,1728\,\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\,\tau' = 125. \end{cases}$$

5) *Transformation siebenter Ordnung.*

$$(20)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + 13\,\tau + 49)\,(\tau^2 + 5\,\tau + 1)^3 \\ \qquad\qquad : (\tau^4 + 14\,\tau^3 + 63\,\tau^2 + 70\,\tau - 7)^2 \\ \qquad\qquad : 1728\,\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\,\tau' = 49. \end{cases}$$

6) *Transformation dreizehnter Ordnung.*

$$(21)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + 5\,\tau + 13)\,(\tau^4 + 7\,\tau^3 + 20\,\tau^2 + 19\,\tau + 1)^3 \\ \qquad\qquad : (\tau^2 + 6\,\tau + 13)\,(\tau^6 + 10\,\tau^5 + 46\,\tau^4 + 108\,\tau^3 + 122\,\tau^2 + 38\,\tau - 1)^2 \\ \qquad\qquad : 1728\,\tau\,{}^{*)}, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\,\tau' = 13. \end{cases}$$

---

*) Hr. Gierster, der für mich die Coefficienten der Transformation 13. Ordnung berechnete, theilt mir folgende Zerlegungen mit. Der Ausdruck vierten Grades ist gleich:

$$\left(\tau^2 + \frac{7 + \sqrt{13}}{2}\,\tau + \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}\right)\left(\tau^2 + \frac{7 - \sqrt{13}}{2}\,\tau + \frac{11 - 3\sqrt{3}}{2}\right)$$

und der Ausdruck sechsten Grades:

$$\begin{cases} \left[\tau^3 + 5\,\tau^2 + \dfrac{21 - \sqrt{13}}{2}\,\tau + \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right] \\ \cdot \left[\tau^3 + 5\,\tau^2 + \dfrac{21 + \sqrt{13}}{2}\,\tau + \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}\right]. \end{cases}$$

§ 16.

Der Multiplicator für das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirte Integral.

Dass man die vorangehenden Gleichungen durch elliptische Modulfunctionen lösen kann, ist nach § 2. dieses Abschnittes selbstverständlich. Aber wie man diese Lösung aufzustellen hat, dafür geben die vorangehenden Betrachtungen nur unvollkommenen Anhalt. Vielmehr greife ich an dieser Stelle auf die gewöhnliche Theorie zurück und zeige, dass sie thatsächlich Formeln liefert, welche zur Auflösung unserer Gleichungen führen.

Dabei kleide ich die Betrachtung folgendermassen ein. Es wurde in § 1. des ersten Abschnittes der Normirung des elliptischen Integrals gedacht, welche dadurch geschieht, dass man im Zähler $\sqrt[12]{\Delta}$ zusetzt: $\int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot dx}{\sqrt{f(x)}}$. Es sei nun, des bestimmteren Ausdrucks wegen, n wieder eine Primzahl, und man verlange, das so normirte Integral durch Transformation n^{ter} Ordnung in ein ebenfalls normirtes Integral $\int \frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)}}$ überzuführen. So stellt sich ein *Multiplicator* ein, der durch die Gleichung definirt ist:

$$(22) \qquad M\int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)}}.$$

Bildet man jetzt beiderseits eine Periode, etwa ω_2, so folgt, je nach der Art der Transformation (resp. der ausgewählten Periode):

$$(23) \qquad M = \frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2'}{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2}, \text{ oder } = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2'}{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2}.$$

Nun war nach Gleichung (18) des ersten Abschnitts:

$$\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = \pi q^{\frac{1}{6}}\,\Pi(1-q^{2\nu})^2, \quad \text{für } q = e^{i\pi\omega}.$$

Ebenso ist

$$\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2' = \pi q_1^{\frac{1}{6}}\,\Pi(1-q_1^{2\nu})^2, \quad \text{für } q_1 = e^{i\pi\omega'},$$

und hier hat man, wie bekannt, für q_1 folgende Werthe zu setzen:

$$q^{\frac{1}{n}},\quad \alpha q^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\quad \cdots\quad \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},\quad q^n,$$

wo α eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist. Man erhält so für M folgende $(n+1)$ Ausdrücke, die zunächst nur bis auf sechste Einheitswurzeln definirt sind und übrigens in einer oft gebrauchten Art durch Indices unterschieden werden sollen:

$$(24)\quad\begin{cases} M_\varrho = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\alpha^{\frac{\varrho}{6}}\, q^{\frac{1}{6n}}\cdot\Pi\left(1-\alpha^{2\varrho\nu}\, q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}}\cdot\Pi\left(1-q^{2\nu}\right)^2} \\ \text{für } \varrho = 0, 1, 2, \cdots, (n-1), \\ M_\infty = \dfrac{q^{\frac{n}{6}}\cdot\Pi\left(1-q^{2\nu n}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}}\cdot\Pi\left(1-q^{2\nu}\right)^2} \end{cases}$$

Diese Formeln sind es, welche ohne Weiteres die Auflösung unserer Gleichungen geben, indem, von einem Zahlenfactor abgesehen, τ mit einer Potenz von M identisch wird.

§ 17.

Auflösung der aufgestellten Gleichungen.

Um dies direct einzusehen, betrachte ich einen Werth von M, etwa

$$M_0 = \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{\frac{1}{6n}}\cdot\Pi\left(1-q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}}\cdot\Pi\left(1-q^{2\nu}\right)^2},$$

als Function des Ortes in unserer Riemann'schen Fläche J, J', oder, was auf dasselbe hinauskommt, in unserem in der ω-Ebene gelegenen Fundamentalpolygon*). Offenbar wird M_0 im Fundamentalpolygon nur einmal Null, da, wo $\omega = 0$, $q = 1$ ist. Ebenso wird es nur einmal unendlich, da, wo $\omega = i\infty$, $q = 0$ ist. Wir wollen jetzt in unserer Riemann'schen Fläche um den Punkt, in welchem M_0 unendlich wird, einen kleinen Kreis beschreiben. Dies kommt in unserem Fundamentalpolygone darauf hinaus, dass wir von der einen verticalen Begrenzungslinie zum entsprechenden Punkte der anderen verticalen Begrenzungslinie fortschreiten, d. h. dass wir ω um n Einheiten wachsen lassen. Dabei geht $\dfrac{q^{\frac{1}{6n}}}{q^{\frac{1}{6}}} = e^{i\pi\omega\left(\frac{1-n}{6n}\right)}$ in $\dfrac{q^{\frac{1}{6n}}}{q^{\frac{1}{6}}}\cdot e^{i\pi\left(\frac{1-n}{6}\right)}$ über, *und also vermehrt sich M_0 bei Umkreisung dieses Punktes um die Einheitswurzel $e^{i\pi\left(\frac{1-n}{6}\right)}$ als Factor.* Bezeichnen wir daher mit λ das kleinste Multiplum von $\frac{n-1}{12}$, welches gleich einer ganzen Zahl ist, *so ist M_0^λ in unserer Riemann'schen Fläche eindeutig und also eine rationale Function von J und J', die nur an einer Stelle Null und unendlich wird.*

*) Rechnerisch kann man die hier abzuleitenden Resultate gewinnen vermöge der leicht zu beweisenden Relation:

$$M^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{dJ'}{dJ}\cdot\frac{J^{\frac{2}{3}}\,(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}\,(J'-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n=2, 3, 5, 7, 13$ wird λ gleich 12, 6, 3, 2, 1. Zugleich ist $\lambda \cdot \frac{n-1}{12}$ nicht nur eine ganze Zahl, sondern gleich Eins. Daher wird in diesen Fällen M_0^λ nicht nur einmal Null oder unendlich, sondern auch nur einfach Null, resp. unendlich. *Es stimmt daher M_0^λ, von einem Zahlenfactor abgesehen, mit dem früheren τ überein, welches an denselben Stellen und in derselben Weise Null und unendlich wird.*

Der Zahlenfactor aber bestimmt sich folgendermassen. Ebenso wie wir früher neben τ eine Grösse τ' einführten, betrachte ich neben M den anderen Multiplicator M', welcher beim Rückübergang vom transformirten Integrale zum ursprünglichen auftritt. *Dann hat man in bekannter Weise:*

$$MM' = \frac{1}{n}. \tag{25}$$

Vergleicht man diese Relation mit den Gleichungen

$$\tau\tau' = C,$$

welche in § 15. auftraten, so ergiebt sich der gesuchte Zahlenfactor. *Man erhält also folgende Formeln, welche die Auflösung der in* § 15. *zusammengestellten Gleichungen enthalten:*

$$\left\{\begin{array}{ll} n = 2, & \tau = 64\, M^{12}, \\ n = 3, & \tau = 27\, M^{6}, \\ n = 5, & \tau = 125\, M^{3}, \\ n = 7, & \tau = 49\, M^{2}, \\ n = 13, & \tau = 13\, M. \end{array}\right. \tag{26}$$

Ich füge dem nur noch zwei Bemerkungen zu:

1) Für $n=4$ gelten ähnliche Betrachtungen, und es ergiebt sich:

$$\tau = 16\, M^4. \tag{27}$$

2) Die Gleichungen des § 15. für $n=2, 3, 5, 7, 13$ haben alle die Form $J = \frac{\varphi(\tau)}{c\tau}$. Dieser Zahlencoefficient c (der in den letzten drei Fällen gleich 1728 ist) ergiebt sich unmittelbar, wenn man in den nunmehr gewonnenen Lösungsformeln $q=0$ werden lässt und übrigens Gleichung (20) des ersten Abschnittes beachtet.

§ 18.

Die Multiplicatorgleichungen für $n=5$ und $n=7$.

Im Falle $n=5$ hatten wir die Gleichung:

$$J = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\,\tau}$$

und es ist

$$\tau = 125\, M^3.$$

Tragen wir diesen Werth von τ ein, schreiben statt J wieder $\frac{g_2^3}{\Delta}$ und ziehen beiderseits die dritte Wurzel, so kommt, wenn wir der Kürze wegen $5M = z$ setzen:

$$z^6 - 10z^3 + 12\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot z + 5 = 0. \tag{28}$$

Dies ist nun genau die „*Jacobi'sche Gleichung mit $A = 0$*" (siehe Math. Annalen Bd. XII, p. 520), die Kronecker zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades benutzt hat*). Dieselbe erscheint bei ihm nur deshalb unter etwas complicirterer Form, weil er sich statt der rationalen Invarianten des Moduls $\varkappa^2$ bediente.

Kronecker's ursprüngliche Gleichung, etwas umgesetzt, ist nämlich diese:

$$z^6 - 10z^3 - \frac{1 - 16\varkappa^2\varkappa'^2}{\sqrt[3]{\frac{\varkappa^2\varkappa'^2}{16}}} \cdot z + 5 = 0. \tag{29}$$

Hier ist der Coefficient von z nach Formel (16) des ersten Abschnittes in der That nichts Anderes als $+12 \cdot \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$, berechnet für das mit dem Legendre'schen Integrale auf derselben Stufe stehende Integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - \varkappa^2 z^2 \cdot 1 + \varkappa'^2 z^2}}.$$

Nun verlangt Kronecker l. c., dass man vorab $\varkappa^2$ aus der Gleichung

$$\frac{1 - 16\varkappa^2\varkappa'^2}{\sqrt[3]{\frac{\varkappa^2\varkappa'^2}{16}}} = C \tag{30}$$

berechnet, um dann ω zu finden und schliesslich

$$z = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4\varkappa^2\varkappa'^2}\left(\frac{\cos \operatorname{am} 2\omega}{\cos \operatorname{am} 4\omega} - \frac{\cos \operatorname{am} 4\omega}{\cos \operatorname{am} 2\omega}\right)^2 \tag{31}$$

zu haben. Statt dessen berechnen wir nach § 9. des ersten Abschnittes ω direct aus $\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{-C^3}{1728}$ und finden $z = 5M$, so dass eine wesentliche Abkürzung erzielt ist.

Ich muss übrigens anführen, dass zu eben dieser Vereinfachung der Kronecker'schen Lösung auch Hr. Kiepert gelangt ist, wie er mir schon vor längerer Zeit brieflich mittheilte. Besonders aber möchte ich betonen, dass auf dem hier eingeschlagenen Wege die Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades mit $A = 0$, die algebraisch ohne Zweifel die einfachste ist, auf welche man alle anderen reduciren muss (siehe meine Auseinandersetzungen im 12. Bande dieser Annalen), auch von Seite der elliptischen Functionen *unmittelbar* erhalten wird, während das

*) Comptes rendus 1858, 6. Juni.

früher nur auf Umwegen gelang*): *sie ist einfach im Sinne der hier gebrauchten Ausdrucksweise die Multiplicatorgleichung für* $n = 5$.

In derselben Art kann man für $n = 7$ die Multiplicatorgleichung bilden. Wir hatten in § 15.:

$$J - 1 = \frac{[\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7]^2}{1728\,\tau}$$

für $\tau = 49\,M^2$. Jetzt setze man $7\,M = z$, schreibe statt $J - 1$ $\frac{27\,g_3^2}{\Delta}$ und ziehe beiderseits die Quadratwurzel. So kommt:

$$(32)\qquad z^8 + 14\,z^6 + 63\,z^4 + 70\,z^2 - 432\,\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}\cdot z - 7 = 0.$$

Dies ist eine Jacobi'sche Gleichung vom *achten* Grade (wie man leicht zeigt, wenn man den in § 16. für M aufgestellten Productausdruck in eine Potenzreihe verwandelt) und es scheint, dass sie für die allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen achten Grades dieselbe Rolle spielen soll, wie für die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades die Gleichung mit $A = 0$.

Abschnitt III.

Galois'sche Resolventen. Bedeutung der Ikosaedergleichung.

§ 1.

Galois'sche Resolventen, welche einen Parameter enthalten.

Im ersten Paragraphen des vorigen Abschnitts suchte ich zu kennzeichnen, was bei einer beliebigen Gleichung, die einen Parameter enthält, durch Tschirnhausentransformation unzerstörbar ist; ich wende mich jetzt zu der allgemeineren Frage, was bei beliebiger Resolventenbildung erhalten bleibt? Da die Galois'sche Resolvente alle anderen in sich fasst, so genügt es, nur sie zu betrachten; und indem man die Gesammtheit der Galois'schen Resolventen überblickt, die aus einander durch rationale Transformation hervorgehen, wird man, im Anschlusse an die früheren Entwickelungen, *die Verzweigung, welche die Wurzel der Galois'schen Resolvente in Bezug auf den Parameter besitzt*, als das eigentlich Bleibende bei allem Wechsel bezeichnen.

Diese Verzweigung hat eine sehr einfache Eigenschaft. *Hängen für irgend einen Werth des Parameters r Blätter cyklisch zusammen, so hängen an dieser Stelle* **alle** *Blätter in Cyklen von je r zusammen.* In der That, da sich durch eine Wurzel der Galois'schen Resolvente

---

*) Siehe Brioschi's Darstellung im 13. Annalenbande.

und übrigens den Werth des Parameters alle anderen Wurzeln rational ausdrücken lassen, so sind alle Wurzeln in Bezug auf den Parameter gleich verzweigt. Und auch umgekehrt: Wenn alle Wurzeln in Bezug auf den Parameter gleich verzweigt sind, so lassen sie sich durch den Parameter und eine von ihnen rational ausdrücken; man hat es also mit einer Gleichung zu thun, welche ihre eigene Galois'sche Resolvente ist.

Demzufolge hat man folgendermassen zu verfahren, um die Verzweigungspunkte zu bestimmen, welche die Galois'sche Resolvente einer beliebig vorgelegten Gleichung:

$$\varphi(s, z) = 0$$

besitzt. Man suche die Verzweigungsstellen der letzteren. Hängen an einer solchen Stelle gewisse ν_1 Blätter cyklisch zusammen, andere ν_2, ν_3 etc., so hängen an dieser Stelle die Blätter der Galois'schen Resolvente zu je ν zusammen, wo ν das *kleinste gemeinsame Multiplum* der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ ist. Denn z muss offenbar ν-mal eine solche Stelle umkreisen, bis eine beliebig gegebene Anordnung $s_1, s_2, \cdots s_n$ der Wurzeln zum ersten Male wieder erscheint.

§ 2.

Galois'sche Resolventen vom Geschlechte Null.

Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass man alle Galois'sche Resolventen, die einen Parameter besitzen und das Geschlecht Null haben, ohne Weiteres bestimmen kann. Es sind keine anderen Gleichungen, *als diejenigen mit linearen Transformationen in sich*, d. h. dieselben Gleichungen, mit denen ich mich in meinen letzten Veröffentlichungen ausführlich beschäftigt habe. Dies giebt zugleich einen neuen Weg, die betr. Gleichungen zu bestimmen.

In der That, sei das Geschlecht einer Galois'schen Resolvente gleich Null. So wird man diejenige Function η als Unbekannte einführen können, durch die sich Alles rational ausdrückt, und die Gleichung nimmt also, unter z den Parameter verstanden, die Form an:

$$(1) \qquad R(\eta) = z,$$

wo R eine rationale Function bedeutet. Nun soll jede Wurzel η_i durch jede andere η_k mit Hülfe von z rational ausdrückbar sein, das heisst also im Falle (1) durch η_k allein. Da ebenso η_k rational in η_i sein muss, so sind beide *linear* verknüpft. Man kommt also nothwendig zu einer Gleichung mit linearen Transformationen in sich, w. z. b.

Will man diesen Satz benutzen, um alle Gleichungen mit linearen Transformationen in sich aufzustellen, so zähle man einfach alle Riemann'schen Flächen auf, die so verzweigt sind, wie § 1. verlangt, und die ausserdem $p = 0$ ergeben. Dies ist das elementarste Problem

der unbestimmten Analysis, und seine Discussion liefert sofort die Fälle, welche allein existiren.

Ich setze der Vollständigkeit wegen die Gleichungen mit linearen Transformationen in sich hier noch einmal her. Es sind folgende:

$$\eta^n = z, \tag{2}$$

$$\eta^n + \eta^{-n} = z, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1-2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}{1+2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}\right)^3 = z, \quad \text{(Tetraedergleichung)}, \tag{4}$$

$$\frac{(1+14\,\eta^4+\eta^8)^3}{108\,\eta^4\,(1-\eta)^4} = z, \quad \text{(Oktaedergleichung)}, \tag{5}$$

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = z, \quad \text{(Ikosaedergleichung)}. \tag{6}$$

Ich habe dabei für die Ikosaedergleichung die Bezeichnung beibehalten, welche ich in meiner vorigen Arbeit fortwährend benutzte (diese Annalen Bd. XII). Die Gleichung (2) weist nur zwei Verzweigungen auf; bei $z = 0$ und $z = \infty$ hängen beidemal sämmtliche n Blätter cyklisch zusammen. Die Gleichung (3) besitzt drei Verzweigungsstellen; bei $z = +2$ und $z = -2$ hängen die $2n$ Blätter paarweise zusammen, bei $z = \infty$ theilen sie sich in zwei Cyklen von je n. Die Gleichungen (4), (5), (6) liefern übereinstimmend bei $z = 0$ einen Zusammenhang zwischen je 3, bei $z = 1$ zwischen je 2 Blättern. Bei $z = \infty$ ergeben sie bez. eine Verzweigung von je 3, 4, 5 Blättern.

§ 3.

Galois'sche Resolventen, welche durch elliptische Modulfunctionen lösbar sind.

Es werde der Parameter z, welcher in der Galois'schen Resolvente vorkommt, jetzt wieder gleich der absoluten Invariante J gesetzt. Soll dann die Gleichung durch elliptische Functionen lösbar sein, so darf sie nach § 2. des vorigen Abschnitts nur bei $J = 0,\ 1,\ \infty$ Verzweigungen aufweisen, und zwar können bei $J = 0,\ 1$, sofern überhaupt Verzweigung stattfindet, die Blätter nur zu 3, bezüglich zu 2 zusammenhängen. Bei der grossen Bestimmtheit dieser Angabe ist es ein Leichtes, für die niedersten p alle hierher gehörigen Gleichungen aufzuzählen. Für $p = 0$ sind es folgende:

$$\eta^3 = J, \quad \eta^2 = J - 1, \quad \eta^3 + \eta^{-3} = \frac{2J-4}{J}, \tag{7}$$

dann *Tetraeder-*, *Oktaeder-* und *Ikosaedergleichung*.

Doch sollen diese allgemeinen Betrachtungen hier nicht weiter verfolgt werden, vielmehr wende ich mich zu dem specielleren Probleme der Transformationsgleichungen zurück.

§ 4.

Die Galois'schen Resolventen der Gleichungen zwischen J und J'.

Bekanntlich umfasst die Galois'sche Gruppe der Transformationsgleichung für $n = 2$ *sechs*, für $n = 4$ *vierundzwanzig* und für jede Primzahl n, die > 2 ist, $\frac{n\cdot\overline{n^2-1}}{2}$ Substitutionen*). Ebensoviele Blätter wird also die Riemann'sche Fläche besitzen, welche die Galois'sche Resolvente der Transformationsgleichung vorstellt. Diese Blätter hängen nach § 4. des vorigen Abschnitts und auf Grund der nunmehr erläuterten Verhältnisse bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je n zusammen. Das giebt also für $n = 2$ $p = 0$, für $n = 4$ wieder $p = 0$, für die anderen n $p = \frac{\overline{n-3}\cdot\overline{n-5}\cdot\overline{n+2}}{24}$. Man sieht: *Das Geschlecht wird Null bei $n = 2, 3, 4, 5$ und nur bei diesen Werthen von n.* Für $n = 7$ z. B. wird es bereits gleich Drei.

Bei $n = 3, 4, 5$ haben wir dieselbe Verzweigung, welche die *Tetraeder-*, *Oktaeder-*, *Ikosaedergleichung* aufweisen. Sie sind die einfachsten Gleichungen, welche diese Verzweigung besitzen, insofern in ihnen die Grösse η als Unbekannte eingeführt ist, durch die sich Alles rational ausdrückt (§ 2.). *Es sind also diese Gleichungen die einfachsten Formen, welche man der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung für $n = 3, 4, 5$ ertheilen kann.* Hiermit ist die Bedeutung, welche zumal die *Ikosaedergleichung*, auf welche ich in dieser Arbeit meine besondere Aufmerksamkeit richte, für die Transformationstheorie besitzt, so scharf gekennzeichnet, als man verlangen kann.

Bei $n = 2$ kommen wir nach dem vorigen Paragraphen zunächst zu der Gleichung:

$$\eta^3 + \eta^{-3} = \frac{2J - 4}{J}.$$

Aber diese Gleichung geht durch die lineare Substitution

$$\eta = \frac{\sigma - \alpha}{\sigma - \alpha^2}, \quad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

in die Gleichung für das Doppelverhältniss über:

$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1 - \sigma + \sigma^2)^3}{\sigma^2 (1 - \sigma)^2},$$

und *die Gleichung für das Doppelverhältniss gehört also hier als erstes Glied zu der von der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung gebildeten Reihe.*

---

*) Ich sehe bei diesen Angaben, wie immer in dieser Arbeit, ab von den blos *numerischen* Irrationalitäten, die bei der Auflösung der Gleichungen nothwendig sind.

§ 5.

Im Raume gelegene Riemann'sche Flächen.

Nach den früher ausgesprochenen Ideen (§ 7. des zweiten Abschnitts) kann man das Gesagte noch zweckmässig umformen. Man schraffire bei den beschriebenen Riemann'schen Flächen diejenigen Halbblätter, welche die positive Halbebene J überdecken, während die anderen Halbblätter frei bleiben sollen. Dann deformire man die Fläche so, dass sie schliesslich, ohne Verzweigung im Raume gelegen, eine möglichst übersichtliche Gestalt annimmt, also z. B. im Falle $p = 0$ die Gestalt einer Kugel. Bezeichnet man mit N die Blätterzahl der ursprünglichen Fläche, so ist die neue Fläche von $2N$ (krummlinigen) Dreiecken überdeckt, welche sich, abwechselnd schraffirt und nicht schraffirt, lückenlos an einander schliessen. Die Ecken der einen Art (für die $J = 0$ ist) sind immer zu sechs und sechs, die Ecken der zweiten Art ($J = 1$) zu vier und vier, die Ecken der dritten Art ($J = \infty$) zu $2n$ und $2n$ vereinigt; die Dreieckswinkel sind also (sozusagen) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$. Im besonderen Falle $p = 0$ fällt diese Eintheilung in Dreiecke mit derjenigen zusammen, die wir für die Doppelverhältnissgleichung ($n = 2$) oben ausführlich aufstellten (Abschnitt I., § 2.), und die bei der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung übrigens bekannt ist.

Diese Vorstellung ist nun besonders nützlich, um die Abhängigkeit zu verstehen, welche zwischen der Wurzel der Galois'schen Resolvente und dem Periodenverhältnisse ω besteht. Wir hatten die Ebene ω in unendlich viele, abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte, Elementardreiecke zerlegt, deren Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 betrugen. *Einem solchen Elementardreiecke entspricht jetzt geradezu das neue Dreieck mit seinen Winkeln* $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$. Da nebeneinanderliegenden Dreiecken natürlich ebensolche entsprechen, so hat man ein volles Bild der gegenseitigen Abhängigkeit.

§ 6.

Verwerthung der Galois'schen Resolventen.

Der Nutzen der Galois'schen Resolvente besteht zumal darin, dass man durch eine beliebige ihrer Wurzeln und übrigens den Parameter alle anderen Grössen rational ausdrücken kann. Ist insbesondere $p = 0$, so ist auch noch der Parameter überflüssig und Alles durch eine beliebige Wurzel der Resolvente allein rational darstellbar. Ich stelle also insbesondere die Aufgabe, *die Wurzeln τ der oben aufgestellten Transformationsgleichungen für $n = 2, 3, 4, 5$ durch das Doppelverhältniss, resp. die Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaederirrationalität rational in expliciter Form auszudrücken.*

Um die betr. Formeln zu finden, bediente ich mich der geometrischen Vorstellung des vorangehenden Paragraphen. Ich zeichnete in der ω-Ebene für $n = 2, 3, 4, 5$ das Fundamentalpolygon und suchte dann auf der betr. in 12, 24, 48, 120 Dreiecke eingetheilten Kugel das entsprechende Gebilde. Die Beziehung zwischen der Wurzel der Galois'schen Resolvente und der Variablen τ ist dann derart, dass erstere sich gerade über das neue Polygon bewegt, wenn τ sein (zweckmässig zerschnittenes) Gesammtgebiet durchläuft. Hiernach ist es in jedem Falle leicht, die algebraische Abhängigkeit darzustellen. Im Folgenden unterdrücke ich der Kürze wegen diese Zwischenbetrachtungen und gebe ohne weitere Erläuterung einmal die Figuren, dann gleich die definitiven Formeln. —

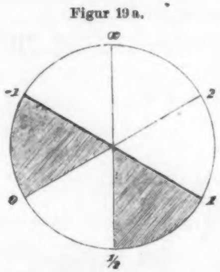
Hat man in dieser Weise Alles durch eine Irrationalität ausgedrückt, so muss man verlangen, die letztere auf transcendentem Wege zu definiren. Ich erreiche das in den vier Fällen auf indirectem Wege, indem ich, von den oben für τ gefundenen Ausdrücken ausgehend, auf die Wurzel der Galois'schen Resolvente den Rückschluss mache.

§ 7.

Die Gleichung für das Doppelverhältniss.

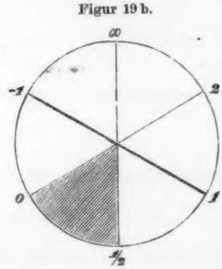
Wenn wir in dem soeben geschilderten Sinne das Fundamentalpolygon für $n = 2$ auf die Kugel übertragen, die zur Repräsentation des Doppelverhältnisses σ dient, so wird eben die Hälfte derselben überdeckt, die Begrenzungslinie ist ein Meridian. In der beistehenden Figur ist dieser Meridian stärker ausgezogen und nur auf der überdeckt gedachten Halbkugel sind die früheren Schraffirungen angebracht:

Figur 19 a.



Nördliche Halbkugel.

Figur 19 b.



Südliche Halbkugel.

Die Transformationsgleichung für $n = 2$ war:

$$J = \frac{1}{27} \cdot \frac{(4\tau - 1)^3}{\tau},$$

die Gleichung für das Doppelverhältniss:

$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2 (1-\sigma)^2}.$$

Man erhält die eine aus der anderen, indem man schreibt:

$$(6) \quad \begin{cases} \tau_\infty = -\dfrac{(1-\sigma)^2}{4\sigma}, \\ \tau_0 = -\dfrac{\sigma^2}{4(1-\sigma)}, \\ \tau_1 = +\dfrac{1}{4\sigma(1-\sigma)}. \end{cases}$$

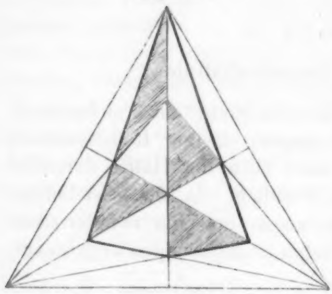
Ich habe dabei den drei Wurzeln τ Indices ertheilt, so wie sie den oben der Grösse M beigelegten Indices entsprechen.

§ 8.

Die Tetraedergleichung.

In der nachstehenden Zeichnung denke ich mir ein reguläres Tetraeder mit horizontaler Basis, auf welches man von oben hinabblickt.

Figur 20.



Jede der drei sichtbaren Seitenflächen ist durch die drei Höhen in sechs Elementardreiecke zerlegt. Lässt man sie den Elementardreiecken der ω-Ebene entsprechen, so überdeckt das Fundamentalpolygon für $n = 3$ den von einem stark ausgezogenen Rahmen umschlossenen Raum; nur in ihm sind Schraffirungen angebracht. Dieser Raum absorbirt, wie man sieht, genau den dritten Theil der gesammten Tetraederfläche.

Die Formeln, zu denen man dementsprechend geführt wird, sind folgende.

Die Transformationsgleichung für $n = 3$ war:

$$J = -\frac{(\tau - 1)(9\tau - 1)^3}{64\tau}.$$

Der Tetraedergleichung ertheile ich folgende Gestalt:

$$J = -64 \frac{(x_1^4 - x_1 x_2^3)^3}{(8x_1^3 x_2 + x_2^4)^3} \text{*)}.$$

Ich habe dabei der grösseren Deutlichkeit wegen homogene Variable genommen und die Zahlencoefficienten so gewählt, dass keine Irrationalitäten auftreten. Man findet dann:

*) Es wird dann

$$J - 1 = -\frac{(8x_1^6 + 20x_1^3 x_2^3 - x_2^6)^2}{(8x_1^3 x_2 + x_2^4)^3}.$$

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\tau_\infty &= \frac{x_2^4}{8x_1^3x_2 + x_2^4}, \\
\tau_0 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{(2x_1 + x_2)^4}{8x_1^3x_2 + x_2^4}, \\
\tau_1 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{(2\alpha x_1 + x_2)^4}{8x_1^3x_2 + x_2^4}, \\
\tau_2 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{(2\alpha^2 x_1 + x_2)^4}{8x_1^3x_2 + x_2^4},
\end{aligned} \right. \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),
$$

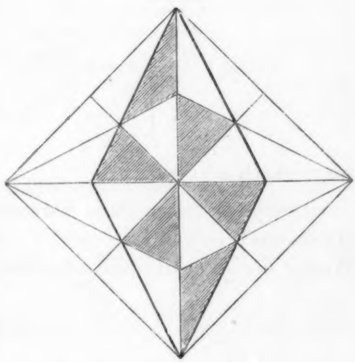
Die im Zähler stehenden Ausdrücke sind die vier linearen Factoren des Nenners. Man kann sagen, wenn ein solcher Ausdruck gestattet ist: *die Grössen τ stellen die vierte Potenz einer Tetraederecke dar, dividirt durch das ganze Tetraeder.*

§ 9.

Die Oktaedergleichung.

Beim Oktaeder bekommt man folgende nach dem Vorhergehenden wohl ohne weitere Erläuterung verständliche Figur:

Figur 21.



Wir hatten ferner oben für $n = 4$ als Transformationsgleichung aufgestellt:

$$J = \frac{(\tau^2 + 14\tau + 1)^3}{108\,\tau\,(1-\tau)^4},$$

während die Oktaedergleichung lautete:

$$J = \frac{(\eta^8 + 14\eta^4 + 1)^3}{108\,\eta^4\,(1-\eta^4)^4}.$$

Offenbar ist ein Werth von τ gleich η^4, und die übrigen Werthe ergeben sich, wenn man η den linearen Transformationen unterwirft, durch welche die Oktaedergleichung in sich übergeht. Also kommt für die sechs Werthe von τ:

$$(8) \qquad \eta^4, \quad \frac{1}{\eta^4}, \quad \left(\frac{1 \pm \eta}{1 \mp \eta}\right)^4, \quad \left(\frac{1 \pm i\eta}{1 \mp i\eta}\right)^4.$$

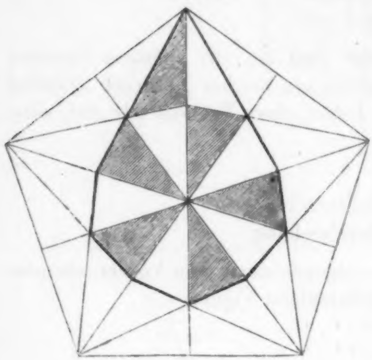
Schreibt man hier statt τ $\varkappa^2$ und also statt η $\sqrt{\varkappa}$, so wird (nach § 3. des ersten Abschnittes) J die Invariante des Legendre'schen Integrals und die Formeln (8) drücken ein bekanntes Resultat von Abel aus. Wir können also folgendermassen sagen: *Transformirt man das allgemeine elliptische Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ durch lineare Substitution in die Legendre'sche Normalform, so hat $\sqrt{\varkappa}$ in Bezug auf die absolute Invariante J die Bedeutung der Oktaederirrationalität.*

§ 10.

Die Ikosaedergleichung.

In der folgenden Figur sind nur einige der Dreiecke gezeichnet, welche ein reguläres Ikosaeder überdecken; aber sie wird genügen, um die Lage des $n=5$ entsprechenden Fundamentalpolygons zu erkennen.

Figur 22.



Nun hatten wir für τ bei $n=5$:

$$J = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\tau}$$

und übrigens die Ikosaedergleichung:

$$J = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}.$$

Schreiben wir homogen machend $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so werden die sechs Wurzeln τ:

$$(9) \qquad \begin{cases} \tau_\infty = \dfrac{125\,\eta_1^6\eta_2^6}{f}, \\ \tau_\varrho = \dfrac{(\varepsilon^{-\varrho}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+\varrho}\eta_2^2)^6}{f}, \end{cases}$$

wo ε gleich $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist.

Uebrigens gehen diese Formeln schon aus früheren Angaben von mir hervor, indem $\sqrt{\tau}$, wie § 18. des zweiten Abschnitts gezeigt, Wurzel der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades mit $\Delta = 0$ ist.

§ 11.

Auflösung der Gleichung für das Doppelverhältniss.

Aus Formel (6) folgt:

$$\sigma^3 = \frac{\tau_0}{\tau_1}.$$

Nun war

$$\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{M_0^{12}}{M_1^{12}},$$

also kommt:

$$(10) \qquad \sigma = \frac{\Pi(1-q^\nu)^8}{\Pi(1+q^\nu)^8},$$

die gewöhnliche Formel für $\sigma = \varkappa^2$.

§ 12.

Auflösung der Tetraedergleichung.

Man schliesst aus Formel (7):

$$\sqrt{\tau_0} : \sqrt{\tau_1} : \sqrt{\tau_2} = 2\,x_1 + x_2 : 2\,\alpha x_1 + x_2 : 2\,\alpha^2 x_1 + x_2.$$

Andererseits verhalten sich diese Grössen wie

$$M_0^{\frac{3}{4}} : M_1^{\frac{3}{4}} : M_2^{\frac{3}{4}}$$

resp. wie die drei Ausdrücke, die entstehen, wenn man in

$$q^{\frac{1}{4}} \Pi (1-q^{2\nu})^3$$

statt q einträgt $q^{\frac{1}{3}}$, $\alpha q^{\frac{1}{3}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{3}}$. Aber dieses Product $q^{\frac{1}{4}} \Pi (1-q^{2\nu})^3$ ist nichts Anderes als $\Theta_1'(0)$ nach der gewöhnlichen Bezeichnung, giebt also in eine Reihe entwickelt:

$$q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - 7\,q^{\frac{49}{4}} + 9\,q^{\frac{81}{4}} - 11\,q^{\frac{121}{4}} + \cdots.$$

Trägt man hier für q ein $\alpha^{\varrho} q^{\frac{1}{3}}$, so kommt:

$$- \alpha^{\varrho} \cdot q^{\frac{1}{12}} (1 + 5q^2 - 7\,q^4 - 11q^{10} + 13q^{14} + 17\,q^{24} - 19q^{30} \cdots)$$
$$- 3\,q^{\frac{9}{12}} (1 - 3q^6 + 5q^{18} - 7\,q^{36} \cdots)$$

und also wird *die Auflösung der Tetraedergleichung* diese:

$$(11') \quad \frac{x_1}{x_2} = - \frac{1}{6\,q^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1 + 5q^2 - 7\,q^4 - 11\,q^{10} + 13q^{14} + 17\,q^{24} - 19\,q^{30} \cdots}{1 - 3q^6 + 5\,q^{18} - 7\,q^{36} + \cdots}.$$

§ 13.

Die Auflösung der Oktaedergleichung.

Man kommt zu der Formel:

$$(12) \qquad \eta = 2 \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Pi\,(1-q^{8\nu})^2}{\Pi\,(1-q^{2\nu})^2},$$

die mit den gewöhnlich für $\sqrt{\varkappa}$ gegebenen nach leichter Modification übereinstimmt.

§ 14.

Die Auflösung der Ikosaedergleichung.

Nach § 10. verhalten sich die sechsten Wurzeln aus den τ_{ϱ} wie

$$\varepsilon^{-\varrho} \eta_1^2 + \eta_1 \eta_2 - \varepsilon^{+\varrho} \eta_2^2.$$

Dieselben sechsten Wurzeln verhalten sich, nach § 17. des vorigen Abschnitts, wie die $\sqrt{M}$, das heisst wie diejenigen Ausdrücke, die aus $q^{\frac{1}{12}} \Pi (1-q^{2\nu})$ hervorgehen, wenn man statt q einträgt $q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon^2 q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon^3 q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon^4 q^{\frac{1}{5}}$ $\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}\right.$ gesetzt$\left.\right)$.

Aber es ist $q^{\frac{1}{12}}\Pi(1-q^{2\nu})$ nach einer bekannten von **Euler** herrührenden Formel:

$$\sum_0^\infty (-1)^n q^{\frac{(6n\pm 1)^2}{12}}.$$

Wenn wir hier statt q schreiben $\varepsilon^\mu q^{\frac{1}{5}}$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} & q^{\frac{5}{12}}(-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\cdots) \\ + \, & \varepsilon^{2\mu}\cdot q^{\frac{49}{60}}(-1+q^2-q^4+q^8+q^{22}-q^{30}+\cdots) \\ + \, & \varepsilon^{3\mu}\cdot q^{\frac{1}{60}}(1+q^2-q^6-q^{14}-q^{16}-q^{28}+q^{40}\cdots) \end{aligned}$$

und vergleicht man dies mit den $\sqrt[6]{\tau_\varrho}$, so kommt als *Auflösung der Ikosaedergleichung:*

$$(13) \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \quad q^{-\frac{2}{5}}\,\frac{1+q^2-q^6-q^{14}-q^{16}-q^{28}+q^{40}+\cdots}{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\cdots},$$

oder auch:

$$(13\text{a}) \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = -\,q^{-\frac{2}{5}}\,\frac{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\cdots}{-1+q^2-q^4+q^8+q^{22}-q^{30}+\cdots}.$$

§ 14.

Vergleich der verschiedenartigen Auflösung der Ikosaedergleichung*).

Ein Vergleich der hiermit gewonnenen Lösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Functionen mit der früher explicite entwickelten (diese Annalen Bd. XII, p. 512 ff., vergl. den hier am Schlusse folgenden Anhang) ist deshalb besonders interessant, weil er neue Gesichtspunkte für die Behandlung der hypergeometrischen Reihen abgiebt. Wenn sich die Invariante J über die Halbebene bewegt, so durchläuft die Ikosaederirrationalität η ein Kreisbogendreieck von den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, ω ein solches von den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0. Statt nun nach der früheren Methode η direct aus J als Quotienten hypergeometrischer Reihen zu berechnen, berechnen wir jetzt auf analoge Weise das ω und aus ihm erst das η; das heisst, wir verwandeln die Halbebene J zunächst in ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 und dehnen dann dieses wieder zu einem Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$. *Dies Verfahren ist in analoger Weise offenbar immer zulässig, wenn ein Quotient Ω hypergeometrischer Reihen berechnet werden soll, der die Halbebene J auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln*

---

*) Aehnliche Betrachtungen gelten natürlich bei der Gleichung für das Doppelverhältniss, der Tetraeder- und der Oktaedergleichung.

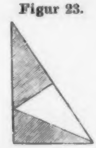
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\nu}$ *abbildet, wo ν irgend eine Zahl ist.* Dies Verfahren hat dann aber, allgemein zu reden, einen grossen Vortheil, der freilich beim Ikosaeder nicht recht zur Geltung kommt. Im Allgemeinen nämlich ist weder J eine eindeutige Function von Ω, noch Ω von J. Dagegen werden beide eindeutige Functionen von ω. Indem man also ω als die unabhängige Variable einführt, ist ein ähnlicher Vortheil erzielt, wie etwa der, den in der Theorie der elliptischen Integrale die Einführung der Integrale erster Gattung als unabhängiger Veränderlicher mit sich bringt. —

Es handelte sich dabei um hypergeometrische Reihen, welche nach J fortschreiten. Aber ich habe p. 512 meiner vorigen Arbeit bereits darauf aufmerksam gemacht, dass es unbegrenzt viele andere Arten der Auflösung für die Ikosaedergleichung giebt, sofern man solche hypergeometrische Reihen zulässt, die *nach algebraischen Functionen von J* fortschreiten. Ich will hier nur drei solche Fälle besonders anführen, die sich an das Vorhergehende genau anschliessen. Schreibt man

$$J = \frac{(4\tau - 1)^3}{27\tau} \text{ (Transformation zweiter Ordnung),}$$

so bewegt sich η, wenn τ über die Halbebene läuft, über ein Dreieck, das aus drei kleinen Dreiecken $\left(\text{mit den Winkeln } \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}\right)$ zusammengesetzt ist (Figur 23.); wird

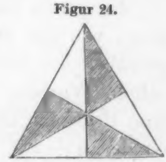
Figur 23.



$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

gesetzt (Doppelverhältnissgleichung), so entspricht der Halbebene σ das Dreieck η (Fig. 24.), das heisst, das Begrenzungsdreieck des eigentlichen Ikosaeders. Nimmt man endlich:

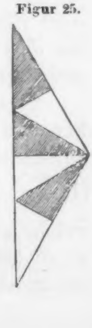
Figur 24.



$$J = \frac{1}{108} \cdot \frac{(\tau^2 + 14\tau + 1)^3}{\tau(1-\tau)^4}$$

(Transformation vierter Ordnung, Invariante der Legendre'schen Normalform), so ist die Halbebene τ auf ein Dreieck η bezogen, das die in Figur 25. gegebene Gestalt hat.

Figur 25.



Dieser letzte Fall ist es, den ich p. 516 meiner vorigen Arbeit ausführlicher in Betracht zog, weil ich damals von der Legendre'schen Normalform aus die Auflösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Functionen untersuchen wollte.

Bringt man diese Lösungen wieder mit der Auflösung durch elliptische Functionen zusammen, so erhält man z. B. den Satz: *Alle hypergeometrische Reihen, welche nach dem Doppelverhältnisse $\sigma\,(= \varkappa^2)$ fortschreiten, lassen sich als ein-*

deutige Modulfunctionen darstellen. Doch greift ein Verfolg dieser Ideen, die sich schliesslich alle auf *die Transformation der hypergeometrischen Reihen* beziehen, natürlich weit über die Grenzen des gegenwärtigen Aufsatzes hinaus.

Abschnitt IV.

Modulargleichungen. — Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

In diesem letzten Abschnitte beabsichtige ich zu zeigen, in welchem Verhältnisse die Untersuchungen Hermite's und Brioschi's, die sich auf die Jerrard'sche Form der Gleichungen fünften Grades, resp. auf die verwandten Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades „mit $B = 0$" beziehen, zum Ikosaeder stehen, um dann, die Entwickelungen der vorhergehenden Abschnitte und meine früheren Arbeiten umfassend, einen Ueberblick über die verschiedenen Arten der Lösung der Gleichungen fünften Grades zu geben. Ich bedarf dazu gewisser Betrachtungen über *Modulargleichungen*, die mir an sich ein grosses Interesse zu bieten scheinen, die ich aber nur soweit hier durchführe, als zur Erreichung des vorgenannten Zweckes nothwendig ist.

§ 1.

Ueber Modulargleichungen im allgemeinsten Sinne.

Statt der Gleichungen zwischen den absoluten Invarianten J und J', die ich im zweiten Abschnitte dieser Arbeit untersuchte, betrachtet man, von den Θ-Functionen ausgehend, gewöhnlich die Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen σ, σ' ($\varkappa^2$, λ^2) oder die zwischen ihren achten Wurzeln $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Ist n, wie vorausgesetzt werde, eine Primzahl und dabei > 2, so sind auch diese Gleichungen vom Grade $(n + 1)$. Bei der hier eingehaltenen Darstellung, in der die absolute Invariante J allemal die ursprüngliche Variable abgiebt, entsteht von selbst die allgemeine Frage: *Welche algebraischen Functionen von J, resp. J' haben ebenfalls diese Eigenschaft, zu Transformationsgleichungen vom Grade $(n + 1)$ Anlass zu geben?*

Es sei $\varphi(\omega)$ eine solche in der ganzen Halbebene ω eindeutige Function. So betrachte man vor allen Dingen diejenigen linearen Substitutionen

$$(1)\qquad \omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}, \quad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1),$$

welche $\varphi(\omega)$ ungeändert lassen. Sie mögen durch accentuirte α', β', γ', δ' kenntlich gemacht sein, und bilden übrigens eine in der Gesammtheit aller

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

enthaltene Untergruppe. Zwei Zahlen, die durch eine Substitution (1) aus einander hervorgehen, will ich *relativ äquivalent* nennen. So bilde man alle Werthe von φ, welche durch folgende Formel ausgedrückt sind:

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\beta'\omega + \delta'}\right)$$

und frage, wann sie mit $\varphi(\omega)$ durch eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verknüpft sind.

Eine leichte Ueberlegung führt zu zwei Bedingungen.

Zunächst ist erforderlich, *dass alle Werthe von ω, für welche die Function φ denselben Werth annimmt, relativ äquivalent sind.* Dies bedingt, dass J eine rationale Function von φ sein muss, und auch umgekehrt: wenn J eine rationale Function von φ ist, so wird diese erste Bedingung befriedigt.

Dann muss weiter verlangt werden, *dass alle Zahlen* $\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$ *mit nur* $(n+1)$ *„Repräsentanten" relativ äquivalent sind.*

Diese zwei Bedingungen zusammen sind jedenfalls ausreichend; wie weit sie möglicherweise von einander abhängig sind, habe ich noch nicht untersucht.

§ 2.

Die Ikosaederirrationalität.

Ich behaupte nun, dass die Ikosaederirrationalität η, die durch die Gleichung definirt wird:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = J,$$

den beiden Anforderungen für alle Primzahlen n genügt, die von *Fünf* verschieden sind.

Zunächst der ersten Bedingung wird entsprochen, weil J in η rational ist. Mit Bezug auf die zweite habe ich zunächst die Substitutionen (1) anzugeben, welche η ungeändert lassen. Da η nichts Anderes ist als die Wurzel der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung für $n = 5$, so umfassen nach bekannten Sätzen die gesuchten Substitutionen alle diejenigen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und nur diejenigen, bei denen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 5$ ist. Wir können also schreiben:

$$(2) \quad \omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'} = \frac{(5a+1)\omega + 5b}{5c\omega + (5d+1)}, \quad \left[(5a+1)(5d+1) - 25bc = 1\right],$$

und es ist nun zu zeigen, dass alle Zahlen

*) Entsprechende Entwickelungen gelten für das Doppelverhältniss σ, wie für die Tetraeder- und Oktaederirrationalität.

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{(5A+1)\omega+5B}{5C\omega+(5D+1)},\quad \left[(5A+1)(5D+1)-25BC=1\right],$$

mit Bezug auf (2) zu $(n+1)$ Repräsentanten äquivalent sind. Zum Beweise gebe ich $(n+1)$ Repräsentanten wirklich an; dass in Bezug auf sie das Theorem richtig ist, sieht man sofort. Die Repräsentanten sind:

$$\frac{\omega}{n},\quad \frac{\omega+5}{n},\quad \frac{\omega+2\cdot 5}{n},\ \ldots,\ \frac{\omega+(n-1)5}{n},\quad \frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda n\omega+(\lambda n-1)}{(1-\lambda n)\omega+(2-\lambda n)}.$$

Hier ist λn das kleinste Multiplum von n, welches modulo 5 zu Eins congruent ist.

§ 3.

Simultane Aenderungen der zusammengehörigen Ikosaederirrationalitäten.

Es sollen die beiden Ikosaederirrationalitäten, welche durch Transformation n^{ter} Ordnung mit einander verknüpft sind, η und ζ genannt werden. So sei η durch Formel (13) des vorigen Abschnitts gegeben:

$$\eta = q^{-\frac{2}{5}}\,\frac{1+q^2-q^6-q^{14}-q^{16}-q^{28}+q^{40}\cdots}{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}\cdots}. \tag{3}$$

Ich will dann unter den zugehörigen Werthen von ζ denjenigen auswählen, der sich aus (3) ergiebt, wenn man, dem ersten der eben angegebenen Repräsentanten entsprechend, ω durch $\frac{\omega}{n}$, also $q=e^{i\pi\omega}$ durch $q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt.

Nun lasse man ω allmählich um $2n$ wachsen. Dann verwandelt sich η vermöge (3) in $\varepsilon^{-2n}\eta$, ζ in $\varepsilon^{-2}\zeta$. Hiernach hat man auf Grund der Entwickelungen p. 525 meiner vorigen Arbeit (diese Annalen Bd. XII) sofort folgenden Satz:

Transformirt man η durch die 60 Ikosaedersubstitutionen, so geschieht dasselbe mit ζ. Dabei ergiebt sich die Substitution, welche ζ erfährt, aus der für η, indem man jedesmal ε^n durch ε ersetzt.

Nun kann n modulo 5 zu 1, 2, 3, 4 congruent sein. In den beiden letzten Fällen ersetze man ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ und bezeichne diese neue Grösse wieder einfach mit ζ. Dann hat man:

Die Transformation für ζ ist entweder mit der für η identisch, oder aus ihr abzuleiten, wenn man ε^2 durch ε ersetzt. Der erstere Fall tritt ein, wenn n quadratischer Rest modulo 5 ist, der andere Fall, wenn n Nichtrest ist.

§ 4.

Die Modulargleichungen zwischen η und ζ.

Der ausgesprochene Satz ermöglicht es, die Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen η und ζ in den niedersten Fällen ohne Weiteres hin-

zuschreiben. Man hat zu dem Zwecke auf meine frühere Arbeit (Math. Annalen Bd. XII) und namentlich auf Gordan's neueste Veröffentlichung zurückzugreifen (Math. Annalen Bd. XIII, p. 375 ff.: *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grad*).

Nehmen wir zunächst $n = 2, 3$. So haben wir eine Gleichung zwischen η und ζ, welche in beiden Veränderlichen vom dritten Grade bez. vom vierten Grade ist und die ungeändert bleibt, wenn man auf ζ eine beliebige Ikosaedersubstitution, auf η aber diejenige anwendet, die sich durch Verwandlung von ε in ε^2 ergiebt. *Also sind auf Grund der Gordan'schen Arbeit die Modulargleichungen für $n = 2, 3$ einfach diese:*

(4) $$0 = f = \zeta^3\eta^2 + \zeta^2 \quad + \zeta\eta^3 - \eta,$$

(5) $$0 = \varphi = \zeta^4\eta - \zeta^3\eta^4 - 3\zeta^2\eta^2 + \zeta + \eta^3.$$

Ich habe diese Gleichungen den Formeln (7), (8) der genannten Arbeit entnommen, indem ich einfach $\frac{y_1}{y_2}$ durch ζ, $\frac{x_1}{x_2}$ durch η ersetzte.

Betrachten wir ferner den Fall $n = 4$. Freilich haben wir oben nur den Fall einer Primzahl n erläutert. Aber man sieht leicht, dass sich für $n = 4$ nach Analogie mit den gewöhnlichen Modulargleichungen eine Gleichung sechsten Grades zwischen η und ζ ergiebt, und dass man vier der Werthe von ζ erhält, wenn man in (3) statt ω einträgt $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega+5}{n}$, $\frac{\omega+2\cdot5}{n}$, $\frac{\omega+3\cdot5}{n}$. Verwandeln wir dieses ζ der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen entsprechend in $-\frac{1}{\zeta}$, so werden also η, ζ gleichzeitig denselben Ikosaedersubstitutionen unterworfen. Beachten wir ferner dies. Für $\omega = i\infty$ wird η nach Formel (3) unendlich, die vier (neuen) ζ aber, welche $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega+5}{n}$, $\frac{\omega+2\cdot5}{n}$, $\frac{\omega+3\cdot5}{n}$ entsprechen, werden Null. Wir haben also den Satz, der sogleich zur Verwendung kommen soll: *Für $\eta = \infty$ werden mindestens vier von den sechs Werthen η gleich Null.*

Nun habe ich im zweiten Abschnitte meiner vorigen Arbeit die simultanen Invarianten eines Ikosaeders und einer quadratischen Form untersucht und gezeigt, dass sich alle aus *vier* Invarianten A, B, C, D zusammensetzen lassen. Nimmt man diese quadratische Form gleich $(x_1 - \eta x_2)(x_1 - \zeta x_2)$, so gehen A, B, C, D in Ausdrücke zweiten, sechsten, zehnten und fünfzehnten Grades in η und ζ über, und diese bilden nach den eben dort gegebenen Entwickelungen die Gesammtheit derjenigen Ausdrücke, welche sich (homogen geschrieben) nicht ändern, sobald man auf η und ζ simultan dieselben Ikosaedersubstitutionen anwendet. Ich setze insbesondere her:

(6) $$A = \frac{1}{n}(\eta - \zeta)^2,$$

(7) $$B = -\frac{1}{2}\left\{(\eta+\zeta)^4\eta\zeta - (\eta+\zeta)^2\eta^2\zeta^2 - 2\eta^3\zeta^3 + (\eta+\zeta)(1-\eta^5\zeta^5)\right\}.$$

Nun folgt ohne Weiteres, dass die Modulargleichung für $n = 4$, weil vom sechsten Grade, die Gestalt haben muss:

$$B - \lambda A^3 = 0,$$

und lassen wir hier η unendlich werden, so zeigt sich, dass $\lambda = 0$ ist. *Daher ist die Modulargleichung für $n = 4$ $B = 0$, wo B den Ausdruck* (7) *bedeutet**).

Es sind nun diese Modulargleichungen für $n = 2$ und $n = 4$, die ich gebrauche, um vom Ikosaeder aus zu den Formeln Hermite's und Brioschi's zu gelangen. Dabei muss ich freilich die gesammten Entwickelungen des zweiten und dritten Abschnitts meiner vorigen Arbeit als bekannt voraussetzen.

§ 5.

Geometrisches über die Jerrard'sche Form.

Im dritten Abschnitte der genannten Arbeit habe ich die fünf Wurzeln y einer Gleichung fünften Grades, für welche $\Sigma y = 0$ ist, ihrem Verhältnisse nach als Pentaedercoordinaten eines Raumpunktes gedeutet und insbesondere die Fläche zweiten Grades Ψ studirt, deren Gleichung $\Sigma y^2 = 0$ ist. Auf dieser Fläche liegt eine Raumcurve sechster Ordnung, K, vom Geschlechte 4, der Durchschnitt mit der Diagonalfläche $\Sigma y^3 = 0$. *Diese Curve ist das Bild der Jerrard'schen Gleichung*, insofern die Wurzeln y der letzteren, in bestimmter Ordnung genommen, jedesmal die Coordinaten eines Curvenpunktes vorstellen**).

Auf der Fläche zweiten Grades Ψ verlaufen ausserdem die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender; und wenn wir denselben, wie damals geschah, die Parameter η, ζ beilegen, so ist die Curve sechster Ordnung K eben durch die Gleichung (4):

$$f(\eta, \zeta) = 0$$

gegeben***), die dem letzten Paragraphen zufolge ausdrückt, dass η, ζ durch quadratische Transformation des elliptischen Integrals aus einander hervorgehen.

Die Curve K ist also das geometrische Bild der quadratischen Transformation. Wählt man eine Erzeugende η aus, so schneidet sie die Curve K in drei Punkten; die drei durch diese Punkte verlaufenden Erzeugenden der anderen Art haben als Parameter die drei Wurzeln

---

*) Dies zeigt, dass für $\eta = \infty$ *fünf* Werthe von η gleich Null werden, und *einer* gleich unendlich.

**) Das Geschlecht der Curve stimmt deshalb mit dem Geschlecht der später anzugebenden Galois'schen Resolvente der Jerrard'schen Gleichung überein.

***) Vergl. die Gordan'sche Arbeit. Es ist $f(\eta, \zeta) = 0$ damit gleichbedeutend, dass $\Sigma y^3 = 0$ ist.

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ der Gleichung $f(\eta, \zeta) = 0$. Berechnet man jetzt $J = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}$ und ebenso die drei Werthe $J' = 1728 \frac{H^3(\zeta_1)}{f^5(\zeta_1)}$, $1728 \frac{H^3(\zeta_2)}{f^5(\zeta_2)}$, $1728 \frac{H^3(\zeta_3)}{f^5(\zeta_3)}$, so hat man die drei Invarianten J', welche aus J durch quadratische Transformation hervorgehen*).

§ 6.

Die Jerrard'sche Form als Resolvente der Ikosaedergleichung.

Die Jerrard'sche Gleichung fünften Grades ist an sich keine Resolvente der Ikosaedergleichung $1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = J$, das heisst, es giebt keinen in η (und J) rationalen Ausdruck, welcher einer Jerrard'schen Gleichung genügt. Würde es einen solchen geben, so wären die Coordinaten eines Punktes der Curve K rational durch den Parameter η dargestellt und also das Geschlecht der Curve nicht 4, sondern 0. Vielmehr muss man, um, vom Ikosaeder ausgehend, zur Jerrard'schen Gleichung zu gelangen, eine Hülfsgleichung vom dritten Grade lösen**), und dieser Hülfsgleichung habe ich in meiner vorigen Arbeit (p. 525) folgende Form ertheilt:

$$\frac{8\lambda^3}{J} - 12\lambda^2 + 6\lambda + (J-2) = 0;$$

ich habe dabei nur jetzt J statt des früheren X geschrieben. Setzt man hier statt $2\lambda - 1 = \varrho\left(\frac{1-J}{J}\right)$, so kommt:

$$\varrho^3\left(\frac{1-J}{J}\right) + 3\varrho - 2 = 0,$$

oder:

$$J = \frac{\varrho^3}{(\varrho+2)(\varrho-1)^2}. \tag{8}$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen folgt nun, *dass diese Gleichung reducibel werden muss, wenn man neben J einen der drei Werthe J' einführt, welche aus J durch quadratische Transformation hervorgehen.* Anders ausgedrückt: die Gleichung wird reducibel, wenn wir eine der drei Wurzeln der Hülfsgleichung dritten Grades adjungiren, auf welche wir oben die Transformation zweiter Ordnung zurückgeführt haben:

$$J = \frac{(4\tau-1)^3}{27\tau}.$$

---

*) Genau ebenso versinnlicht der Durchschnitt der Fläche Ψ mit der Fläche vierter Ordnung $\Sigma y^4 = 0$ die Transformation dritter Ordnung $\varphi(\eta, \zeta) = 0$.

**) Diese kann, wegen $p = 4$, auch nicht etwa auf den zweiten Grad herabgedrückt werden.

Dies trifft in der That zu. Denn die unmittelbare Vergleichung ergiebt:

$$(9) \qquad \varrho = \frac{8\tau - 2}{8\tau + 1}. -$$

Will man das Doppelverhältniss $\sigma = \varkappa^2$ einführen, so hat man für die drei Wurzeln:

$$(10) \quad \varrho_1 = 2\frac{\sigma^2 - \sigma + 1}{\sigma - 2 \cdot 2\sigma - 1}, \quad \varrho_2 = 2\frac{\sigma^2 - \sigma + 1}{\sigma + 1 \cdot 2\sigma - 1}, \quad \varrho_3 = -2\frac{\sigma^2 - \sigma + 1}{\sigma + 1 \cdot \sigma - 2}.$$

Man sieht hieraus den inneren Grund, weshalb man bei dem Bestreben, die Gleichungen fünften Grades durch elliptische Functionen zu lösen, anfänglich zur Jerrard'schen Form kommen konnte. Der Grund liegt darin, *dass man nicht von der rationalen Invariante J des elliptischen Integrals, sondern vom Doppelverhältnisse $\sigma = \varkappa^2$ ausging, und so die Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung, ohne es zu wissen, adjungirte.*

§ 7.

Die Hermite'sche Gleichung.

Diese Betrachtungen finden ihre volle Bestätigung, wenn man die Gleichung fünften Grades behandelt, die Hermite durch elliptische Functionen löst*):

$$(11) \qquad y^5 - y - \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \varkappa^2}{\sqrt{\varkappa(1 - \varkappa^2)}} = 0.$$

Bemerken wir zunächst, dass alle Formeln Hermite's ungeändert bleiben, wenn man $\varkappa^2$ durch $\frac{1}{\varkappa^2}$ ersetzt. Es ist daher zweckmässig, eine symmetrische Verbindung derselben einzuführen, also etwa

$$\tau = -\frac{1}{4}\left(\varkappa^2 + \frac{1}{\varkappa^2} - 2\right),$$

dasselbe τ, welches in der von uns für Transformation zweiter Ordnung aufgestellten Gleichung dritten Grades vorkommt (nach Gleichung (6) des vorigen Abschnitts). Dann wird die Hermite'sche Gleichung

$$(12) \qquad y^5 - y - \frac{4}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\tau - 1}{2}}}{\sqrt{\tau}} = 0,$$

und um eine beliebige Jerrard'sche Gleichung, die ich so schreiben will:

$$(13) \qquad y^5 + 5\beta y + \gamma = 0,$$

auf sie zu reduciren, bekommt man für τ die quadratische Gleichung:

$$(14) \qquad \frac{256\beta^5}{\gamma^4} = \frac{4\tau}{(\tau - 1)^2},$$

---

*) Die Irrationalitäten des letzten Coefficienten rühren nur davon her, dass die beiden anderen Coefficienten gleich 1 gemacht sind.

die aufgelöst ergiebt:

$$\frac{\tau+1}{\tau-1} = \pm\frac{\sqrt{256\beta^5+\gamma^4}}{\gamma^2}. \tag{15}$$

Hier bemerke man

1) dass die Quadratwurzel aus der Discriminante von (13) gezogen ist.

2) dass ein Vorzeichenwechsel derselben τ in $\frac{1}{\tau}$ verwandelt.

Nun entspricht der Wechsel des Vorzeichens der Discriminante nach meiner früheren Darstellung einer Vertauschung der beiden durch den Raumpunkt y hindurchlaufenden geradlinigen Erzeugenden, und die Gleichung $\tau' = \frac{1}{\tau}$ bedeutet, nach Abschnitt II. der gegenwärtigen Arbeit, eine quadratische Transformation. Der Wechsel zwischen den beiden Erzeugenden bringt also eine quadratische Transformation mit sich, wie es nach dem Vorhergehenden sein sollte.

Noch evidenter wird die Uebereinstimmung, wenn man nach § 7. des dritten Abschnittes meiner vorigen Arbeit (p. 553, 554), den ich eben zu diesem Zwecke dort eingeschaltet habe, für die Hermite'sche Gleichung (11) die beiden dort X_1, X_2 genannten Ikosaederconstanten berechnet. So kommt:

$$X_1 = \frac{4}{27}\cdot\frac{(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^4(1-\varkappa^2)^2}, \qquad X_2 = \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{108\varkappa^2(1-\varkappa^2)^4}, \tag{16}$$

und dies sind, wie im ersten Abschnitte der gegenwärtigen Arbeit gezeigt wurde, genau die absoluten Invarianten J, J' der beiden durch quadratische Transformation aus einander hervorgehenden Integrale:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y\cdot 1-y\cdot 1-\varkappa^2 y}} \quad\text{und}\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-\varkappa^2x^2}}.$$

Es ergiebt sich hiernach, dass die Jerrard'sche Gleichung, welche nach § 6. aus der Ikosaedergleichung

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{(4\tau-1)^3}{27\tau} \tag{17}$$

abgeleitet werden kann, mit der Hermite'schen Gleichung fünften Grades (12) geradezu identisch ist, und dass wir umgekehrt (17) als einfachste Galois'sche Resolvente der in der Gestalt (12) geschriebenen Hermite'schen Gleichung ansprechen können*).

---

*) In der That ist das Geschlecht von (17) gleich 4. Uebrigens kann (17), wie oben angegeben [Abschn. III. p. 159], direct durch hypergeometrische Reihen gelöst werden.

§ 8.

Die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades mit $B = 0$.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades mit $B = 0$ über. In § 4. dieses Abschnittes haben wir die quadratische Form

$$A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

die im zweiten Abschnitte meiner vorigen Arbeit der Betrachtung zu Grunde liegt, durch

$$(x_1 - \eta x_2)(x_1 - \xi x_2)$$

ersetzt. Das heisst, im Sinne der damals gebrauchten geometrischen Redeweise, wir haben den Punkt $A_0 : A_1 : A_2$ ersetzt durch die beiden Berührungspunkte η, ξ der beiden von ihm an den Kegelschnitt $A = 0$ gelegten Tangenten. Deshalb ist also die Gleichung

$$B(\eta, \xi) = 0, \tag{7}$$

wie sie soeben für die Transformation vierter Ordnung aufgestellt wurde, die Bedingung dafür, dass sich die in den Punkten η, ξ des Kegelschnitts $A = 0$ construirten Tangenten auf der Curve $B = 0$ kreuzen. Ziehen wir jetzt in einem Punkte η des Kegelschnitts $A = 0$ eine Tangente und construiren die sechs Berührungspunkte der sechs weiteren Tangenten, welche man von den Durchschnittspunkten dieser geraden Linie mit der Curve B an den Kegelschnitt A legen kann. Nun sind die sechs Wurzeln der Modulargleichung für Transformation vierten Grades, wie bekannt, paarweise unter einander wieder durch Transformation vierter Ordnung verbunden. Daher müssen sich die sechs construirten Tangenten noch dreimal zu zwei wieder auf der Curve B schneiden. Und so haben wir den Satz:

Man kann um $A = 0$ unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Ecken auf $B = 0$ liegen. Jeder Punkt auf B ist Ecke eines solchen Dreiecks, während jede Tangente von A dreimal als Dreiecksseite benutzt wird.

Ich habe diesen Satz p. 542 meiner vorigen Arbeit ohne Beweis mitgetheilt und damals aus den von Brioschi gegebenen Formeln erschlossen. Umgekehrt benutze ich ihn hier, um die Uebereinstimmung meiner Ueberlegungen mit Brioschi's Rechnungen zu erweisen.

§ 9.

Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Ich lasse nun den Ueberblick über die verschiedenen Auflösungsarten der Gleichungen fünften Grades folgen, den ich schon das vorige Mal in Aussicht stellte. Ich wünsche deutlich zu machen, dass sich

die verschiedenen bis jetzt bekannten Methoden mit der von mir gegebenen in allerengste Beziehung setzen lassen.

Mein Ansatz verlangt zunächst, die Gleichung fünften Grades durch Tschirnhausentransformation so umzugestalten, dass $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ ist. Dann wird nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante auf rationalem Wege eine Ikosaedergleichung hergestellt. — Hermite dagegen machte, um eine durch elliptische Functionen lösbare Gleichung zu haben, auch noch Σy^3 zu Null. Dazu gehörte ausser der Quadratwurzel aus der Discriminante die Auflösung noch einer cubischen Hülfsgleichung. Die letztere war, wie meine Methode zeigte, jedenfalls überflüssig. Wir können uns nach den Entwickelungen der letzten Paragraphen so ausdrücken: *sie war das Aequivalent dafür, dass man statt der absoluten Invariante des elliptischen Integrals den Modul* $\varkappa^2$ *suchte.*

Die Verbesserung, die in der Vermeidung der cubischen Hülfsgleichung liegt, kann, wie oben gezeigt wurde (Abschn. II., § 18.), eben auch bei Kronecker's Lösung*) angebracht werden. Nur ist die Aenderung, welche daraus resultirt, keine so tief greifende, wie bei Hermite, da es sich nur darum handelt, die Berechnung der transcendenten Functionen umzugestalten und der algebraische Theil der Theorie nicht berührt wird. Dieser algebraische Theil ist nun seinerseits mit meinem Verfahren wieder enge verwandt.

Kronecker leitet aus der allgemeinen Gleichung fünften Grades nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante eine allgemeine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades auf rationalem Wege ab und verwandelt dann letztere mit Hülfe einer Quadratwurzel in eine solche mit $A = 0$, d. h. im Wesentlichen in eine Ikosaedergleichung. Dieselben Schritte werden bei mir in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt; ich gebrauche zuerst die Hülfsquadratwurzel (bei der Tchirnhausentransformation) und dann erst die Quadratwurzel aus der Discriminante. Aber im Grunde kommt das auf dasselbe hinaus. Denn im Sinne meiner geometrischen Redeweise bedeutet die Herstellung der *allgemeinen* Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades, dass man dem Raumpunkte $y_0 \cdots y_4$, der die Gleichung fünften Grades vertritt, ein *Paar* von Erzeugenden der *einen* Art der Fläche Ψ zuordnet**), das

*) Ich verstehe unter Kronecker's Lösung immer diejenige, die er in seinem ersten Briefe an Hermite angab (Comptes Rendus, Juni 1858). — Die Identität der in den beiden Fällen gebrauchten Hülfsgleichung bildet den wesentlichen Inhalt meines in den Rendi conti des Istituto Lombardo (April 1877) veröffentlichten Briefes an Brioschi.

**) Von dieser Auffassungsweise ausgehend erhält man sehr einfache Formeln zur Herstellung der allgemeinen Jacobi'schen Gleichung, bei denen man nicht, wie bei den Brioschi'schen, den Begriff der cyklischen Function benutzt.

man dann, um zu einer Gleichung mit $A = 0$ zu gelangen, am einfachsten in seine zwei Bestandtheile zerlegt (siehe den zweiten Abschnitt meiner vorigen Arbeit). Dann ist also schliesslich dem Raumpunkte y *eine* Erzeugende der *einen* Art zugeordnet. Eben dies erreicht meine Methode, indem sie zunächst dem Punkte y einen *Punkt* auf der Fläche Ψ zuordnet und dann unter den beiden durch diesen Punkt hindurchlaufenden Erzeugenden die eine wählt. —

Ich glaube nun aber nach den Entwickelungen des dritten hier vorangehenden Abschnittes auch das allgemeine Princip bezeichnen zu können, demzufolge man die Auflösung der Gleichungen fünften Grades auf die Ikosaedergleichung zurückführen *muss*. Dieses Princip, wie es sich hier darstellt, scheint folgendes zu sein. Sicher wird man suchen, so lange es angeht, die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen auf diejenige specieller Gleichungen zurückzuführen, welche nur *einen* Parameter enthalten*). Denn nur die algebraischen Functionen *einer* Variablen beherrscht man zur Zeit einigermassen. Unter diesen speciellen Gleichungen scheinen nun immer diejenigen die wichtigsten zu sein, *deren Galois'sche Resolvente das kleinstmögliche Geschlecht besitzt.* Hat man bei einer Gleichung fünften Grades die Quadratwurzel aus der Discriminante adjungirt, so kann dies Geschlecht bis auf Null herabsinken, und dem eben entspricht, dass man die Ikosaedergleichung einführt. Unzweckmässig aber ist es, wenn man z. B. als Normalform der Gleichungen fünften Grades die Jerrard'sche wählt. Denn dann ist das Geschlecht der Galois'schen Resolvente gleich 4, und dies bringt den doppelten Missstand mit sich, dass die zu Grunde gelegte Irrationalität minder einfach ist, und dass es schwieriger ist, die allgemeine Gleichung fünften Grades auf sie zurückzuführen.

Anhang.

Ich füge hier noch eine Vervollständigung meiner früheren Arbeit über das Ikosaeder (Math. Annalen Bd. XII) hinzu, welche ich damals schon in Aussicht stellte; sie betrifft die *numerischen* Constanten, welche bei der Auflösung der Ikosaedergleichung und anderen dort gegebenen Entwickelungen auftreten.

Auf p. 514 handelt es sich zunächst um die Werthe, welche die Veränderliche η in einem gewissen Punkte H' und in einem Punkte T' annimmt. Es waren:

---

*) Die Gesichtspunkte, welche Kronecker in seiner zweiten Arbeit über Gleichungen fünften Grades angedeutet hat (Berliner Monatsberichte 1861, Borchardt's Journal Bd. 59), zielen nach anderer Richtung.

$$\eta_{H'} = 1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4,$$
$$\eta_{T'} = \varepsilon^3 [(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + i(\varepsilon - \varepsilon^4)].$$

Dann wird weiterhin η durch $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ ersetzt und η_1, η_2 so bemessen, dass $f(\eta_1, \eta_2) = 1$ ist. Dies giebt für die Punkte H', T' Resultate, die sich auch ohne numerische Auswerthung sehr einfach anschreiben, wie ich nun angebe:

1) Beim Punkte H' kommt:

$$\eta_1 = \frac{i\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} \cdot \sqrt{1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4}}{\sqrt[12]{-5^4}}, \quad \eta_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} \cdot \sqrt{1 - \alpha^2\varepsilon - \alpha\varepsilon^4}}{\sqrt[12]{-5^4}}$$

mit der Bedingung:

$$\sqrt{1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4} \cdot \sqrt{1 - \alpha^2\varepsilon - \alpha\varepsilon^4} = + i.$$

Bei geeigneter Wahl der zwölften Wurzel können wir auch schreiben:

$$\eta_1 = \frac{\sqrt[?]{2 \sin 36^0 (1 + 2 \cos 12^0)}}{\sqrt[3]{5}}, \quad \eta_2 = \frac{\sqrt[?]{2 \sin 36^0 (2 \cos 48^0 - 1)}}{\sqrt[3]{5}}.$$

2) Beim Punkte T' ergiebt sich bis auf eine beliebig zuzufügende zwölfte Einheitswurzel:

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon^4 \sqrt[?]{-(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)}}{\sqrt{5(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}}, \quad \eta_2 = \frac{-\varepsilon\sqrt[?]{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)}}{\sqrt{5(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}},$$

wo

$$\sqrt[?]{-(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)} \cdot \sqrt[?]{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)} = + 1.$$

Anders geschrieben:

$$\eta_1 = 2\varepsilon^4 \frac{\sqrt[?]{\cos 9^0 \sin 63^0}}{\sqrt{-10 \sin 54^0}}, \quad \eta_2 = -2\varepsilon \frac{\sqrt[?]{\sin 9^0 \cos 63^0}}{\sqrt{-10 \sin 54^0}}.$$

An diese Ausdrücke knüpft sich nun unmittelbar die Definition der auf p. 515 mitgetheilten Zahlencoefficienten. Man hat für Formel (9):

$$1{,}13229 = \frac{960}{14 \cdot 49} \cdot \frac{\sqrt[?]{2 \sin 36^0 (1 + 2 \cos 12^0)}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{49}{60}\right) \cdot \Pi\left(\frac{19}{60}\right)}{\Pi\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \Pi\left(\frac{1}{3}\right)},$$

$$= \frac{24 \cdot 60}{29 \cdot 49} \cdot \frac{2\sqrt[?]{\cos 9^0 \sin 63^0}}{\sqrt{10 \sin 54^0}} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{49}{60}\right) \cdot \Pi\left(\frac{29}{60}\right)}{\Pi\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \Pi\left(\frac{1}{2}\right)};$$

$$0{,}25495 = \frac{20}{31} \cdot \frac{\sqrt[3]{2 \sin 36^0 (2 \cos 48^0 - 1)}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{1}{60}\right) \cdot \Pi\left(\frac{31}{60}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \Pi\left(\frac{1}{3}\right)},$$

$$= \frac{30}{41} \cdot \frac{2 \sqrt[3]{\sin 9^0 \cos 63^0}}{\sqrt[3]{10 \sin 54^0}} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{1}{60}\right) \cdot \Pi\left(\frac{41}{60}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \Pi\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Bei allen Wurzeln sind hier die reellen positiven Werthe zu nehmen. — Für die Constanten der Formel (10) aber hat man einfach (wie selbstverständlich):

$$1{,}13074 - i \cdot 0{,}05926 = (\cos\ 3^0 - i \sin\ 3^0) \cdot 1{,}13229,$$
$$0{,}21382 + i \cdot 0{,}13885 = (\cos 33^0 + i \sin 33^0) \cdot 0{,}25495. \text{ —}$$

Auf ähnlichen Ueberlegungen beruht der Ansatz auf p. 536, 537 daselbst. Berechnet man z. B. aus den soeben für H' angegebenen Werthen von η_1, η_2 die Coordinaten A_0, A_1, A_2 nach der Formel:

$$A_0 = - \eta_1 \eta_2, \quad A_1 = \eta_2^2, \quad A_2 = - \eta_1^2,$$

so kommt:

$$A_0 = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt[6]{-5^4}},$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt[6]{-5^4}} (1 - \alpha^2 \varepsilon - \alpha \varepsilon^4),$$

$$A_2 = - \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt[6]{-5^4}} (1 - \alpha \varepsilon - \alpha^2 \varepsilon^4),$$

und in diesen Ausdrücken erkennt man die mit λ multiplicirten Bestandtheile der ersten auf p. 536 angegebenen Formel. In ähnlicher Weise sind die anderen A_0, A_1, A_2 gewählt: dem *Verhältnisse* nach sind sie durch die geometrische Definition gegeben; ihrer *absoluten Grösse* nach sind sie so bemessen, dass $A = A_0^2 + A_1 A_2$, oder, wenn es Null ist, $B(A_0, A_1, A_2) = - f(\eta_1, \eta_2)$ einen rationalen Werth annimmt.

München, Anfang Mai 1878.

Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

Von H. Weber in Königsberg in Pr.

Eine aufmerksame Betrachtung der algebraischen Relationen, welche zwischen den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen bestehen, lässt leicht erkennen, dass man unter den Quotienten zweier solcher Functionen auf mehrfache Art neun solche auswählen kann, welche den Bedingungen für die Transformationscoefficienten zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme identisch genügen. Der Hinblick auf Jacobi's elegante Darstellung der Rotation eines festen Körpers im leeren Raum durch die elliptischen Thetafunctionen legt den Versuch nahe, diese Ausdrücke der Transformationscoefficienten für die Mechanik der Bewegung eines festen Körpers nutzbar zu machen, indem man für die Variablen der Thetafunctionen lineare Functionen der Zeit setzt. Die Verfolgung dieses Gedankens führt zu einer eleganten analytischen Darstellung der Bewegung eines festen Körpers von gewisser Beschaffenheit in einer unendlich ausgedehnten incompressiblen Flüssigkeit ohne den Einfluss beschleunigender Kräfte. Es ist, mit einer Beschränkung bezüglich des Anfangszustandes, derselbe Fall einer solchen Bewegung, von dem Clebsch (Math. Annalen Bd. III, p. 238) durch Angabe des letzten Multiplicators gezeigt hat, dass er sich durch Quadraturen darstellen lasse.

Ich werde nun zunächst, behufs einer ersten Lösung des Problems, in der oben angedeuteten Weise von den Thetafunctionen ausgehen, und dann zeigen, wie man zu denselben Resultaten auch durch die Umkehrung hyperelliptischer Integrale gelangen kann. Zur Erleichterung des Verständnisses schicke ich eine Uebersicht der wichtigsten Sätze und Formeln aus der Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen voraus, soweit sie im Nachfolgenden zur Anwendung kommen.

§ 1.

Wir definiren als Θ-Function der Ordnung δ der beiden Veränderlichen v_1, v_2 eine Function, welche nach ganzen steigenden und fallenden Potenzen von e^{v_1}, e^{v_2} in eine stets convergente Reihe entwickelbar ist, und welche ausserdem den Bedingungen genügt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Theta(v_1+\pi i, v_2) &= (-1)^{g_1}\Theta(v_1, v_2), \\ \Theta(v_1, v_2+\pi i) &= (-1)^{g_2}\Theta(v_1, v_2); \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Theta(v_1+a_{11}, v_2+a_{12}) &= (-1)^{h_1} e^{-(2v_1+a_{11})\delta}\,\Theta(v_1, v_2), \\ \Theta(v_1+a_{21}, v_2+a_{22}) &= (-1)^{h_2} e^{-(2v_2+a_{22})\delta}\,\Theta(v_1, v_2), \end{aligned}$$

worin a_{11}, $a_{12}=a_{21}$, a_{22} beliebige reelle oder complexe Grössen bedeuten, welche an die Bedingung gebunden sind, dass der reelle Theil von

$$\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

eine *negative* Function ist. Der Zahlencomplex

$$(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix},$$

welcher aus den Elementen 0, 1 gebildet werden kann, heisst die *Charakteristik* der Θ-Function. Die Anzahl der von einander verschiedenen Charakteristiken beträgt 16; dieselben werden unterschieden in gerade und ungerade Charakteristiken, je nachdem $g_1h_1 + g_2h_2$ gerade oder ungerade ist. Die Anzahl der ersteren ist 10, die der letzteren 6. Unter der Summe zweier Charakteristiken verstehen wir diejenige Charakteristik, die durch Addition entsprechender Elemente der beiden entsteht, wonach die Elemente der neu entstandenen Charakteristik auf ihre Reste (mod 2) reducirt werden können.

Macht man, den Bedingungen (1) entsprechend, für eine Θ-Function den Ansatz:

$$\Theta\{\varpi\}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty,\,\infty}^{n_1,\,n_2} A_{n_1,\,n_2} e^{(2n_1+g_1)v_1 + (2n_2+g_2)v_2},$$

so lassen sich durch die Bedingungen (2) alle Coefficienten $A_{n_1,\,n_2}$ durch δ^2 unter ihnen linear ausdrücken, und man erhält, wenn man setzt:

$$(3)\qquad \Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, & v_2 \\ \nu_1, & \nu_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{-\infty,\,\infty}^{n_1,\,n_2} e^{\frac{1}{\delta}\varphi\left(\delta n_1+\nu_1+\frac{1}{2}g_1,\; \delta n_2+\nu_2+\frac{1}{2}g_2\right) + \left(\delta n_1+\nu_1+\frac{1}{2}g_1\right)\left(2v_1+\frac{h_1\pi i}{\delta}\right) + \left(\delta n_2+\nu_2+\frac{1}{2}g_2\right)\left(2v_2+\frac{h_2\pi i}{\delta}\right)}$$

für $\Theta\{\varpi\}(v_1, v_2)$ den allgemeinen Ausdruck:

$$(4)\qquad \Theta\{\varpi\}(v_1, v_2)\; \underset{\nu_1,\,\nu_2}{S}\; C_{\nu_1,\,\nu_2}\,\Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, & v_2 \\ \nu_1, & \nu_2 \end{pmatrix},$$

worin in der Summe $S\ \nu_1, \nu_2$ je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul δ durchlaufen. Hierdurch ist, da die in (3) eingeführten Reihen unbedingt convergent sind, nicht nur die Existenz der Θ-Functionen jeder Ordnung dargethan, sondern es ist auch der wichtige Satz bewiesen, dass die allgemeinste Function dieser Art δ^2 willkürliche Constanten linear und homogen enthält, oder dass zwischen höchstens $\delta^2 + 1$ solchen Functionen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht.

Die in (3) eingeführten speciellen Θ-Functionen genügen den folgenden Bedingungen:

$$(5)\quad \Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1 + \frac{\varepsilon_1 \pi i}{\delta}, & v_2 + \frac{\varepsilon_2 \pi i}{\delta} \\ \nu_1 & , \quad \nu_2 \end{pmatrix} = e^{(2\nu_1+g_1)\frac{\varepsilon_1 \pi i}{2\delta} + (2\nu_2+g_2)\frac{\varepsilon_2 \pi i}{2\delta}}\, \Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, v_2 \\ \nu_1, \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Da nun die Determinante der $\delta^2 \cdot \delta^2$ Grössen, die man erhält, wenn man in $e^{(\nu_1\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2)\frac{\pi i}{\delta}}$ sowohl ν_1, ν_2 als $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ je ein vollständiges Restsystem (mod δ) durchlaufen lässt, von Null verschieden ist, so folgt, dass die δ^2 Functionen (3) in der That von einander linear unabhängig sind.

Ersetzt man in (3) v_1, v_2 durch $-v_1, -v_2$, so findet man:

$$(6)\quad \Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} -v_1, & -v_2 \\ \nu_1, & \nu_2 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{\delta}\left((2\nu_1+g_1)h_1 + (2\nu_2+g_2)h_2\right)}\, \Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, & v_2 \\ -\nu_1 - g_1, & -\nu_2 - g_2 \end{pmatrix}.$$

Da nun eine Aenderung von ν_1, ν_2 um Vielfache von δ ohne Einfluss ist, so erkennt man hieraus, dass bei Aenderung der Vorzeichen beider Argumente je zwei verschiedene der in (4) vorkommenden Functionen $\Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, v_2 \\ \nu_1, \nu_2 \end{pmatrix}$, abgesehen von einem constanten Factor, in einander übergehen, ausgenommen solche Functionen, für welche

$$(7)\qquad 2\nu_1 + g_1 \equiv 0, \quad 2\nu_2 + g_2 \equiv 0 \pmod{\delta},$$

welche entweder ungeändert bleiben, oder nur ihr Vorzeichen ändern.

Hieraus lässt sich erkennen, wie die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer Θ-Function sich vermindert, wenn noch verlangt wird, dass die Function entweder gerade oder ungerade sein soll. Es ist hierzu nur nöthig, die Constanten in den Functionen

$$\Theta\{\varpi\}(v_1, v_2) + \Theta\{\varpi\}(-v_1, -v_2),$$
$$\Theta\{\varpi\}(v_1, v_2) - \Theta\{\varpi\}(-v_1, -v_2)$$

zu zählen, wodurch sich Folgendes ergiebt.

a) Ist δ gerade, so gehen, wenn nicht g_1, g_2 beide $= 0$ sind, je zwei verschiedene der Functionen $\Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_1, v_2 \\ \nu_1, \nu_2 \end{pmatrix}$ durch Aenderung der

Vorzeichen in einander über, sind aber g_1, g_2 beide $= 0$, so existiren vier unter diesen Functionen, entsprechend den Combinationen $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$, $(\frac{1}{2}\delta, 0)$, $(0, \frac{1}{2}\delta)$, $(\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta)$, welche entweder gerade oder ungerade Functionen sind, und zwar sind zwei von ihnen gerade, zwei ungerade, ausser wenn h_1, h_2 beide $= 0$ sind, in welchem Fall die vier erwähnten Functionen gerade sind.

Daraus ergiebt sich, *dass bei geraden* δ $\frac{1}{2}\delta^2$ *gerade und* $\frac{1}{2}\delta^2$ *ungerade linear unabhängige* Θ*-Functionen existiren mit alleiniger Ausnahme der Charakteristik* $(\varpi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *für welche die Anzahl der linear unabhängigen geraden* Θ*-Functionen* $\frac{1}{2}\delta^2 + 2$, *die der ungeraden* $\frac{1}{2}\delta^2 - 2$ *beträgt.*

b) Ist δ ungerade, so können die Congruenzen (7) stets auf eine einzige Art befriedigt werden, und daraus folgt, dass es unter den Functionen $\Theta\{\varpi\}\begin{pmatrix} v_2, v_2 \\ \nu_1, \nu_2 \end{pmatrix}$ *eine* giebt, welche bei gerader Charakteristik (ϖ) eine gerade, bei ungeradem (ϖ) eine ungerade Function ist, während die übrigen durch die Zeichenänderung paarweise in einander übergehen.

Es giebt also bei ungeradem δ *und gerader Charakteristik* $\frac{1}{2}(\delta^2 + 1)$ *gerade,* $\frac{1}{2}(\delta^2 - 1)$ *ungerade, bei ungeradem* δ *und ungerader Charakteristik* $\frac{1}{2}(\delta^2 + 1)$ *ungerade und* $\frac{1}{2}(\delta^2 - 1)$ *gerade linear unabhängige* Θ*-Functionen**).

Hiernach existirt für jede Charakteristik eine und nur eine Θ-Function erster Ordnung, und diese ist eine gerade oder eine ungerade Function in Uebereinstimmung mit der Charakteristik. Diese 16 Functionen, welche wir schlechtweg Thetafunctionen nennen, sind:

$$(8) \quad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1, g_2 \\ h_1, h_2 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty, \infty}^{n_1, n_2} e^{\varphi(n_1 + \frac{1}{2}g_1,\ n_2 + \frac{1}{2}g_2) + \Sigma(n + \frac{1}{2}g)(2v + h\pi i)},$$

worin die Summe im Exponenten sich auf die Indices 1, 2 bezieht. Aus dieser Definition ergeben sich leicht die folgenden Eigenschaften. Bedeuten ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' beliebige ganze Zahlen, so ist:

$$(9) \quad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 + 2\varepsilon_1, g_2 + 2\varepsilon_2 \\ h_1 + 2\varepsilon_1', h_2 + 2\varepsilon_2' \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = (-1)^{\Sigma g\varepsilon'}\,\vartheta\begin{Bmatrix} g_1, g_2 \\ h_1, h_2 \end{Bmatrix}(v_1, v_2).$$

Setzen wir ferner:

$$\varpi_1' = h_1'\pi i + g_1' a_{11} + g_2' a_{21}, \quad \varpi_2' = h_2'\pi i + g_1' a_{12} + g_2' a_{22}$$

---

*) Vgl. Hermite „Sur la Theorie de la Transformation des fonctions Abéliennes". No. IX. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome XL (1855).

und nennen

$$(\varpi') = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{pmatrix}$$

die Charakteristik des halben Periodensystems $\frac{1}{2}\varpi_1'$, $\frac{1}{2}\varpi_2'$, so ist:

$$\begin{aligned}(10) \qquad & \vartheta\{\varpi\}(v_1 + \tfrac{1}{2}\varpi_1', v_2 + \tfrac{1}{2}\varpi_2') \\ & = e^{-\frac{1}{4}\varphi(g_1', g_2') - \frac{1}{2}\pi i \Sigma g'(h+h') - \Sigma g' v}\, \vartheta\{\varpi + \varpi'\}(v_1, v_2),\end{aligned}$$

wonach man die 16 ϑ-Functionen durch eine beliebige unter ihnen ausdrücken kann. Daraus folgt noch weiter:

$$(11) \qquad \vartheta\{\varpi + \varpi'\}(v_1, v_2) = (-1)^{\Sigma h'(g+g')}\, \vartheta\{\varpi - \varpi'\}(v_1, v_2).$$

Die Producte zweier ϑ-Functionen sind Θ-Functionen zweiter Ordnung, deren Charakteristik die Summe der Charakteristiken der beiden Factoren ist. Aus obigen Sätzen ergeben sich daher zahlreiche Relationen zweiter Ordnung zwischen den ϑ-Functionen. Um diese Relationen übersichtlich darzustellen, bezeichnen wir die ungeraden Charakteristiken in irgend einer Reihenfolge mit (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6). Dann gelten folgende Sätze:

1) Die unmittelbare Addition ergiebt $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) = (0)$, wenn mit (0) die Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet ist.

Daraus folgt, dass nicht die Summe von vieren dieser Charakteristiken $= (0)$ sein kann, und dass sonach die 15 Summen $(\beta_i + \beta_k)$ alle von einander und von (0) verschieden sind. Also:

2) Jede Charakteristik, (0) ausgenommen, lässt sich auf eine einzige Art als Summe zweier ungerader Charakteristiken darstellen.

Fügen wir zu einer beliebigen, von (0) verschiedenen Charakteristik sämmtliche sechs ungerade Charakteristiken, so ergeben demnach zwei von diesen Summen ungerade, vier gerade Charakteristiken, woraus folgt:

3) Jede Charakteristik mit Ausschluss von (0) lässt sich auf vier Arten in eine gerade und eine ungerade Charakteristik zerlegen.

Fügt man zu einer beliebigen von (0) verschiedenen Charakteristik die 10 geraden hinzu, so schliesst man auf gleiche Weise:

4) Jede Charakteristik mit Ausschluss von (0) lässt sich auf drei Arten in zwei gerade Charakteristiken zerlegen.

5) Die Summe dreier von einander verschiedener ungeraden Charakteristiken ist eine gerade Charakteristik; denn im entgegengesetzten Fall wäre die Summe von vier ungeraden Charakteristiken $= (0)$. Zwei solche Summen sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie zusammen alle sechs ungeraden Charakteristiken enthalten. Daraus schliesst man:

6) Jede gerade Charakteristik, einschliesslich (0), lässt sich auf zwei Arten als Summe von drei ungeraden Charakteristiken darstellen.

Wählt man, indem man $(\beta_0) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ setzt, die vier Thetaquadrate

$$\vartheta^2\{\beta_0\}(v_1, v_2), \quad \vartheta^2\{\beta_1\}(v_1, v_2), \quad \vartheta^2\{\beta_2\}(v_1, v_2), \quad \vartheta^2\{\beta_3\}(v_1, v_2),$$

so besteht zwischen diesen, wie leicht zu sehen, keine lineare Abhängigkeit, und daher kann jedes andere Thetaquadrat linear durch diese ausgedrückt werden. Die Coefficienten eines solchen linearen Ausdrucks lassen sich dadurch bestimmen, dass man für die Argumente v_1, v_2 Systeme halber Perioden setzt mit den Charakteristiken

$$(0), \; (\beta_0 + \beta_1), \; (\beta_0 + \beta_2), \; (\beta_0 + \beta_3).$$

Ist

$$(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}, \quad (\beta_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} \end{pmatrix},$$

so findet man auf diese Weise, wenn man in denjenigen Thetafunctionen, in welchen die Argumente die Werthe 0 haben, diese in der Bezeichnung unterdrückt:

(12) $$\vartheta^2\{\beta_0\}\,\vartheta^2\{\varpi\}(v_1, v_2)$$
$$= \sum_{0,3}^{i} (-1)^{\Sigma(\nu^{(0)} + \nu^{(i)})(\mu^{(i)} + h)}\, \vartheta^2\{\beta_0 + \beta_i + \varpi\}\, \vartheta^2\{\beta_i\}(v_1, v_2),$$

eine Formel, in der, wenn (ϖ) von $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ verschieden ist, rechts nur drei Glieder übrig bleiben, da von den vier Charakteristiken $\{\beta_0 + \beta_i + \varpi\}$ immer eine ungerade ist.

Vermehrt man in dieser Formel die Argumente v_1, v_2 um ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik $(\varpi + \varpi')$, worin $(\varpi') = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{pmatrix}$, so folgt:

(13) $$\vartheta^2\{\beta_0\}\,\vartheta^2\{\varpi'\}(v_1, v_2)$$
$$= \sum_{0,3}^{i} (-1)^{\Sigma(h + \mu^{(i)})(g + g' + \nu^{(i)} + \nu^{(0)})}\, \vartheta^2\{\varpi + \beta_0 + \beta_i\}\, \vartheta^2\{\varpi + \varpi' + \beta_i\}(v_1, v_2)$$

und für $(\varpi') = (\beta_0)$

(14) $$\vartheta^2\{\beta_0\}\,\vartheta^2\{\beta_0\}(v_1, v_2)$$
$$= \sum_{0,3}^{i} (-1)^{\Sigma(g + \nu^{(i)})(h + \mu^{(i)})}\, \vartheta^2\{\varpi + \beta_0 + \beta_i\}\, \vartheta^2\{\varpi + \beta_0 + \beta_i\}(v_1, v_2).$$

Gehen wir nun zu den Relationen zwischen den Producten von zwei verschiedenen ϑ-Functionen über, so ergiebt sich, dass zwischen drei solchen Producten, deren Charakteristiken dieselbe Summe haben, und

die gleichzeitig entweder gerade oder ungerade Functionen sind, eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht. Indem man die Coefficienten einer solchen Relation ebenso bestimmt, wie oben, erhält man die Formel:

$$(15)\quad \sum_{1,3}^{i}(-1)^{\Sigma\mu^{(i)}\nu^{(0)}}\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_i+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_5\}(v_1,v_2)\,\vartheta\{\beta_i\}(v_1,v_2)=0,$$

und durch Vermehrung der Argumente um ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik $(\beta_i+\beta_6)$:

$$(16)\quad \sum_{1,3}^{i}(-1)^{\Sigma(\mu^{(i)}\nu^{(0)}+\nu^{(i)}\mu^{(6)})}\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_i+\beta_5+\beta_6\}\times$$
$$\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_6\}(v_1,v_2)\,\vartheta\{\beta_i+\beta_5+\beta_6\}(v_1,v_2)=0.$$

Die Anzahl aller Formeln von der Gestalt (17), (18) beträgt 120, nämlich zu jeder von (0) verschiedenen Charakteristik gehörig, acht.

Wir führen nun die Symbole ein:

$$(17)\qquad D_1=\frac{\partial}{\partial v_1},\quad D_2=\frac{\partial}{\partial v_2},\quad D=\frac{\partial}{\partial v_1}Dv_1+\frac{\partial}{\partial v_2}Dv_2,$$

und lassen auch hier in der Bezeichnung die Argumente v_1, v_2 weg, wenn dieselben nach der Differentiation $=0$ gesetzt sind.

Gebraucht man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$[\beta_1,\beta_2]=D_1\vartheta\{\beta_1\}\,D_2\vartheta\{\beta_2\}-D_1\vartheta\{\beta_2\}\,D_2\vartheta\{\beta_1\},$$

differentiirt die Gleichung (15) nach jeder der beiden Variablen und setzt darauf dieselben $=0$, so ergeben sich die drei Determinanten $[\beta_2,\beta_3]$, $[\beta_3,\beta_1]$, $[\beta_1,\beta_2]$ proportional den Producten:

$$(-1)^{\Sigma\mu^{(1)}\nu^{(0)}}\vartheta\{\beta_1+\beta_2+\beta_3\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_6+\beta_4\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\},$$
$$(-1)^{\Sigma\mu^{(2)}\nu^{(0)}}\vartheta\{\beta_1+\beta_2+\beta_3\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_6+\beta_4\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_5\},$$
$$(-1)^{\Sigma\mu^{(3)}\nu^{(0)}}\vartheta\{\beta_1+\beta_2+\beta_3\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_6+\beta_4\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_5\}.$$

Es können hieraus die 15 Determinanten $[\beta_i,\beta_k]$ zunächst bis auf einen allen gemeinsamen Factor bestimmt werden, und dieser ergiebt sich aus irgend einem dieser Ausdrücke, indem man zunächst mittelst der Transformation zweiter Ordnung zeigt, dass derselbe bei Verdoppelung der Thetamoduln ungeändert bleibt und dann zu unendlich grossen Werthen dieser Moduln übergeht.

Zu den Θ-Functionen zweiter Ordnung gehören auch die Ausdrücke

$$\vartheta\{\varpi\}(v_1,v_2)\,D\vartheta\{\varpi'\}(v_1,v_2)-\vartheta\{\varpi'\}(v_1,v_2)\,D\vartheta\{\varpi\}(v_1,v_2)$$

mit der Charakteristik $(\varpi+\varpi')$. Diese Functionen können daher, da sie entweder gerade oder ungerade sind, linear durch zwei Thetaproducte

dargestellt werden und durch die Constantenbestimmung auf demselben Wege wie oben ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & \vartheta\{\beta_0\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}\,\Big\{\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}(v_1, v_2)\,D\vartheta\{\beta_0\}(v_1, v_2) \\
& \qquad -\vartheta\{\beta_0\}(v_1, v_2)\,D\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}(v_1, v_2)\Big\} \\
& =(-1)^{\Sigma(\mu^{(5)}+\mu^{(6)})(\nu^{(1)}+\nu^{(5)})}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}\,D\vartheta\{\beta_4\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}(v_1,v_2)\,\vartheta\{\beta_4\}(v_1,v_2) \\
& +(-1)^{\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(6)})(\nu^{(1)}+\nu^{(4)})}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\,D\vartheta\{\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}(v_1,v_2)\,\vartheta\{\beta_5\}(v_1,v_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(19)\quad & \vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\,\Big\{\vartheta\{\beta_0\}(v_1, v_2)\,D\vartheta\{\beta_1\}(v_1, v_2) \\
& \qquad -\vartheta\{\beta_1\}(v_1, v_2)\,D\vartheta\{\beta_0\}(v_1, v_2)\Big\} \\
& =\vartheta\{\beta_0\}\,D\vartheta\{\beta_1\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}(v_1, v_2)\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}(v_1, v_2) \\
& +(-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)})}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\,D\vartheta\{\beta_4\}\,\vartheta\{\beta_2\}(v_1, v_2)\,\vartheta\{\beta_3\}(v_1, v_2).
\end{aligned}
$$

Es ist übrigens bei specieller Annahme über die Charakteristiken (β) fast ebenso bequem die besonderen Formeln direct herzuleiten, als die allgemeinen Formeln in die besonderen Fälle zu übertragen.

§ 2.

Wir machen nun über die Anordnung der (β_i) eine besondere Annahme:

$$(1)\quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)=\begin{pmatrix}1\,0 & 0\,1 & 1\,1 & 1\,0 & 0\,1 & 1\,1\\ 1\,1, & 0\,1, & 1\,0, & 1\,0, & 1\,1, & 0\,1\end{pmatrix}.$$

so dass $(\beta_0)=(0)$ wird, und bezeichnen in der Folge die Functionen $\vartheta\{\beta_i\}(v_1, v_2)$, $\vartheta\{\beta_i+\beta_k\}(v_1, v_2)$, nachdem die Elemente der Charakteristiken auf 0, 1 reducirt sind, abgekürzt mit $\vartheta_i(v_1, v_2)$, $\vartheta_{i,k}(v_1, v_2)$. Die von (0) verschiedenen geraden Charakteristiken werden dann:

$$
(2)\quad
\begin{matrix}
(1, 4), & (1, 5), & (1, 6) \\
(2, 4), & (2, 5), & (2, 6) \\
(3, 4), & (3, 5), & (3, 6)
\end{matrix}
=
\begin{matrix}
\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}.
\end{matrix}
$$

In (14) setzen wir nun für (ϖ) der Reihe nach (β_4), (β_5), (β_6), wodurch wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
& \vartheta^2\vartheta^2(v_1, v_2)=\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{1,4}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{2,4}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{3,4}\vartheta^2_{3,4}(v_1, v_2), \\
(3)\quad & \vartheta^2\vartheta^2(v_1, v_2)=\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{1,5}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{2,5}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{3,5}(v_1, v_2), \\
& \vartheta^2\vartheta^2(v_1, v_2)=\vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{1,6}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{2,6}(v_1, v_2)+\vartheta^2_{3,6}\vartheta^2_{3,6}(v_1, v_2),
\end{aligned}
$$

und aus (16) durch cyklische Vertauschung von (β_4), (β_5), (β_6):

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
0 &= \vartheta_{1,5}\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)\,\vartheta_{1,6}\vartheta_{1,6}(v_1,v_2) - \vartheta_{2,5}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)\,\vartheta_{2,6}\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)\\
&\qquad + \vartheta_{3,5}\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)\,\vartheta_{3,6}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2),\\
0 &= \vartheta_{1,6}\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)\,\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2) + \vartheta_{2,6}\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)\,\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)\\
&\qquad - \vartheta_{3,6}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)\,\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,4}(v_1,v_2),\\
0 &= \vartheta_{1,4}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)\,\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,5}(v_1,v_2) - \vartheta_{2,4}\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)\,\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)\\
&\qquad - \vartheta_{3,4}\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)\,\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,5}(v_1,v_2),
\end{aligned}
$$

wozu wir noch die Formel fügen:

$$
(5)\qquad \vartheta^2\vartheta^2_{1,4} = \vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{3,6} + \vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{3,5},
$$

die sich aus (13) ergiebt, wenn man $(\varpi) = (\beta_5)$, $(\varpi') = (\beta_1 + \beta_4)$ und $(v_1, v_2) = (0, 0)$ annimmt.

Setzt man daher:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \beta_1 &= \frac{\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \gamma_1 &= -\frac{\vartheta_{1,6}\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)},\\
\alpha_2 &= -\frac{\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \beta_2 &= \frac{\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \gamma_2 &= \frac{\vartheta_{2,6}\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)},\\
\alpha_3 &= \frac{\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \beta_3 &= -\frac{\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \gamma_3 &= \frac{\vartheta_{3,6}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)},
\end{aligned}
$$

so genügen diese Ausdrücke identisch den Relationen, welche zwischen den neun Coefficienten der Transformation zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestehen, und zwar einer solchen Transformation, deren Determinante $= +1$ ist, wie die Relation (5) zeigt, welche für $(v_1, v_2) = (0, 0)$ aus $\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$ hervorgeht. Diese Ausdrücke, welche von fünf unbestimmten Grössen abhängen, gehen, wenn man v_1, v_2 verschwinden lässt und die constanten ϑ-Werthe durch die Moduln der entsprechenden algebraischen Integrale ausdrückt, in diejenigen über, welche Hesse im 63ten Bande von Borchardt's Journal, Seite 247, für die Substitutionscoefficienten der rechtwinkligen Coordinatentransformation mitgetheilt hat.

Für die Theorie der Thetafunctionen gewährt diese Darstellung den Vortheil, dass ein grosser Theil der für diese Functionen bestehenden Relationen auf die bekannten und geläufigen Formeln der rechtwinkligen Coordinatentransformation zurückgeführt wird. So erhält man z. B. die sämmtlichen Relationen zwischen den Nullwerthen der geraden Thetafunctionen aus den 21 bekannten Formeln:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,\quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,\quad \alpha_1=\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\quad \cdots\cdots\cdots\quad \cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,\quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\quad \cdots\cdots\cdots$$

$$(7)\quad \begin{aligned} \vartheta^4 &= \vartheta^4_{1,4}+\vartheta^4_{1,5}+\vartheta^4_{1,6}=\vartheta^4_{2,4}+\vartheta^4_{2,5}+\vartheta^4_{2,6}=\vartheta^4_{3,4}+\vartheta^4_{3,5}+\vartheta^4_{3,6}\\ &=\vartheta^4_{1,4}+\vartheta^4_{2,4}+\vartheta^4_{3,4}=\vartheta^4_{1,5}+\vartheta^4_{2,5}+\vartheta^4_{3,5}=\vartheta^4_{1,6}+\vartheta^4_{2,6}+\vartheta^4_{3,6}, \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} &\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{3,4}+\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{3,5}-\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{3,6}=0, && \vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{1,6}-\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{2,6}+\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{3,6}=0,\\ &\vartheta^2_{3,4}\vartheta^2_{1,4}-\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{1,5}-\vartheta^2_{3,6}\vartheta^2_{1,6}=0, && \vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{1,4}+\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{2,4}-\vartheta^2_{3,6}\vartheta^2_{3,4}=0,\\ &\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,4}-\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{2,5}+\vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{2,6}=0, && \vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{1,5}-\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{2,5}-\vartheta^2_{3,4}\vartheta^2_{3,5}=0;\\ &\vartheta^2\vartheta^2_{1,4}=\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{3,6}+\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{2,6}, && \vartheta^2\vartheta^2_{2,4}=\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{3,6}-\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{1,6},\\ &\vartheta^2\vartheta^2_{1,5}=\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{3,4}+\vartheta^2_{3,6}\vartheta^2_{2,4}, && \vartheta^2\vartheta^2_{2,5}=\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{3,6}+\vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{3,4},\\ &\vartheta^2\vartheta^2_{1,6}=\vartheta^2_{3,4}\vartheta^2_{2,5}-\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{3,5}, && \vartheta^2\vartheta^2_{2,6}=\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{3,4}+\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{3,5}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \vartheta^2\vartheta^2_{3,4}&=\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{2,6}+\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{1,6},\\ \vartheta^2\vartheta^2_{3,5}&=\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,6}-\vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{2,4},\\ \vartheta^2\vartheta^2_{3,6}&=\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,5}+\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{2,4}. \end{aligned}$$

Für die Determinanten $[\beta_i, \beta_k]$, für die wir kürzer $[i, k]$ schreiben, ergeben sich ferner in der jetzt gebrauchten Bezeichnung die Ausdrücke:

$$(9)\quad \begin{aligned} &[2,3]=\vartheta\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}, && [5,6]=-\vartheta\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,4},\\ &[3,1]=-\vartheta\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}, && [6,4]=\vartheta\vartheta_{1,5}\vartheta_{2,5}\vartheta_{3,5},\\ &[1,2]=-\vartheta\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}, && [4,5)=-\vartheta\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,6},\\ &[1,4]=\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}, && [2,4]=\vartheta_{3,4}\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6},\\ &[1,5]=-\vartheta_{2,5}\vartheta_{3,5}\vartheta_{1,6}\vartheta_{1,4}, && [2,5]=\vartheta_{3,5}\vartheta_{1,5}\vartheta_{2,6}\vartheta_{2,4},\\ &[1,6]=-\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,6}\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,5}, && [2,6]=-\vartheta_{3,6}\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,5}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [3,4]&=-\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6},\\ [3,5]&=-\vartheta_{1,5}\vartheta_{2,5}\vartheta_{3,6}\vartheta_{3,4},\\ [3,6]&=-\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,5}. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Formel (18) giebt nun, wenn wir zur Abkürzung

$$(10)\qquad D\vartheta\{\beta_i\}=\omega_i$$

setzen:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\alpha_1 &= \alpha_3\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 - \alpha_2\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 = \beta_1\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6 - \gamma_1\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\beta_1 &= \beta_3\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 - \beta_2\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 = \gamma_1\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4 - \alpha_1\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\gamma_1 &= \gamma_3\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 - \gamma_2\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 = \alpha_1\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5 - \beta_1\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4,\\
\hline
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\alpha_2 &= \alpha_1\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 - \alpha_3\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 = \beta_2\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6 - \gamma_2\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\beta_2 &= \beta_1\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 - \beta_3\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 = \gamma_2\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4 - \alpha_2\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\gamma_2 &= \gamma_1\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3 - \gamma_3\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 = \alpha_2\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5 - \beta_2\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4,\\
\hline
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\alpha_3 &= \alpha_2\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 - \alpha_1\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 = \beta_3\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6 - \gamma_3\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\beta_3 &= \beta_2\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 - \beta_1\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 = \gamma_3\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4 - \alpha_3\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6,\\
\vartheta\vartheta(v_1,v_2)\,D\gamma_3 &= \gamma_2\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1 - \gamma_1\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2 = \alpha_3\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5 - \beta_3\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4.
\end{aligned}
$$

Setzen wir also:

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha_2 D\alpha_3 + \beta_2 D\beta_3 + \gamma_2 D\gamma_3 = -\alpha_3 D\alpha_2 - \beta_3 D\beta_2 - \gamma_3 D\gamma_2,\\
q &= \alpha_3 D\alpha_1 + \beta_3 D\beta_1 + \gamma_3 D\gamma_1 = -\alpha_1 D\alpha_3 - \beta_1 D\beta_3 - \gamma_1 D\gamma_3,\\
r &= \alpha_1 D\alpha_2 + \beta_1 D\beta_2 + \gamma_1 D\gamma_2 = -\alpha_2 D\alpha_1 - \beta_2 D\beta_1 - \gamma_2 D\gamma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p' &= \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = \gamma_1 D\beta_1 + \gamma_2 D\beta_2 + \gamma_3 D\beta_3,\\
q' &= \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = \alpha_1 D\gamma_1 + \alpha_2 D\gamma_2 + \alpha_3 D\gamma_3,\\
r' &= \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = \beta_1 D\alpha_1 + \beta_2 D\alpha_2 + \beta_3 D\alpha_3,
\end{aligned}
$$

so folgt aus vorstehenden Formeln:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
p &= \frac{\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & q &= \frac{\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & r &= \frac{\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)},\\
p' &= \frac{\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & q' &= \frac{\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & r' &= \frac{\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir in der Formel (12), § 1. für (ϖ) setzen $(\beta_1+\beta_4)$, $(\beta_2+\beta_4)$, $(\beta_3+\beta_4)$, so erhält man Formeln, welche, durch α_1, α_2, α_3, p, q, r ausgedrückt, so lauten:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= \frac{\vartheta_{1,4}^4}{\vartheta^4} + \frac{\vartheta_{3,4}^2\,\vartheta_{1,4}^2}{\vartheta^2\,\omega_2^2}\,q^2 + \frac{\vartheta_{1,4}^2\,\vartheta_{2,4}^2}{\vartheta^2\,\omega_3^2}\,r^2,\\
\alpha_2^2 &= \frac{\vartheta_{2,4}^4}{\vartheta^4} - \frac{\vartheta_{1,4}^4\,\vartheta_{2,4}^4}{\vartheta^2\,\omega_3^2}\,r^2 + \frac{\vartheta_{2,4}^2\,\vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2\,\omega_1^2}\,p^2,\\
\alpha_3^2 &= \frac{\vartheta_{3,4}^4}{\vartheta^4} - \frac{\vartheta_{2,4}^2\,\vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2\,\omega_1^2}\,p^2 - \frac{\vartheta_{3,4}^2\,\vartheta_{1,4}^2}{\vartheta^2\,\omega_2^2}\,q^2,
\end{aligned}
$$

und in ähnlicher Weise aus (15) § 1.:

$$
(14)\quad \frac{\vartheta_{1,5}\,\vartheta_{1,6}}{\vartheta_{1,4}\,\omega_1}\,\alpha_1 p + \frac{\vartheta_{2,5}\,\vartheta_{2,6}}{\vartheta_{2,4}\,\omega_2}\,\alpha_2 q - \frac{\vartheta_{3,5}\,\vartheta_{3,6}}{\vartheta_{3,4}\,\omega_3}\,\alpha_3 r = 0.
$$

Schliesslich ergiebt sich, wenn man die Differentiale Dv_1, Dv_2,

mithin auch ω_i als constant betrachtet, durch Differentiation der Gleichungen (12), nach (19) § 1.:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
Dp &= -\frac{\vartheta\,\vartheta_{1,4}}{\vartheta_{2,4}\,\vartheta_{3,4}}\,\frac{\omega_4\,\omega_1}{\omega_2\,\omega_3}\,qr - \frac{\vartheta^2\,\omega_1^2}{\vartheta_{2,4}^2\,\vartheta_{3,4}^2}\,\alpha_2\,\alpha_3,\\
Dq &= \frac{\vartheta\,\vartheta_{2,4}}{\vartheta_{3,4}\,\vartheta_{1,4}}\,\frac{\omega_4\,\omega_2}{\omega_3\,\omega_1}\,rp + \frac{\vartheta^2\,\omega_2^2}{\vartheta_{3,4}^2\,\vartheta_{1,4}^2}\,\alpha_3\,\alpha_1,\\
Dr &= -\frac{\vartheta\,\vartheta_{3,4}}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta_{2,4}}\,\frac{\omega_4\,\omega_3}{\omega_1\,\omega_2}\,pq - \frac{\vartheta^2\,\omega_3^2}{\vartheta_{1,4}^2\,\vartheta_{2,4}^2}\,\alpha_1\,\alpha_2.
\end{aligned}
$$

§ 3.

Die Ausdrücke (6) des vorigen Paragraphen setzen wir nun in die Transformationsformeln:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\
\eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_2 z,\\
\zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,
\end{aligned}
$$

und beziehen die Coordinaten ξ, η, ζ auf ein festes, x, y, z auf ein veränderliches Coordinatensystem. Das letztere wird sich in bestimmter Weise gegen das erstere bewegen, wenn α, β, γ, v_1, v_2 Functionen der Zeit sind. Verstehen wir unter D die Differentiation nach der Zeit, so sind die Grössen p, q, r die Componenten der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit, genommen nach den Axen x, y, z; p', q', r' die Componenten derselben Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen ξ, η, ζ. Sind, wie wir jetzt annehmen wollen, v_1, v_2 lineare Functionen der Zeit:

$$
v_1 = v_1' t + v_1^0, \qquad v_2 = v_2' t + v_2^0,
$$

worin v_1', v_2', v_1^0, v_2^0 Constanten sind, so bleiben auch die Gleichungen (15) § 2. für die Differentiation nach der Zeit bestehen.

Es soll nun gezeigt werden, dass eine Bewegung eines Axensystems, wie die hier betrachtete, in gewissen Fällen der Bewegung eines festen Körpers in einer unendlich ausgedehnten incompressiblen Flüssigkeit, ohne den Einfluss beschleunigender Kräfte, wirklich eintritt.

Wir nehmen das Coordinatensystem x, y, z in fester Verbindung mit dem bewegten Körper an, und bezeichnen mit u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des Anfangspunktes dieses Systems nach den Richtungen der Axen x, y, z. Die lebendige Kraft T des ganzen bewegten Systemes ist dann eine homogene Function zweiten Grades der sechs Grössen p, q, r, u, v, w und die Differentialgleichungen des Problems lauten in der Form, welche Kirchhoff für dieselben im 71. Bande von Borchardt's Journal, Seite 237, angegeben hat:

$$(2)\qquad \begin{aligned} D\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},\\ D\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},\\ D\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u},\end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} D\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},\\ D\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},\\ D\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}.\end{aligned}$$

Dazu kommen die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D\alpha_1 &= q\alpha_3 - r\alpha_2, & D\beta_1 &= q\beta_3 - r\beta_2, & D\gamma_1 &= q\gamma_3 - r\gamma_2,\\ D\alpha_2 &= r\alpha_1 - p\alpha_3, & D\beta_2 &= r\beta_1 - p\beta_3, & D\gamma_2 &= r\gamma_1 - p\gamma_3,\\ D\alpha_3 &= p\alpha_2 - q\alpha_1, & D\beta_3 &= p\beta_2 - q\beta_1, & D\gamma_3 &= p\gamma_2 - q\gamma_1,\end{aligned}$$

und die Definitionsgleichungen von u, v, w:

$$(5)\qquad \begin{aligned} D\alpha &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,\\ D\beta &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w,\\ D\gamma &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w.\end{aligned}$$

Von diesem System von Differentialgleichungen hat Kirchhoff (a. a. O.) ganz allgemein die folgenden 7 Integralgleichungen aufgestellt:

$$(6)\qquad 2T = h,$$

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k,\\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k',\\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k'',\end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l + \beta k'' - \gamma k',\\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l' + \gamma k - \alpha k'',\\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l'' + \alpha k' - \beta k,\end{aligned}$$

worin h, k, k', k'', l, l', l'' willkürliche Constanten sind. Unbeschadet der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass k', k'' verschwinden, wodurch nur über die Lage der ξ-Axe verfügt wird, ferner dass l', l''

verschwinden, wodurch die Lage des Anfangspunkts des Systems ξ, η, ζ in der η-, ζ-Ebene bestimmt wird.

Es soll nun die Voraussetzung gemacht werden, dass der Körper hinsichtlich seiner Gestalt und Massenvertheilung drei zu einander rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, etwa wie ein dreiaxiges Ellipsoid, und dass das Axensystem x, y, z nach Richtung und Lage mit dem Hauptaxensystem des Körpers zusammenfalle. In dem Ausdruck für die lebendige Kraft bleiben dann nur die Quadrate der Grössen p, q, r, u, v, w:

$$(9) \qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2,$$

worin A, B, C, A_1, B_1, C_1 wesentlich positive Constanten sind, die von der Gestalt der Oberfläche und von der Massenvertheilung im Körper abhängig sind. Für $B = C$, $B_1 = C_1$ erhält man den von Thomson und Tait und Kirchhoff behandelten Fall eines Rotationskörpers, für $A_1 = B_1 = C_1$ den Fall der Rotation eines Körpers im leeren Raum. (Durch den Einfluss der Flüssigkeit werden in diesem Fall nur die Werthe der Constanten geändert.)

Wir legen nun die oben erwähnte specielle Constantenbestimmung zu Grunde, und fügen noch die beschränkende Annahme hinzu, *dass auch die Constante l verschwinde*, was z. B. dann der Fall ist, wenn der Anfangszustand in einer blossen Translationsgeschwindigkeit ohne Rotation besteht. Die Gleichungen (7) ergeben dann:

$$(10) \qquad A_1u = k\alpha_1, \quad B_1v = k\alpha_2, \quad C_1w = k\alpha_3,$$

und das System (2) wird mit dem ersten System (4) identisch. Die Constante k ist willkürlich und wird aus den Anfangsgeschwindigkeiten bestimmt wie folgt:

$$(11) \qquad k = \sqrt{A_1^2u_0^2 + B_1^2v_0^2 + C_1^2w_0^2}.$$

Man kann den Coordinatenaxen eine solche Richtung geben, dass k positiv wird.

Die Gleichungen (8) liefern unter den gegenwärtigen Annahmen:

$$(12) \qquad A\alpha_1p + B\alpha_2q + C\alpha_3r = 0,$$

$$(13) \qquad \begin{aligned} A\beta_1p + B\beta_2q + C\beta_3r &= k\gamma, \\ A\gamma_1p + B\gamma_2q + C\gamma_3r &= -k\beta, \end{aligned}$$

und das System der Differentialgleichungen (3) erhält die Form:

$$(14) \qquad \begin{aligned} ADp &= (C-B)\,qr + \frac{k^2(C_1-B_1)}{C_1B_1}\,\alpha_2\alpha_3, \\ BDq &= (A-C)\,rp + \frac{k^2(A_1-C_1)}{A_1C_1}\,\alpha_3\alpha_1, \\ CDr &= (B-A)\,pq + \frac{k^2(B_1-A_1)}{B_1A_1}\,\alpha_1\alpha_2. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies System mit den Gleichungen (15) § 2., so erkennt man, dass die dort aufgestellten Ausdrücke den hier gestellten Bedingungen genügen, wenn man die Relationen befriedigen kann:

$$(15)\quad \begin{aligned} \frac{C-B}{A} &= -\frac{\omega_1\omega_4}{\omega_2\omega_3}\frac{\vartheta\,\vartheta_{1,4}}{\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,4}}, & \frac{k^2(C_1-B_1)}{AB_1C_1} &= -\omega_1{}^2\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{3,4}},\\ \frac{A-C}{B} &= \frac{\omega_2\omega_4}{\omega_3\omega_1}\frac{\vartheta\,\vartheta_{2,4}}{\vartheta_{3,4}\vartheta_{1,4}}, & \frac{k^2(A_1-C_1)}{BC_1A_1} &= \omega_2{}^2\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2_{3,4}\vartheta^2_{1,4}},\\ \frac{B-A}{C} &= -\frac{\omega_3\omega_4}{\omega_1\omega_2}\frac{\vartheta\,\vartheta_{3,4}}{\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,4}}, & \frac{k^2(B_1-C_1)}{CA_1B_1} &= -\omega_3{}^2\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,4}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen führen zunächst zu einer Bedingung zwischen den Constanten A, B, C, A_1, B_1, C_1:

$$(16)\quad C-B:A-C:B-A = A_1(C_1-B_1):B_1(A_1-C_1):C_1(B_1-A_1),$$

welche identisch ist mit der folgenden:

$$(17)\quad AA_1(C_1-B_1)+BB_1(A_1-C_1)+CC_1(B_1-A_1)=0.$$

Dies ist dieselbe Relation, auf welche Clebsch in der in der Einleitung erwähnten Arbeit geführt wurde, und von der dort der besondere Fall

$$(18)\quad A=B=C$$

hervorgehoben ist, der auch in unseren Formeln als besonderer Fall enthalten ist.

Vergleicht man die Integralgleichung (12) mit der Relation (14) § 2., so erhält man, wenn ω eine noch unbestimmte Constante bedeutet:

$$(19)\quad \begin{aligned} A\,\omega_1\vartheta_{1,4} &= \omega\,\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6},\\ B\,\omega_2\vartheta_{2,4} &= \omega\,\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6},\\ C\,\omega_3\vartheta_{3,4} &= -\,\omega\,\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}, \end{aligned}$$

nun sind aber die drei Grössen ω_1, ω_2, ω_3 nicht von einander unabhängig, sondern sie genügen vermöge ihrer Bedeutung (10) § 2. und mit Rücksicht auf (9) § 2. der Bedingung

$$\omega_1\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}-\omega_2\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}-\omega_3\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}=0,$$

woraus man nach (19) erhält:

$$(20)\quad \frac{\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{1,6}}{A}-\frac{\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{2,6}}{B}+\frac{\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{3,6}}{C}=0,$$

was für den Fall $A=B=C$ in die aus (8) § 2. entnommene Relation

$$\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{1,6}-\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{2,6}+\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{3,6}=0$$

übergeht, andernfalls aber mit Hülfe der letzteren Relation zu den Gleichungen führt:

$$(21)\qquad \frac{\vartheta_{2,5}^2\vartheta_{2,6}^2}{\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2} = \frac{B(A-C)}{A(B-C)}; \qquad \frac{\vartheta_{3,5}^2\vartheta_{3,6}^2}{\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2} = \frac{C(A-B)}{A(B-C)},$$

von denen die eine aus der andern folgt. Diese Ausdrücke zeigen, dass, wenn die Thetamoduln reell ausfallen sollen,

$$A > B > C \text{ oder } A < B < C$$

sein muss.

Aus den Gleichungen

$$\omega_1 [2, 3] + \omega_2 [3, 4] + \omega_3 [4, 2] = 0 \text{ etc.}$$

erhält man noch mittelst (19) und (9) § 2.:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \omega_4 &= \omega \frac{\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}}{\vartheta\,\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}} \frac{C-B}{BC} \\ &= \omega \frac{\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}}{\vartheta\,\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}} \frac{C-A}{AC} \\ &= \omega \frac{\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}}{\vartheta\,\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}} \frac{B-A}{AB}, \end{aligned}$$

Ausdrücke, die in Folge von (21) mit einander übereinstimmen und in dem Falle $A = B = C$ für ω_4 den Werth 0 liefern. Letzterer folgt auch aus der Integralgleichung (12), welche in diesem Falle besagt, dass die momentane Drehungsaxe immer auf der ξ-Axe senkrecht bleibt.

Um nun zu zeigen, wie die Relationen (15) befriedigt werden können, setzen wir die Werthe von (19) in (15) ein und schreiben zur Abkürzung:

$$(23)\qquad \varrho = \frac{\omega_4\omega^2\vartheta}{\omega_1\omega_2\omega_3\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,4}}, \qquad \varrho_1 = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\vartheta^2}{\vartheta_{1,4}^2\vartheta_{2,4}^2\vartheta_{3,4}^2},$$

wodurch sich ergiebt:

$$(24)\qquad \begin{aligned} A(C-B) &= -\varrho\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2, & \frac{A(C_1-B_1)}{B_1C_1} &= -\varrho_1\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2, \\ B(A-C) &= \varrho\vartheta_{2,5}^2\vartheta_{2,6}^2, & \frac{B(A_1-C_1)}{C_1A_1} &= \varrho_1\vartheta_{2,5}^2\vartheta_{2,6}^2, \\ C(B-A) &= -\varrho\vartheta_{3,5}^2\vartheta_{3,6}^2, & \frac{C(B_1-A_1)}{A_1B_1} &= -\varrho_1\vartheta_{3,5}^2\vartheta_{3,6}^2, \end{aligned}$$

und daraus folgt zunächst:

$$(25)\qquad \frac{\vartheta_{2,5}^2\vartheta_{2,6}^2}{\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2} = \frac{BB_1(A_1-C_1)}{AA_1(B_1-C_1)}, \qquad \frac{\vartheta_{3,5}^2\vartheta_{3,6}^2}{\vartheta_{1,5}^2\vartheta_{1,6}^2} = \frac{CC_1(A_1-B_1)}{AA_1(B_1-C_1)}.$$

Diese Formeln geben die Werthe der beiden Thetaquotienten auch in dem Falle $A = B = C$, während sie im allgemeinen Falle wegen (16) mit (21) übereinstimmen, und aus den drei ersten Gleichungen (24)

folgen dann dieselben Relationen. ω wird durch jeden der drei folgenden mit einander identischen Ausdrücke bestimmt:

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad \omega^2 &= k^2 \frac{A(B_1 - C_1)}{B_1 C_1} \frac{\vartheta_{1,4}^2 \vartheta_{2,4}^2 \vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2 \vartheta_{1,5}^2 \vartheta_{1,6}^2} \\
&= k^2 \frac{B(A_1 - C_1)}{C_1 A_1} \frac{\vartheta_{1,4}^2 \vartheta_{2,4}^2 \vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2 \vartheta_{2,5}^2 \vartheta_{2,6}^2} \\
&= k^2 \frac{C(A_1 - B_1)}{A_1 B_1} \frac{\vartheta_{1,4}^2 \vartheta_{2,4}^2 \vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2 \vartheta_{3,5}^2 \vartheta_{3,6}^2}.
\end{aligned}
$$

Hierdurch sind die Relationen (24) und mithin (15) identisch befriedigt. Ist $A_1 > B_1 > C_1$, so wird ω reell, während für $A_1 < B_1 < C_1$ ω rein imaginär wird. Im ersten Fall werden die Argumente der ϑ-Functionen rein imaginär, im zweiten reell.

Wir haben bisher nur Eine Relation für die drei ϑ-Moduln gefunden, (21) oder (25), und doch die Differentialgleichungen sämmtlich befriedigt. Zwei von den ϑ-Moduln, sowie die Constanten $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ bleiben also noch zur Berücksichtigung des Anfangszustandes verfügbar. Zur Bestimmung dieser Constanten haben wir die drei Gleichungen (13) § 2., von denen eine aus den beiden andern folgt, und die drei ersten Gleichungen (12) § 2., von denen ebenfalls Eine Folge der beiden andern ist, beide Systeme auf den Anfangszustand angewandt. Es ist dann der Anfangszustand durch die 6 Constanten p_0, q_0, r_0, $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_2^{(0)}$, $\alpha_3^{(0)}$ bestimmt, zwischen welchen die beiden Relationen bestehen:

$$\alpha_1^{(0)2} + \alpha_2^{(0)2} + \alpha_3^{(0)2} = 1,$$

$$A\alpha_1^{(0)} p_0 + B\alpha_2^{(0)} q_0 + C\alpha_3^{(0)} r_0 = 0.$$

In dem Falle, wo die anfänglichen Rotationen p_0, q_0, r_0 verschwinden, wird $(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}) = (0, 0)$ und die Gleichungen (13) § 2. liefern:

$$\frac{\vartheta_{1,4}^2}{\vartheta^2} = \alpha_1^{(0)}, \quad \frac{\vartheta_{2,4}^2}{\vartheta^2} = -\alpha_2^{(0)}, \quad \frac{\vartheta_{3,4}^2}{\vartheta^2} = \alpha_3^{(0)}.$$

Wir werden weiterhin zeigen, wie die Constanten alle explicite durch den Anfangszustand dargestellt werden können.

Es bleibt noch übrig, die Bewegung des Anfangspunkts des Coordinatensystems x, y, z zu bestimmen, d. h. die Coordinaten α, β, γ als Functionen der Zeit darzustellen. Von diesen ergeben sich β, γ direct aus den Gleichungen (13), während α aus der ersten Gleichung (5) oder aus

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\left(\frac{\alpha_1^2}{A_1} + \frac{\alpha_2^2}{B_1} + \frac{\alpha_3^2}{C_1}\right)$$

mittelst einer Quadratur gefunden wird. Es wird sich weiter unten ergeben, dass nicht nur die Ausdrücke für β, γ sich sehr vereinfachen, sondern auch die Quadratur für α durch ϑ-Functionen ausgeführt werden kann.

§ 4.

Wir werden nun den entgegengesetzten Weg zur Lösung des Problems einschlagen, indem wir die Integration der Differentialgleichungen direct durch hyperelliptische Integrale bewerkstelligen.

Wir betrachten als die zunächst zu bestimmenden Functionen p, q, r, α_1, α_2, α_3, für welche wir die Differentialgleichungen (14) und das erste System (4) haben. Für dieses System ergeben sich, wie sich durch Differentiation ohne Weiteres bestätigen lässt, die drei Integrale:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha_1^2 &= l + \frac{A_1C_1B}{k^2(A_1-C_1)}q^2 - \frac{B_1A_1C}{k^2(B_1-A_1)}r^2, \\ \alpha_2^2 &= m + \frac{B_1A_1C}{k^2(B_1-A_1)}r^2 - \frac{C_1B_1A}{k^2(C_1-B_1)}p^2, \\ \alpha_3^2 &= n + \frac{C_1B_1A}{k^2(C_1-B_1)}p^2 - \frac{A_1C_1B}{k^2(A_1-C_1)}q^2, \end{aligned}$$

worin l, m, n willkürliche Constanten sind, welche der Bedingung genügen:

$$(2)\qquad l + m + n = 1.$$

Es ist dann

$$2T = k^2\left(\frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1}\right) = h$$

die Gleichung der lebendigen Kraft, $\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C}$, oder im Falle $A = B = C$, $A_1 l + B_1 m + C_1 n$ ist die Constante in dem von Clebsch aufgestellten Integral. Ausserdem haben wir noch das Integral:

$$(3)\qquad A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r = 0.$$

Wir führen nun an Stelle von α_1, α_2, α_3 zwei Variable x_1, x_2 ein, welche die Bedingung $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ identisch befriedigen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{(\delta_1-x_1)(\delta_1-x_2)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)}, \\ \alpha_2^2 &= \frac{(\delta_2-x_1)(\delta_2-x_2)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)}, \\ \alpha_3^2 &= \frac{(\delta_3-x_1)(\delta_3-x_2)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)}, \end{aligned}$$

worin δ_1, δ_2, δ_3 vorläufig beliebige constante Grössen sind. Die Variablen x_1, x_2 werden, wenn δ_1, δ_2, δ_3 reell angenommen sind, für jedes reelle Werthsystem α_1, α_2, α_3 *eindeutig und reell* bestimmt als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(5) $$\frac{\alpha_1^2}{x-\delta_1}+\frac{\alpha_2^2}{x-\delta_2}+\frac{\alpha_3^2}{x-\delta_3}=0,$$

und zwar ist, wenn $\delta_1<\delta_2<\delta_3$ angenommen wird,

(6) $$\delta_1<x_1<\delta_2<x_2<\delta_3.$$

Die Gleichungen (1), (3) können nun auf folgende Art befriedigt werden. Wir führen zwei neue Constanten δ_4, δ_5 ein und schreiben zur Abkürzung:

$$\sqrt{(\delta_1-x)(\delta_2-x)(\delta_3-x)}=\sqrt{1,2,3,x},\quad \sqrt{(\delta_4-x)(\delta_5-x)}=\sqrt{4,5,x},$$

und bezeichnen entsprechend die analogen Ausdrücke. Wenn wir dann setzen:

(7) $$\begin{aligned}
p\sqrt{\frac{AB_1C_1}{k^2(C_1-B_1)}}&=\frac{\sqrt{1,4,5,x_1}\sqrt{2,3,x_2}-\sqrt{1,4,5,x_2}\sqrt{2,3,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}},\\
q\sqrt{\frac{BC_1A_1}{k^2(A_1-C_1)}}&=\frac{\sqrt{2,4,5,x_1}\sqrt{3,1,x_2}-\sqrt{2,4,5,x_2}\sqrt{3,1,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}},\\
r\sqrt{\frac{CA_1B_1}{k^2(B_1-A_1)}}&=\frac{\sqrt{3,4,5,x_1}\sqrt{1,2,x_2}-\sqrt{3,4,5,x_2}\sqrt{1,2,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}},
\end{aligned}$$

so werden hierdurch die Gleichungen (1) identisch befriedigt, wenn

(8) $$\Delta=(\delta_2-\delta_3)(\delta_3-\delta_1)(\delta_1-\delta_2)$$

und

(9) $$\begin{aligned}
l&=\frac{(\delta_1-\delta_4)(\delta_1-\delta_5)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)},\\
m&=\frac{(\delta_2-\delta_4)(\delta_2-\delta_5)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)},\\
n&=\frac{(\delta_3-\delta_4)(\delta_3-\delta_5)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)}
\end{aligned}$$

gesetzt wird. Damit auch (3) befriedigt werde, muss noch

(10) $$\frac{A(C_1-B_1)}{B_1C_1}:\frac{B(A_1-C_1)}{A_1C_1}:\frac{C(B_1-A_1)}{B_1A_1}=(\delta_3-\delta_2):(\delta_1-\delta_3):(\delta_2-\delta_1)$$

angenommen werden, wodurch *eine* Relation zwischen den Grössen δ_1, δ_2, δ_3 gesetzt ist, welche mit der Bedingung $\delta_1<\delta_2<\delta_3$ verträglich ist, falls $A_1<B_1<C_1$ oder $A_1>B_1>C_1$ vorausgesetzt wird. Was die Vorzeichen der in (7) vorkommenden Wurzelgrössen betrifft, so sind, falls die Vorzeichen von α_1, α_2, α_3 beliebig angenommen sind, je zwei entsprechende derselben aus dem dritten durch die zu erfüllenden Gleichungen bestimmt. Es sind also in (7) vier Werthsysteme enthalten, und diese Gleichungen geben sonach die vollständige Auflösung des Systems (1), (3), welches auf eine Gleichung vierten Grades führt. Durch die Differentialgleichungen (4) § 3. werden dann die Functionen p, q, r eindeutig bestimmt.

Die Proportion (10) lässt sich auch ersetzen durch die Gleichungen:

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\frac{A\cdot(C_1-B_1)}{C_1B_1} &= \lambda(\delta_3-\delta_2),\\
\frac{B\cdot(A_1-C_1)}{A_1C_1} &= \lambda(\delta_1-\delta_3),\\
\frac{C\cdot(B_1-A_1)}{B_1A_1} &= \lambda(\delta_2-\delta_1),
\end{aligned}
$$

und wenn, wie wir in der Folge annehmen wollen, $A_1 < B_1 < C_1$ ist, so wird λ positiv. Sind A, B, C nicht einander gleich, so können wir dafür auch schreiben:

$$\delta_2-\delta_3=\mu\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right),\quad \delta_3-\delta_1=\mu\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right),\quad \delta_1-\delta_2=\mu\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right),$$

oder

$$(12)\qquad \delta_1=\frac{\mu}{A}+\nu,\quad \delta_2=\frac{\mu}{B}+\nu,\quad \delta_3=\frac{\mu}{C}+\nu,$$

worin μ, ν beliebige Constanten sind, die immer so gewählt werden können, dass $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$ wird. (Der Fall $A = B = C$ lässt sich, wie sich zeigen wird, als Grenzfall betrachten.) Ist hiernach über δ_1, δ_2, δ_3 verfügt, so erhält man nach (9) δ_4, δ_5 als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(13)\qquad \frac{l}{\delta-\delta_1}+\frac{m}{\delta-\delta_2}+\frac{n}{\delta-\delta_3}=0.$$

Es ist jetzt zu untersuchen, was über die Lage der Wurzeln dieser Gleichung, also in letzter Instanz über die Constanten l, m, n durch die Bedingung der Realität von p, q, r gefordert ist.

Behalten wir die Annahme $A_1 < B_1 < C_1$ bei, so ergiebt sich aus (7), dass

$$(\delta_4-x_1)(\delta_5-x_1)>0;\qquad (\delta_4-x_2)(\delta_5-x_2)<0$$

sein muss, woraus zunächst hervorgeht, dass die Gleichung (13) reelle Wurzeln haben muss, ferner

$$x_1<\delta_4<x_2<\delta_5,$$

wonach man die folgenden vier Fälle erhält:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{I.} & \delta_1<x_1<\delta_4<\delta_2<x_2<\delta_5<\delta_3; & l>0, & m>0, & n>0,\\
\text{II.} & \delta_1<x_1<\delta_4<\delta_2<x_2<\delta_3<\delta_5; & l>0, & m>0, & n<0,\\
\text{III.} & \delta_1<x_1<\delta_2<\delta_4<x_2<\delta_5<\delta_3; & l>0, & m<0, & n>0,\\
\text{IV.} & \delta_1<x_1<\delta_2<\delta_4<x_2<\delta_3<\delta_5; & l>0, & m<0, & n<0,
\end{array}
$$

nur im Falle III. müssen die Grössen l, m, n noch einer Ungleichheitsbedingung wegen der Realität von δ_4, δ_5 genügen.

Um nun x_1, x_2 als Functionen der Zeit darzustellen, bedienen wir uns der Differentialgleichungen

$$D\alpha_1=\alpha_3q-\alpha_2r,\qquad D\alpha_2=\alpha_1r-\alpha_3p,\qquad D\alpha_3=\alpha_2p-\alpha_1q.$$

Diese ergeben, wenn wir für α_1, α_2, α_3, p, q, r die gefundenen Ausdrücke substituiren und zur Abkürzung

$$R(x) = \sqrt{-(\delta_1 - x)(\delta_2 - x)(\delta_3 - x)(\delta_4 - x)(\delta_5 - x)}$$

setzen:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\delta_1 - x_2}{\delta_1 - x_1}}\frac{dx_1}{dt} + \sqrt{\frac{\delta_1 - x_1}{\delta_1 - x_2}}\frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)}\left\{R(x_1)\sqrt{\frac{\delta_1 - x_2}{\delta_1 - x_1}}(\nu - x_2) - R(x_2)\sqrt{\frac{\delta_1 - x_1}{\delta_1 - x_2}}(\nu - x_1)\right\}, \\
&\sqrt{\frac{\delta_2 - x_2}{\delta_2 - x_1}}\frac{dx_1}{dt} + \sqrt{\frac{\delta_2 - x_1}{\delta_2 - x_2}}\frac{dx_2}{dt} \\
(14)\quad &= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)}\left\{R(x_1)\sqrt{\frac{\delta_2 - x_2}{\delta_2 - x_1}}(\nu - x_2) - R(x_2)\sqrt{\frac{\delta_2 - x_1}{\delta_2 - x_2}}(\nu - x_1)\right\}, \\
&\sqrt{\frac{\delta_3 - x_2}{\delta_3 - x_1}}\frac{dx_1}{dt} + \sqrt{\frac{\delta_3 - x_1}{\delta_3 - x_2}}\frac{dx_3}{dt} \\
&= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)}\left\{R(x_1)\sqrt{\frac{\delta_3 - x_2}{\delta_3 - x_1}}(\nu - x_2) - R(x_2)\sqrt{\frac{\delta_3 - x_1}{\delta_3 - x_2}}(\nu - x_1)\right\}.
\end{aligned}$$

Die für $A = B = C$ gültigen Formeln ergeben sich hieraus, wie überhaupt in der Folge durch die Annahme $\frac{1}{\mu} = 0$, $\frac{\nu}{\mu} = \frac{-1}{A}$.

Von diesen drei Gleichungen ist Eine Folge der beiden anderen, und aus zweien derselben erhält man:

$$(15)\quad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)} R(x_1)(\nu - x_2), \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_2 - x_1)} R(x_2)(\nu - x_1),
\end{aligned}$$

also:

$$(16)\quad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{R(x_1)} + \frac{dx_2}{R(x_2)} &= \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\, dt, \\
\frac{x_1 dx_1}{R(x_1)} + \frac{x_2 dx_2}{R(x_2)} &= \frac{2k\sqrt{\lambda}\,\nu}{\mu}\, dt,
\end{aligned}$$

wodurch die Bestimmung von x_1, x_2, R_1, R_2 als Functionen von t auf die Umkehrung hyperelliptischer Integrale erster Gattung zurückgeführt ist. Die beiden Constanten, die durch diese Integration eingeführt werden, ergeben sich, durch hyperelliptische Integrale ausgedrückt, aus den Anfangswerthen von x_1, x_2, also auch aus den Anfangswerthen von α_1, α_2, α_3.

Nachdem so α_1, α_2, α_3, p, q, r als Functionen der Zeit bestimmt sind, erhält man die übrigen Unbekannten durch zwei Quadraturen, wie schon Kirchhoff gezeigt hat. Es lässt sich das Resultat auch ohne Einführung der Euler'schen Winkel auf verschiedene Arten gewinnen, für unsere Aufgabe am zweckmässigsten wohl auf folgende Weise:

Wir bestimmen zunächst die drei Componenten der Rotation nach den festen Axen ξ, η, ζ:

$$p' = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r,$$
$$q' = \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r,$$
$$r' = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r,$$

von denen p' unmittelbar bekannt ist. Es ist ferner bekannt:

(17) $$p'^2 + q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

und durch Differentiation ergiebt sich durch Benutzung der Gleichungen (4) § 3.:

(18) $$r' Dq' - q' Dr' = D\alpha_1 Dp + D\alpha_2 Dq + D\alpha_3 Dr,$$

also:

$$D \operatorname{arctg} \frac{q'}{r'} = \frac{D\alpha_1 Dp + D\alpha_2 Dq + D\alpha_3 Dr}{p^2 + q^2 + r^2 - p'^2}.$$

Es wird also $\operatorname{arctg} \frac{q'}{r'}$ durch eine Quadratur gefunden, wodurch auch q', r' bestimmt sind. Aus einer speciellen Bestimmung dieser Grössen erhält man die allgemeine mittelst eines willkürlichen constanten Winkels Φ, über welchen durch die Wahl der Axen η, ζ verfügt werden kann:

$$q' \cos \Phi + r' \sin \Phi, \qquad -q' \sin \Phi + r' \cos \Phi.$$

Sind q', r' bekannt, so erhält man $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch Auflösung der linearen Gleichungen:

(19) $$\begin{array}{ll} \beta_1 D\alpha_1 + \beta_2 D\alpha_2 + \beta_3 D\alpha_3 = r', & \gamma_1 D\alpha_1 + \gamma_2 D\alpha_2 + \gamma_3 D\alpha_3 = -q', \\ \beta_1 p \quad + \beta_2 q \quad + \beta_3 r \quad = q', & \gamma_1 p \quad + \gamma_2 q \quad + \gamma_3 r \quad = r', \\ \beta_1 \alpha_1 \quad + \beta_2 \alpha_2 \quad + \beta_3 \alpha_3 \quad = 0, & \gamma_1 \alpha_1 \quad + \gamma_2 \alpha_2 \quad + \gamma_3 \alpha_3 \quad = 0, \end{array}$$

deren Determinante $D\alpha_1^2 + D\alpha_2^2 + D\alpha_3^2 = q'^2 + r'^2$, also von Null verschieden ist. An Stelle dieser Gleichungen können auch die folgenden 8 treten, die von einander abhängig sind:

(20) $$\begin{array}{ll} \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = q', & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = r', \\ \beta_1 = \alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3, & \gamma_1 = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \\ \beta_2 = \alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1, & \gamma_2 = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \\ \beta_3 = \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2, & \gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1. \end{array}$$

In unserem Falle ergiebt sich nun:

(21) $$p' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)} \left(\sqrt{4,5,x_1}\sqrt{1,2,3,x_2} - \sqrt{4,5,x_2}\sqrt{1,2,3,x_1}\right),$$

nd wenn man

$$q' = g_1 \sqrt{(\delta_5 - x_1)(\delta_5 - x_2)}, \quad r' = g_2 \sqrt{(\delta_4 - x_1)(\delta_4 - x_2)}$$

setzt, so lassen sich die Constanten g_1, g_2 so bestimmen, dass die Bedingung (17) befriedigt ist. Eine einfache Rechnung ergiebt:

$$(22)\quad \begin{aligned} q' &= \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\frac{\nu-\delta_4}{\sqrt{\delta_5-\delta_4}}\,\sqrt{(\delta_5-x_1)(\delta_5-x_2)},\\ r' &= \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\frac{\nu-\delta_5}{\sqrt{\delta_4-\delta_5}}\,\sqrt{(\delta_4-x_1)(\delta_4-x_2)}. \end{aligned}$$

Es ist aber noch nachzuweisen, dass diese Ausdrücke der Differentialgleichung (18) genügen. Dieser Nachweis erfordert eine etwas umständliche Rechnung, deren Gang nachstehend angegeben ist. Zunächst ergiebt sich aus (22) und (15):

$$(23)\quad r'Dq'-q'Dr' = \frac{k^3\sqrt{\lambda^3}}{\mu^3(x_1-x_2)}(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)\Big\{(\nu-x_2)\sqrt{1,2,3,x_1}\sqrt{4,5,x_2} - (\nu-x_1)\sqrt{1,2,3,x_2}\sqrt{4,5,x_1}\Big\}.$$

Setzt man ferner in dem Ausdruck rechter Hand von (18) für Dp, Dq, Dr die Werthe aus den Differentialgleichungen (14) § 3., so zerfällt derselbe in zwei Bestandtheile, die wir mit M, N bezeichnen und zunächst einzeln betrachten. Es ist:

$$N = k^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left\{\frac{C_1-B_1}{A\,B_1C_1}D\log\alpha_1 + \frac{A_1-C_1}{B\,C_1A_1}D\log\alpha_2 + \frac{B_1-A_1}{C\,A_1B_1}D\log\alpha_3\right\}.$$

In dem besonderen Fall $A = B = C$ fällt M ganz weg und N ergiebt sich leicht in Uebereinstimmung mit (23). Im allgemeinen Fall setzen wir in N für $D\alpha_1$, $D\alpha_2$, $D\alpha_3$ die Werthe aus den Differentialgleichungen (4) § 3., wodurch man mittelst (3), (4), (11), (12) erhält:

$$N = \frac{\lambda k^2(\nu-x_1)(\nu-x_2)}{\mu ABC}(A^2\alpha_1 p + B^2\alpha_2 q + C^2\alpha_3 r).$$

Der andere Theil M erhält mittelst der Differentialgleichungen (4) § 3. die Gestalt:

$$M = \frac{C-B}{A}qr(\alpha_3 q - \alpha_2 r) + \frac{A-C}{B}rp(\alpha_1 r - \alpha_3 p) + \frac{B-A}{C}pq(\alpha_2 p - \alpha_1 q),$$

oder mit Benutzung der Integrale (1):

$$M = -\frac{\lambda k^2\Delta}{\mu ABC}\left\{A^2\alpha_1 p\,\frac{l-\alpha_1^2}{\delta_2-\delta_3} + B^2\alpha_2 q\,\frac{m-\alpha_2^2}{\delta_3-\delta_1} + C^2\alpha_3 r\,\frac{n-\alpha_3^2}{\delta_1-\delta_2}\right\}.$$

Hierin setzen wir für $l-\alpha_1^2$, $m-\alpha_2^2$, $n-\alpha_3^2$ die aus (4) und (9) folgenden Werthe, von denen der erste so lautet:

$$l-\alpha_1^2 = \frac{\mu}{A}\,\frac{x_1+x_2-\delta_4-\delta_5}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)} + \frac{(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)-(\nu-x_1)(\nu-x_2)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)},$$

woraus sich ergiebt:

$$M = +\frac{\lambda k^2}{\mu ABC}\Big\{(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)-(\nu-x_1)(\nu-x_2)\Big\}(A^2\alpha_1 p + B^2\alpha_2 q + C^2\alpha_3 r),$$

und mithin:

$$M + N = \frac{\lambda k^2}{\mu A B C} (A^2 \alpha_1 p + B^2 \alpha_2 q + C^2 \alpha_3 r),$$

und dies zeigt sich nach (4) und (7) mit (23) in Uebereinstimmung. Von den Vorzeichen von q', r' ist eins beliebig, das andere ist aber durch die Gleichung (18) bestimmt.

Hat man so q', r' gefunden, so ergeben sich β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 eindeutig aus den Gleichungen (19) oder (20). Man findet leicht, dass diese befriedigt werden durch die Ausdrücke:

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2, 3, 5, x_2}\sqrt{1, 4, x_1} - \sqrt{2, 3, 5, x_1}\sqrt{1, 4, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_5 - \delta_4)}},$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{3, 1, 5, x_2}\sqrt{2, 4, x_1} - \sqrt{3, 1, 5, x_1}\sqrt{2, 4, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)(\delta_5 - \delta_4)}},$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{1, 2, 5, x_2}\sqrt{3, 4, x_1} - \sqrt{1, 2, 5, x_1}\sqrt{3, 4, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)(\delta_5 - \delta_4)}},$$

(24)

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2, 3, 4, x_2}\sqrt{1, 5, x_1} - \sqrt{2, 3, 4, x_1}\sqrt{1, 5, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{3, 1, 4, x_2}\sqrt{2, 5, x_1} - \sqrt{3, 1, 4, x_1}\sqrt{2, 5, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)(\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{1, 2, 4, x_2}\sqrt{3, 5, x_1} - \sqrt{1, 2, 4, x_1}\sqrt{3, 5, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)(\delta_4 - \delta_5)}}.$$

Von den Coordinaten α, β, γ des Anfangspunktes des beweglichen Coordinatensystems ergeben sich die beiden ersten unmittelbar aus den Gleichungen (13) § 3., welche nach (7) und (24) die Form annehmen:

(25) $$\beta = \frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{(\delta_4 - x_1)(\delta_4 - x_2)}}{\sqrt{\delta_4 - \delta_5}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{(\delta_5 - x_1)(\delta_5 - x_2)}}{\sqrt{\delta_5 - \delta_4}}.$$

Endlich erhalten wir α durch eine Quadratur aus

(26) $$D\alpha = k\left(\frac{\alpha_1^2}{A_1} + \frac{\alpha_2^2}{B_1} + \frac{\alpha_3^2}{C_1}\right).$$

Diese Quadratur lässt sich auf hyperelliptische Integrale zweiter Gattung zurückführen wie folgt: Setzt man aus (4) die Werthe für α_1^2, α_2^2, α_3^2, so findet man:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\alpha_1^2}{A_1} + \frac{\alpha_2^2}{B_1} + \frac{\alpha_3^2}{C_1}\right) = {} & \frac{\delta_1^2(\delta_3 - \delta_2)}{A_1} + \frac{\delta_2^2(\delta_1 - \delta_3)}{B_1} + \frac{\delta_3^2(\delta_2 - \delta_1)}{C_1} \\
& + (x_1 + x_2)\left\{\frac{\delta_1(\delta_2 - \delta_3)}{A_1} + \frac{\delta_2(\delta_3 - \delta_1)}{B_1} + \frac{\delta_3(\delta_1 - \delta_2)}{C_1}\right\} \\
& - x_1 x_2 \left\{\frac{\delta_2 - \delta_3}{A_1} + \frac{\delta_3 - \delta_1}{B_1} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{C_1}\right\}
\end{aligned}$$

und nach (11) und (12):

$$\frac{\delta_1(\delta_2-\delta_3)}{A_1}+\frac{\delta_2(\delta_3-\delta_1)}{B_1}+\frac{\delta_3(\delta_1-\delta_2)}{C_1}=-\frac{\lambda\nu}{\mu}\Delta,$$

$$\frac{\delta_2-\delta_3}{A_1}+\frac{\delta_3-\delta_1}{B_1}+\frac{\delta_1-\delta_2}{C_1}=-\frac{\lambda}{\mu}\Delta,$$

ferner nach dem Satz von der lebendigen Kraft:

$$\Delta\left(\frac{l}{A_1}+\frac{m}{B_1}+\frac{n}{C_1}\right)=\Delta\frac{h}{k^2}=\frac{\delta_1^2(\delta_3-\delta_2)}{A_1}+\frac{\delta_2^2(\delta_1-\delta_3)}{B_1}+\frac{\delta_3^2(\delta_2-\delta_1)}{C_1}$$
$$+\frac{\lambda}{\mu}(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)-\frac{\lambda}{\mu}\nu^2,$$

mithin:

$$D\alpha=\frac{h}{k}-\frac{\lambda k}{\mu}(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)+\frac{\lambda k}{\mu}(\nu-x_1)(\nu-x_2),$$

nun ergiebt sich aus (15):

$$dt(\nu-x_1)(\nu-x_2)=\frac{\mu}{2k\sqrt{\lambda}}\left\{\frac{dx_1(\nu-x_1)x_1}{R(x_1)}+\frac{dx_2(\nu-x_2)x_2}{R(x_2)}\right\},$$

mithin:

$$(27)\quad \alpha=\left\{\frac{h}{k}-\frac{\lambda k}{\mu}(\nu-\delta_4)(\nu-\delta_5)\right\}t+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left\{\int\frac{x_1(\nu-x_1)\,dx_1}{R(x_1)}+\int\frac{x_2(\nu-x_2)\,dx_2}{R(x_2)}\right\},$$

wofür nach (16) auch geschrieben werden kann:

$$(28)\quad \alpha=\left\{\frac{h}{k}+\frac{\lambda k\nu}{\mu}(\delta_4+\delta_5)-\frac{\lambda k}{\mu}\delta_4\delta_5\right\}t-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left\{\int\frac{x_1^2\,dx_1}{R(x_1)}+\int\frac{x_2^2\,dx_2}{R(x_2)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch in dem Falle $A=B=C$, wenn $\frac{\nu}{\mu}=\frac{-1}{A}$, $\frac{1}{\mu}=0$ gesetzt wird.

§ 5.

Die Betrachtung des vorigen Paragraphen hat gezeigt, dass der in § 3. behandelte Fall nur einer von vier ähnlichen gleich möglichen Fällen ist, die sich durch die Beschaffenheit des Anfangszustandes von einander unterscheiden. Jener Fall ist allerdings insofern der interessanteste von den vieren, als darin derjenige enthalten ist, in dem gar keine anfängliche Rotation vorhanden ist. Um nun in allen vier Fällen die sämmtlichen unbekannten Functionen vermittelst der Thetafunctionen durch die Zeit darzustellen, gehen wir zur Umkehrung der im Vorigen gefundenen hyperelliptischen Integrale über.

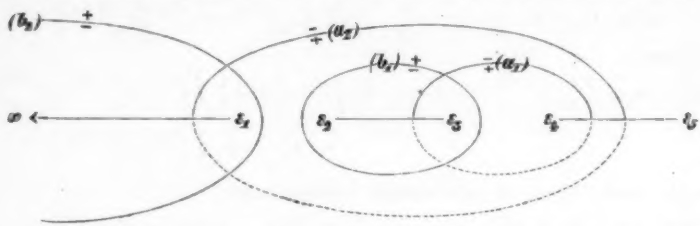
Um zunächst die verschiedenen Fälle nicht von einander scheiden zu müssen, bezeichnen wir die der Grösse nach geordneten δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 mit ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, so dass in den vier Fällen die ε den δ in folgender Weise entsprechen:

	$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_5$				
I.	δ_1	δ_4	δ_2	δ_5	δ_3
II.	δ_1	δ_4	δ_2	δ_3	δ_5
III.	δ_1	δ_2	δ_4	δ_5	δ_3
IV.	δ_1	δ_2	δ_4	δ_3	δ_5.

Wir stellen nun die Verzweigung der Function

$$R(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)(\varepsilon_4 - x)(\varepsilon_5 - x)}$$

durch eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche dar, deren Zerschneidung durch die Querschnittpaare (a_1), (b_1); (a_2), (b_2) durch die beistehende Figur angedeutet ist. (Die Zerschneidung ist so gewählt, dass für den ersten Fall dieselben Formeln wie in § 8. erhalten werden.)



Auf dem Stück der reellen Axe zwischen ε_5 und $+\infty$ möge $R(x)$ positiv genommen sein im oberen Blatt. Wir setzen nun:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{R(x)} = iK_1, \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} \frac{dx}{R(x)} = iK_2, \quad \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} \frac{dx}{R(x)} = K_3, \quad \int_{\varepsilon_5}^{\infty} \frac{dx}{R(x)} = K_4,$$

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \frac{x\,dx}{R(x)} = iL_1, \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} \frac{x\,dx}{R(x)} = iL_2, \quad \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} \frac{x\,dx}{R(x)} = L_3, \quad \int_{\varepsilon_5}^{\infty} \frac{x\,dx}{R(x)} = L_4,$$

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = iE_1, \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = iE_2, \quad \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = E_3, \quad \int_{\varepsilon_5}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = E_4 \text{ *)}$$

und bestimmen die Integrationswege dadurch, dass K_1, K_2, K_3, K_4 positiv sind. Die drei Integrale erster und zweiter Gattung:

$$w_1 = \int \frac{dx}{R(x)}, \quad w_2 = \int \frac{x\,dx}{R(x)}, \quad e = \int \frac{x^2\,dx}{R(x)},$$

auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken, haben an den vier Querschnitten die folgenden Periodicitätsmoduln:

---

*) Die Integrale E_1, E_4 müssen durch einen passend gewählten complexen Integrationsweg erklärt werden.

$$
(2)\qquad
\begin{array}{c|ccc|cc}
 & w_1, & w_2, & e & u_1 & u_2 \\
\hline
(a_1) & -2iK_2, & -2iL_2, & -2iE_2 & \pi i & 0 \\
(b_1) & 2K_3, & 2L_3, & 2E_3 & a_{11} & a_{21} \\
(a_2) & 2iK_1, & 2iL_1, & 2iE_1 & 0 & \pi i \\
(b_2) & 2K_4, & 2L_4, & 2E_4 & a_{12} & a_{22}
\end{array}
$$

Es müssen nun zunächst die Normalintegrale erster Gattung u_1, u_2 so bestimmt werden, dass ihre Periodicitätsmoduln die in der vierten und fünften Columne der obigen Tabelle (2) angegebenen Werthe haben. Setzt man also:

$$du_1 = \frac{a_1 + b_1 x}{R(x)}\,dx, \qquad du_2 = \frac{a_2 + b_2 x}{R(x)}\,dx,$$

so erhält man für a_1, b_1, a_2, b_2 die linearen Gleichungen:

$$a_1 K_2 + b_1 L_2 = -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad a_2 K_2 + b_2 L_2 = 0,$$
$$a_1 K_1 + b_1 L_1 = 0, \qquad a_2 K_1 + b_2 L_1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

woraus

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{L_1}{K_1 L_2 - K_2 L_1}, & a_2 &= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{L_2}{K_1 L_2 - K_2 L_1},\\ b_1 &= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{-K_1}{K_1 L_2 - K_2 L_1}, & b_2 &= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{-K_2}{K_1 L_2 - K_2 L_1},\end{aligned}$$

und weiter:

$$(4)\qquad \begin{aligned} a_{11} &= \pi\,\frac{L_1 K_3 - K_1 L_3}{K_1 L_2 - K_2 L_1}, \qquad a_{22} = \pi\,\frac{L_2 K_4 - K_2 L_4}{K_1 L_2 - K_2 L_1},\\ a_{21} &= a_{12} = \pi\,\frac{L_1 K_4 - K_1 L_4}{K_1 L_2 - K_2 L_1} = \pi\,\frac{L_2 K_3 - L_3 K_2}{K_1 L_2 - K_2 L_1},\\ a_{11} a_{22} - a_{12}^2 &= \pi^2\,\frac{K_3 L_4 - K_4 L_3}{K_1 L_2 - K_2 L_1},\end{aligned}$$

woraus leicht zu erkennen ist, dass a_{11}, a_{22}, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ negativ sind.

Es lassen sich nun zunächst leicht die Factoren ± 1 bestimmen, welche die einzelnen Functionen $\sqrt{\varepsilon_i - x}$ beim Ueberschreiten der Querschnitte (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) annehmen. Diese Factoren können durch eine Charakteristik ausgedrückt werden:

$$(\sqrt{\varepsilon_i - x}) = (\varepsilon_i) = \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix},$$

wenn die Factoren für die Function $\sqrt{\varepsilon_i - x}$ an den genannten Querschnitten beziehungsweise sind $(-1)^{\nu_1}$, $(-1)^{\nu_2}$, $(-1)^{\mu_1}$, $(-1)^{\mu_2}$. Man findet für die fünf Functionen $(\sqrt{\varepsilon_i - x})$ die folgenden Charakteristiken:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\varepsilon_1) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (\beta_4 + \beta_1),\\ (\varepsilon_2) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (\beta_4 + \beta_5),\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\beta_4 + \beta_2),$$

$$(5) \qquad (\varepsilon_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\beta_4 + \beta_6),$$

$$(\varepsilon_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\beta_4 + \beta_3).$$

Setzen wir nun, indem wir mit ζ, ζ' zwei veränderliche Punkte der Riemann'schen Fläche bezeichnen, die zu den Werthen x, x' gehören:

$$(u_1, u_2) = \left(\int_{\zeta}^{\zeta'} du_1, \int_{\zeta}^{\zeta'} du_2 \right),$$

so folgt hieraus leicht mit Benutzung der Bezeichnung § 2.:

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
\sqrt{(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_1 - x')} &= h_1 \frac{\vartheta_1(u_1, u_2)}{\vartheta_4(u_1, u_2)}, \\
\sqrt{(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_2 - x')} &= h_2 \frac{\vartheta_5(u_1, u_2)}{\vartheta_4(u_1, u_2)}, \\
\sqrt{(\varepsilon_3 - x)(\varepsilon_3 - x')} &= h_3 \frac{\vartheta_2(u_1, u_2)}{\vartheta_4(u_1, u_2)}, \\
\sqrt{(\varepsilon_4 - x)(\varepsilon_4 - x')} &= h_4 \frac{\vartheta_6(u_1, u_2)}{\vartheta_4(u_1, u_2)}, \\
\sqrt{(\varepsilon_5 - x)(\varepsilon_5 - x')} &= h_5 \frac{\vartheta_3(u_1, u_2)}{\vartheta_4(u_1, u_2)},
\end{aligned}
$$

worin h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 von ζ, ζ' unabhängig sind. Lässt man ζ mit ζ' zusammenfallen und bestimmt die Grenzwerthe der Ausdrücke rechts durch Differentiation, so erhält man:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
b_1 D_1 \vartheta_4 + b_2 D_2 \vartheta_4 &= 0, \\
(a_1 + b_1 \varepsilon_1) D_1 \vartheta_1 + (a_2 + b_2 \varepsilon_1) D_2 \vartheta_1 &= 0, \\
(a_1 + b_1 \varepsilon_2) D_1 \vartheta_5 + (a_2 + b_2 \varepsilon_2) D_2 \vartheta_5 &= 0, \\
(a_1 + b_1 \varepsilon_3) D_1 \vartheta_2 + (a_2 + b_2 \varepsilon_3) D_2 \vartheta_2 &= 0, \\
(a_1 + b_1 \varepsilon_4) D_1 \vartheta_6 + (a_2 + b_2 \varepsilon_4) D_2 \vartheta_6 &= 0, \\
(a_1 + b_1 \varepsilon_5) D_1 \vartheta_3 + (a_2 + b_2 \varepsilon_5) D_2 \vartheta_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Bildet man aus je zweien dieser Gleichungen die Differenzen $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ etc. und substituirt aus der ersten das Verhältniss $b_1 : b_2$, so kann man, von einem gemeinschaftlichen Factor abgesehen, die 10 Differenzen $\varepsilon_i - \varepsilon_k$ durch die ϑ-Moduln ausdrücken. Durch Anwendung der Formeln (9) § 2. nehmen diese Ausdrücke, wenn τ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, die Gestalt an:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1) &= \vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,5}\vartheta^3_{3,5}, & \tau(\varepsilon_4-\varepsilon_2) &= \vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,4}\vartheta^2_{3,4},\\
\tau(\varepsilon_3-\varepsilon_1) &= \vartheta^2\;\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{3,6}, & \tau(\varepsilon_5-\varepsilon_2) &= \vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{3,4},\\
\tau(\varepsilon_4-\varepsilon_1) &= \vartheta^2_{1,4}\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{3,6}, & \tau(\varepsilon_4-\varepsilon_3) &= \vartheta^2_{3,6}\vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{2,4},\\
\tau(\varepsilon_5-\varepsilon_1) &= \vartheta^2\;\vartheta^2_{2,5}\vartheta^2_{2,6}, & \tau(\varepsilon_5-\varepsilon_3) &= \vartheta^2\;\vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{1,6},\\
\tau(\varepsilon_3-\varepsilon_2) &= \vartheta^2_{1,5}\vartheta^2_{3,5}\vartheta^2_{2,4}, & \tau(\varepsilon_5-\varepsilon_4) &= \vartheta^2_{1,6}\vartheta^2_{2,6}\vartheta^2_{3,4}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nach der ersten Gleichung (7)

$$b_1 = \sigma D_2 \vartheta_4, \qquad b_2 = -\,\sigma D_1 \vartheta_4,$$

so wird:

$$(9)\qquad \tau = -\,\sigma^2\,\frac{\vartheta\,\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Um zunächst die Constanten h in den Formeln (6) zu bestimmen, lässt man die Punkte ζ, ζ' in passend gewählte Verzweigungspunkte hineinfallen. Die Integrale $\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_k} du_1$, $\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_k} du_2$ werden dann gleich gewissen Systemen zusammengehöriger halber Perioden, deren Charakteristiken die Summen von (ε_i) und (ε_k) sind (was sich aus dem Verschwinden der Ausdrücke (6) leicht schliessen lässt). So ergiebt sich aus (6)

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(\varepsilon_1-x)(\varepsilon_1-x')}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_5)}} &= \frac{\vartheta_{1,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_1(u_1,u_2)}{\vartheta_4(u_1,u_2)},\\
\sqrt{\frac{(\varepsilon_2-x)(\varepsilon_2-x')}{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_5)}} &= \frac{\vartheta_{1,4}}{\vartheta_{1,5}}\,\frac{\vartheta_5(u_1,u_2)}{\vartheta_4(u_1,u_2)},\\
\sqrt{\frac{(\varepsilon_3-x)(\varepsilon_3-x')}{(\varepsilon_3-\varepsilon_5)(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}} &= i\,\frac{\vartheta_{2,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_2(u_1,u_2)}{\vartheta_4(u_1,u_2)},\\
\sqrt{\frac{(\varepsilon_4-x)(\varepsilon_4-x')}{(\varepsilon_4-\varepsilon_5)(\varepsilon_4-\varepsilon_1)}} &= i\,\frac{\vartheta_{2,4}}{\vartheta_{2,6}}\,\frac{\vartheta_6(u_1,u_2)}{\vartheta_4(u_1,u_2)},\\
\sqrt{\frac{(\varepsilon_5-x)(\varepsilon_5-x')}{(\varepsilon_5-\varepsilon_1)(\varepsilon_5-\varepsilon_3)}} &= \frac{\vartheta_{3,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_3(u_1,u_2)}{\vartheta_4(u_1,u_2)}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun, indem wir die Wurzeln $R(x_1)$, $R(x_2)$ ebenso wie im (§ 4.) erklären:

$$(11)\qquad (v_1, v_2) = \left(\int_{x_1}^{\varepsilon_2} du_1 + \int_{x_2}^{\varepsilon_4} du_1,\quad \int_{x_1}^{\varepsilon_2} du_2 + \int_{x_2}^{\varepsilon_4} du_2\right)$$

(die constanten Grenzen ε_2, ε_4 sind so gewählt, dass in dem Falle, wo keine anfänglichen Rotationen stattfinden, die Anfangswerthe von x_1, x_2 mit diesen zusammenfallen) und setzen für ζ, ζ' die Punkte $(x_1, R(x_1))$, $(x_2, -R(x_2))$, so wird:

$$(u_1, u_2) = \left(v_1 + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_4} du_1, \quad v_2 + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_4} du_2\right),$$

und man erhält aus (10)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - x_1)(\varepsilon_1 - x_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - \varepsilon_5)}} = \frac{\vartheta_{1,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_{1,4}(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)},\\
&\sqrt{\frac{(\varepsilon_2 - x_1)(\varepsilon_2 - x_2)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_5)}} = \frac{\vartheta_{1,4}}{\vartheta_{1,5}}\,\frac{\vartheta_6(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)},\\
(12)\qquad&\sqrt{\frac{(\varepsilon_3 - x_1)(\varepsilon_3 - x_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_5)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}} = \frac{\vartheta_{2,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_{2,4}(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)},\\
&\sqrt{\frac{(\varepsilon_4 - x_1)(\varepsilon_4 - x_2)}{(\varepsilon_4 - \varepsilon_5)(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)}} = \frac{\vartheta_{2,4}}{\vartheta_{2,6}}\,\frac{\vartheta_5(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)},\\
&\sqrt{\frac{(\varepsilon_5 - x_1)(\varepsilon_5 - x_2)}{(\varepsilon_5 - \varepsilon_1)(\varepsilon_5 - \varepsilon_3)}} = \frac{\vartheta_{3,4}}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_{3,4}(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)}.
\end{aligned}$$

Lässt man in einer dieser Gleichungen, etwa in der ersten, $x_2 = \varepsilon_5$, $x_1 = \infty$ werden, so ergiebt sich durch Differentiation eine Gleichung, aus welcher der noch unbestimmte Factor σ und mithin τ bestimmt werden kann.

Man findet zunächst

$$-4\sigma^2\tau = 1,$$

woraus mittelst (9) und (3) folgt:

$$(13)\qquad \pi^2\tau^2 = \vartheta\,\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6}(K_1L_2 - K_2L_1)$$

und daraus nach (8)

$$(14)\qquad \pi^2\vartheta^2 = (K_1L_2 - K_2L_1)\sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_5 - \varepsilon_1)(\varepsilon_5 - \varepsilon_3)(\varepsilon_4 - \varepsilon_2)}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen geraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente durch die Moduln ε ausdrücken.

Um nun die Integrale zweiter Gattung, soweit es für unsere Aufgabe nöthig ist, durch Thetafunctionen darzustellen, bestimmen wir in dem Integral

$$\zeta = \int \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2}{R(x)}\,dx$$

die Constanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ so, dass die Periodicitätsmoduln desselben an den Querschnitten (a_1), (a_2) verschwinden. Dadurch ergiebt sich

$$d\zeta = \frac{(L_1E_2 - E_1L_2) + (E_1K_2 - K_1E_2)x + (K_1L_2 - K_2L_1)x^2}{R(x)}\,dx.$$

Die Periodicitätsmoduln von ζ für die Querschnitte (b_1), (b_2) werden hiernach:

$$\begin{gathered}
2(L_1E_2 - E_1L_2)K_3 + 2(E_1K_2 - K_1E_2)L_3 + 2(K_1L_2 - K_2L_1)E_3\\
2(L_1E_2 - E_1L_2)K_4 + 2(E_1K_2 - K_1E_2)L_4 + 2(K_1L_2 - K_2L_1)E_4.
\end{gathered}$$

Diese Periodicitätsmoduln ergeben sich aber auch, wie man durch Bildung der Integrale

$$\int \zeta\, dw_1, \quad \int \zeta\, dw_2$$

über die ganze Begrenzung der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche erkennt, gleich

$$-4\pi K_1, \quad -4\pi K_2.$$

Daraus schliesst man, dass die beiden Functionen

$$\int_{x_1}^{\varepsilon_2} d\zeta + \int_{x_2}^{\varepsilon_4} d\zeta \text{ und } 2\pi(K_1 D_1 \lg \vartheta(v_1, v_2) + K_2 D_2 \lg \vartheta(v_1, v_2))$$

sowohl in Bezug auf x_1, als in Bezug auf x_2 dieselbe Periodicität haben, und dass sie sich mithin nur um eine rationale Function von x_1, $R(x_1)$; x_2, $R(x_2)$ von einander unterscheiden können. Da diese Function jedoch nur für $x_1 = \infty$ resp. $x_2 = \infty$ unendlich in der ersten Ordnung werden kann, so muss sie eine Constante sein, deren Werth sich aus $(x_1, x_2) = (\varepsilon_2, \varepsilon_4)$ als Null ergiebt. Wir haben demnach

$$\int_{x_1}^{\varepsilon_2} d\zeta + \int_{x_2}^{\varepsilon_4} d\zeta = 2\pi(K_1 D_1 \lg \vartheta(v_1, v_2) + K_2 D_2 \lg \vartheta(v_1, v_2)),$$

woraus man noch erhält:

$$\text{(15)} \qquad \int_{x_1}^{\varepsilon_2} \frac{x^2\, dx}{R(x)} + \int_{x_2}^{\varepsilon_4} \frac{x^2\, dx}{R(x)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}(E_2 v_1 - E_1 v_2) + 2\pi \frac{K_1 D_1 \lg \vartheta(v_1, v_2) + K_2 D_2 \lg \vartheta(v_1, v_2)}{K_1 L_2 - K_2 L_1} \text{*)}.$$

Um nun diese Ergebnisse auf unser Problem anzuwenden, haben wir, wenn die Anfangswerthe von v_1, v_2 mit $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ bezeichnet werden, zu setzen:

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} v_1 - v_1^{(0)} &= \frac{\pi k \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{K_1 \nu - L_1}{K_1 L_2 - K_2 L_1} t, \\ v_2 - v_2^{(0)} &= \frac{\pi k \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{K_2 \nu - L_2}{K_1 L_2 - K_2 L_1} t \end{aligned}$$

und es ergeben sich die Grössen ω_i wie folgt:

---

*) Vgl. Weierstrass „Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid“ (Monatsbericht der Berliner Akademie vom 31. Oct. 1861) sowie des Verfassers Abhandlung „Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung“ Borchardts Journal Bd. 82. Seite 131.

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\sigma(\varepsilon_1-\nu)\,\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,4}\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,6},\\
\omega_2 &= -\frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\sigma(\varepsilon_3-\nu)\,\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,6}\vartheta_{1,4}\vartheta_{3,4},\\
\omega_3 &= +\frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\sigma(\varepsilon_5-\nu)\,\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,4}\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,6},\\
\omega_5 &= -\frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\sigma(\varepsilon_2-\nu)\,\vartheta\vartheta_{1,6}\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,6},\\
\omega_6 &= -\frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\sigma(\varepsilon_4-\nu)\,\vartheta\vartheta_{1,5}\vartheta_{2,5}\vartheta_{3,5},\\
\omega_4 &= \frac{\pi^2 k\sqrt{\lambda}}{2\sigma\mu(K_1L_2-K_2L_1)}.
\end{aligned}
$$

Hiernach gehen wir zur Darstellung der gesuchten Functionen durch Thetafunctionen über, und beginnen damit, die Werthe der Constanten l, m, n in den vier Fällen aufzustellen. Für diese erhalten wir nach (12) und (8)

$$
(18)\quad
\begin{array}{rcccc}
 & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV}\\[4pt]
l = & \dfrac{\vartheta^4_{1,4}}{\vartheta^4}, & \dfrac{\vartheta^4_{2,5}}{\vartheta^4_{3,6}}, & \dfrac{\vartheta^6_{3,6}}{\vartheta^4_{2,5}}, & \dfrac{\vartheta^4}{\vartheta^4_{1,4}},\\[10pt]
m = & \dfrac{\vartheta^4_{2,4}}{\vartheta^4}, & \dfrac{\vartheta^4_{1,5}}{\vartheta^4_{3,6}}, & -\dfrac{\vartheta^4_{2,4}}{\vartheta^4_{2,5}}, & -\dfrac{\vartheta^4_{1,5}}{\vartheta^4_{1,4}},\\[10pt]
n = & \dfrac{\vartheta^4_{3,4}}{\vartheta_4}, & -\dfrac{\vartheta^4_{3,4}}{\vartheta^4_{3,6}}, & \dfrac{\vartheta^4_{1,6}}{\vartheta^4_{2,5}}, & -\dfrac{\vartheta^4_{1,6}}{\vartheta^4_{1,4}}.
\end{array}
$$

Ferner erhält man nach (4) § 4. und (12):

$$
(19)\quad
\begin{array}{rcccc}
 & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV}\\[4pt]
\alpha_1 = & \dfrac{\vartheta_{1,4}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{2,5}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{3,6}\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta\vartheta_{1,4}(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)},\\[10pt]
\alpha_2 = & -\dfrac{\vartheta_{2,4}\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{1,5}\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{2,4}\vartheta_6(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{1,5}\vartheta_6(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)},\\[10pt]
\alpha_3 = & \dfrac{\vartheta_{3,4}\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{3,4}\vartheta_5(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{1,6}\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{1,6}\vartheta_5(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}.
\end{array}
$$

Die Vorzeichen können in diesen Ausdrücken beliebig angenommen werden, weil dadurch nur über die positive Richtung der x, y, z Axen verfügt wird. Hat man diese Grössen, so ergeben sich die Componenten der Drehung p, q, r in eindeutiger Weise aus den linearen Gleichungen

$$
D\alpha_1 = \alpha_3 q - \alpha_2 r,\quad D\alpha_2 = \alpha_1 r - \alpha_3 p,\quad D\alpha_3 = \alpha_3 p - \alpha_1 q,
$$
$$
A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r = 0.
$$

Bildet man in derselben Weise wie in § 2. die Differentialquotienten

der α_1, α_2, α_3, so findet man, dass diesen Gleichungen durch die folgenden Ausdrücke genügt wird:

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
 & p = \dfrac{\vartheta_1(v_1,v_2)\,\omega_1}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)\,\omega_1}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)\,\omega_1}{\vartheta_{2,5}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_1}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_2)}, \\
(20) & q = \dfrac{\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_2}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_1)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)\,\omega_2}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_2(v_1,v_2)\,\omega_5}{\vartheta_{2,5}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)\,\omega_5}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_2)}, \\
 & r = \dfrac{\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_3}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_3(v_1,v_2)\,\omega_6}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)\,\omega_3}{\vartheta_{1,5}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)\,\omega_6}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_{26}},
\end{array}
$$

Hieraus ergiebt sich zunächst

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
(21) & p' = \dfrac{\vartheta_4(v_1,v_2)\,\omega_4}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)\,\omega_4}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)\,\omega_4}{\vartheta_{2,5}\,\vartheta(v)}, & \dfrac{\vartheta_1(v)\,\omega_4}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_2)}
\end{array}
$$

und ferner aus (22) § 4. und (12), (17):

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
 & q' = \dfrac{\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega_5}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\,\dfrac{\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)\,\omega_5}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_5(v_1,v_2)\,\omega,}{\vartheta_{2,5}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{3,4}(v_1,v_2)\,\omega_2}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_2)}, \\
(22) & & & & \\
 & r' = \dfrac{\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_6}{\vartheta\,\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_6(v_1,v_2)\,\omega_3}{\vartheta_{3,6}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)\,\omega_6}{\vartheta_{2,5}\,\vartheta(v_1,v_2)}, & i\,\dfrac{\vartheta_{2,4}(v_1,v_2)\,\omega_3}{\vartheta_{1,4}\,\vartheta(v_1,v_2)},
\end{array}
$$

Die Vorzeichen einer der beiden Grössen q', r' können beliebig angenommen werden, die der andern sind durch die Gleichung (23) § 4. bestimmt. Statt aber diese Gleichung (23) anzuwenden, die für die Rechnung mit den Thetafunctionen weniger bequem ist, bestimmt man zunächst für $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Ausdrücke durch Thetafunctionen, die den Gleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\
&\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\
&\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,
\end{aligned}
$$

deren Charakteristiken sich aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r &= q', \\
\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r &= r'
\end{aligned}
$$

unmittelbar ergeben. Die Vorzeichen von β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 sind dann noch so zu wählen, dass $\Sigma \pm \alpha_1\beta_2\gamma_3 = 1$, d. h. $\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$ wird. Um die Richtigkeit der so gefundenen Resultate darzuthun, hat man nur noch zu zeigen, dass durch dieselben den Gleichungen

$$D\beta_1 = \beta_2 q - \beta_3 r, \quad D\beta_2 = \beta_1 r - \beta_3 p, \quad D\beta_3 = \beta_2 p - \beta_1 q$$

Genüge geschieht, was durch die Bildung der Differentialquotienten

$D\beta_1$, $D\beta_2$, $D\beta_3$, ganz wie in § 2. geleistet wird. Für β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 erhält man so die Ausdrücke:

$$
(23)\qquad
\begin{array}{lllll}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
\beta_1 = & -\dfrac{\vartheta_{1,5}\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & -\dfrac{\vartheta_{2,4}\vartheta_{1,5}(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{1,5}\vartheta_3(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\dfrac{\vartheta_{2,4}\vartheta_3(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}, \\
\beta_2 = & \dfrac{\vartheta_{2,5}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{1,4}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & -\dfrac{\vartheta_{3,6}\vartheta_{2,5}(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}, \\
\beta_3 = & -\dfrac{\vartheta_{3,5}\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{3,5}\vartheta_4(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\dfrac{\vartheta_{3,5}\vartheta_1(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{3,5}\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}, \\
\gamma_1 = & -\dfrac{\vartheta_{1,6}\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\dfrac{\vartheta_{1,6}\vartheta_2(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & -\dfrac{\vartheta_{3,4}\vartheta_{1,6}(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1.v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{3,4}\vartheta_2(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}, \\
\gamma_2 = & \dfrac{\vartheta_{2,6}\vartheta_{2,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & -i\dfrac{\vartheta_{2,6}\vartheta_1(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & i\dfrac{\vartheta_{2,6}\vartheta_4(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & -\dfrac{\vartheta_{2,6}\vartheta_{3,5}(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)}, \\
\gamma_3 = & \dfrac{\vartheta_{3,6}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)}{\vartheta\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)}{\vartheta_{3,6}\vartheta(v_1,v_2)}, & \dfrac{\vartheta_{1,4}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)}{\vartheta_{2,5}\vartheta(v_1,v_2)}, & -\dfrac{\vartheta_{2.5}\vartheta_{3,6}(v_1,v_2)}{\vartheta_{1,4}\vartheta(v_1,v_2)},
\end{array}
$$

und q', r' ergeben sich wie oben in (22) angegeben.

Es bleibt nun noch übrig, die Coordinaten des Anfangspunktes, α, β, γ als Functionen der Zeit auszudrücken. Zunächst erhält man aus den Gleichungen:

$$k\gamma = A\beta_1 p + B\beta_2 q + C\beta_3 r,$$
$$-k\beta = A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r$$

die für alle vier Fälle gültigen Ausdrücke

$$k\gamma = \frac{\mu q'}{\delta_4 - v}, \quad -k\beta = \frac{\mu r'}{\delta_5 - v}$$

die sich, vom Vorzeichen abgesehen aus (25) § 4. ergeben. Wegen der Bestimmung der Vorzeichen muss man die Ausdrücke in den Thetafunctionen behandeln, wodurch man zu den vorstehenden Gleichungen gelangt.

Endlich erhält man die Darstellung von α aus (28) § 4. in Verbindung mit (15) § 5. bei passender Bestimmung des Anfangswerthes in folgender Weise:

$$\alpha = \left[\frac{h}{k} + \frac{\lambda k v}{\mu}(\delta_4 + \delta_5) - \frac{\lambda k}{\mu}\delta_4\delta_5 - \frac{\lambda k}{\mu}\,\frac{(K_1E_2 - K_2E_1)v - (L_1E_2 - L_2E_1)}{K_1L_2 - K_2L_1}\right]t$$
$$+ \sqrt{\lambda}\,\pi\,\frac{K_1D_1 \lg\vartheta(v_1,v_2) + K_2D_2\lg\vartheta(v_1,v_2)}{K_1L_2 - K_2L_1}.$$

Königsberg im Mai 1878.

Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen.

Von A. Beck in Riga.

Die allgemeine Theorie der ebenen Curven und der Flächen gründet sich wesentlich auf die Betrachtung der Polarcurven resp. Polarflächen. Es lassen sich aber, wie im Folgenden gezeigt werden soll, einzelne Resultate auf einem Wege ableiten, welcher die Theorie der Polaren nicht voraussetzt.

Das Verfahren ist demjenigen nachgebildet, nach welchem Steiner im 49. Bande des Crelle'schen Journals in der Abhandlung: „Ueber algebraische Curven und Flächen" die Anzahl der Normalen bestimmte, die von einem Punkt aus an eine ebene Curve gezogen werden können. Lässt man die Curve sich um diesen Punkt herum um einen unendlich kleinen Winkel drehen, so geben die Schnittpunkte der beiden Curven die Fusspunkte jener Normalen, deren Anzahl also, wenn n die Ordnungszahl der Curve bezeichnet, $= n^2$ ist, vorausgesetzt, dass die Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitze.

I. Um für eine ebene Curve n^{ter} Ordnung die Classenzahl zu erhalten, braucht man nur anstatt einer Drehung der Curve eine unendlich kleine Verschiebung derselben in beliebiger Richtung in der Ebene auszuführen, denn die Berührungspunkte der Tangenten, die man in jener Richtung an die Curve legen kann, stellen sich offenbar als Schnittpunkte der beiden Curven dar. — Von der Gesammtheit dieser Schnittpunkte sind aber abzurechnen:

1) Die n Punkte, welche die beiden Curven auf der unendlich fernen Geraden gemein haben, da diese bei der Verschiebung ihre Lage nicht ändern.
2) Die Schnittpunkte, die durch das Vorhandensein von Doppel- und Rückkehrpunkten entstehen. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die beiden Curvenäste, die durch den Doppelpunkt gehen, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ ihre beiden Verschiebungen, so schneiden sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ sowie $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'$ in zwei dem Doppelpunkt unendlich nahen Punkten, die der Aufgabe offenbar fremd sind. Denkt man sich einen Rückkehrpunkt aus einem Doppelpunkt dadurch entstanden, dass

die Schleife sich immer mehr verkleinerte, so folgt, dass beim Verschwinden der Schleife nothwendig noch ein dritter Schnittpunkt, welcher der Aufgabe ebenfalls fremd ist, dem Rückkehrpunkt unendlich benachbart wird. —

So ergiebt sich die *erste* Plücker'sche Gleichung:

$$m = n(n-1) - 2d - 3k,$$

wenn d und k die Anzahl der Doppel- resp. Rückkehrpunkte bezeichnen.

So wie diese Gleichung für einen unendlich fernen Punkt abgeleitet wurde, lässt sich die *zweite* Plücker'sche Gleichung mit Hülfe derselben Verschiebung für eine specielle Gerade, die unendlich ferne, aufstellen. Doch wird man besser die Verschiebung durch die entsprechende allgemeinere Transformation, nämlich eine centrische Collineation ersetzen. — Um die Anzahl der Tangenten zu bestimmen, die von einem Punkt C aus an die Curve gezogen werden können, nehme man diesen Punkt als Mittelpunkt einer centrischen Collineation und wähle die Collineationsaxe c ganz beliebig. Nimmt man dann noch zu einem Punkt P der Curve den entsprechenden P' beliebig auf dem Strahl CP an, so ist die collineare Beziehung bestimmt und der gegebenen Curve entspricht eine andere, die nach Ordnung, Classe u. s. w. mit der erstern übereinstimmt und durch dieselben n Punkte auf der Collineationsaxe hindurchgeht. Lässt man dann den Punkt P' sich immer mehr dem Punkte P nähern, so gehen die Schnittpunkte beider Curven schliesslich in die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten über, mit Ausnahme 1) der n Punkte, in welchen die Collineationsaxe von beiden Curven geschnitten wird, 2) der $2d$ und $3k$ Punkte, die von den Doppel- und Rückkehrpunkten herrühren.

Dasselbe geometrische Hülfsmittel liefert die Ordnungszahl n einer Enveloppe von bestimmter Classe m. Man nimmt die gerade Linie c, deren Schnittpunkte mit der Enveloppe gefunden werden sollen, als Axe, einen beliebigen Punkt C als Mittelpunkt einer centrischen Collineation und ordnet einer beliebigen Tangente t eine Gerade t' zu, die sich mit t auf c schneidet und die man allmälig unendlich benachbart zu t werden lässt. Auf diese Weise ergiebt sich durch dualistische Uebersetzung der vorigen Betrachtung, wenn t und i die Anzahl der Doppel- resp. Inflexionstangenten bezeichnen:

$$n = m(m-1) - 2t - 3i.$$

II. Auf den Raum übertragen, führt das Verfahren zu einigen der bekannten Formeln in Bezug auf eine Fläche n^{ter} Ordnung. Soll die *Ordnungszahl* des Berührungskegels von einem Punkt C aus bestimmt werden, so nimmt man diesen Punkt als Mittelpunkt einer

centrischen räumlichen Collineation, eine beliebige Ebene γ als Collineationsebene derselben und ordnet einem Punkt P der Fläche einen unendlich benachbarten P' auf dem Strahl CP als entsprechenden zu. Die Berührungscurve des Kegels ergiebt sich dann als Durchdringungscurve der beiden Flächen. Letztere werden aber von der Collineationsebene in derselben Curve n^{ter} Ordnung $\mathfrak{C}$ geschnitten, deren Punkte nicht die genannte Bedeutung haben, da sie bei der Transformation keine Verschiebung erleiden. Von der Gesammtdurchdringungscurve bleibt also als eigentliche Berührungscurve noch eine Raumcurve $\mathfrak{C}$ von der Ordnung $n(n-1)$ übrig und der Berührungskegel ist somit ebenfalls von der Ordnung $n(n-1)$.

Um die *Classenzahl* der Fläche zu bestimmen, wiederhole man das Vorige für ein zweites Centrum C_1 und eine beliebige zweite Collineationsebene γ_1. Dadurch erhält man auf der Fläche eine zweite Durchdringungscurve von der Ordnung n^2, die wieder in eine ebene Curve n^{ter} Ordnung $\mathfrak{C}_1$ und eine Raumcurve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{C}_1$ zerfällt. Die n^3 Schnittpunkte der 3 in Betracht kommenden Flächen liefern offenbar die Berührungspunkte der Tangentialebenen, welche man durch die Gerade $C\,C_1$ an die Fläche legen kann. Als der Aufgabe fremd sind von diesen Punkten abzurechnen die $n(n-1)$ Punkte, in welchen die Curve $\mathfrak{C}$ von der Curve $\mathfrak{C}_1$, die $n(n-1)$ Punkte, in welchen die Curve $\mathfrak{C}_1$ von der Curve $\mathfrak{C}$ und endlich die n Punkte, in welchen die Fläche von der Schnittlinie beider Collineationsebenen oder die Curve $\mathfrak{C}$ von der Curve $\mathfrak{C}_1$ geschnitten wird. Die Classenzahl der Fläche wird hiernach:

$$= n^3 - 2n(n-1) - n,$$

d. h.

$$= n(n-1)^2.$$

Dieselbe Methode lässt uns auch die Anzahl der *Haupttangenten* der Fläche bestimmen, welche durch einen beliebigen Punkt C gehen. Zu diesem Zweck transformire man die Fläche F durch zwei räumliche Collineationen, welche beide den Punkt C zum Centrum, dagegen zwei beliebige Ebenen γ, γ_1 als Collineationsebenen haben. Man lasse ferner, um die beiden collinearen Beziehungen vollständig zu bestimmen, dem Punkt P zwei Punkte P', P_1' entsprechen, die auf dem Strahl CP etwa zu beiden Seiten von P und unendlich benachbart zu demselben liegen, wodurch aus der gegebenen Fläche zwei neue Flächen n^{ter} Ordnung F', F_1' abgeleitet werden. Die gesuchten Berührungspunkte von Haupttangenten durch C müssen offenbar gemeinsame Punkte dieser drei Flächen sein.

Die Frage, wie viele der n^3 Punkte als der Aufgabe fremd abzurechnen sind, erfordert hier eine nähere Untersuchung. Soll ein solcher Schnittpunkt P zu einer der gesuchten Haupttangenten gehören,

so muss er nothwendig mit seinen beiden entsprechenden Punkten P', P_1' eine Gruppe von drei *verschiedenen* Punkten repräsentiren. Fallen dagegen zwei oder gar alle drei Punkte der Gruppe zusammen, so kann der Punkt keine Lösung der Aufgabe enthalten. Indem wir wieder die vorhin benützte Bezeichnung für die auf F liegenden Curven anwenden, ergeben sich folgende Punkte, die von der Gesammtheit der Schnittpunkte abzurechnen sind:

1) P fällt mit P' zusammen; dies sind die Punkte auf $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten.
2) P fällt mit P_1' zusammen; dies sind die Punkte auf $\mathfrak{C}_1$. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}$ schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten.
3) P' fällt mit P_1' zusammen. Die Systeme der P' und P_1' sind zu einander ebenfalls collinear und zwar centrisch mit dem Centrum C. Die Collineationsebene γ' für diese neue collineare Beziehung geht durch die Schnittlinie der beiden andern Collineationsebenen γ, γ_1 hindurch und enthält alle sich selbst entsprechenden Punkte P' P_1'. Die beiden Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ liegen also auf. F so, dass sie von der Ebene γ' in denselben $n(n-1)$ Punkten geschnitten werden. Das Auftreten dieser Punkte hängt wesentlich damit zusammen, dass die beiden Collineationen dasselbe Centrum haben, während vorhin bei der Bestimmung der Classenzahl zwei verschiedene Centren angenommen werden mussten. Die drei Flächen haben einen gemeinschaftlichen Berührungskegel. Je zwei derselben schneiden sich in einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung, auf welcher $n(n-1)$ Schnittpunkte von zweien der drei Raumcurven $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.
4) P, P' und P_1' fallen zusammen; dies sind die n Punkte, in welchen sich die drei ebenen Curven schneiden oder in welchen die Fläche von der Schnittlinie der Collineationsebenen getroffen wird.

Hiernach ist nun die Anzahl der Haupttangenten der Fläche, die durch einen beliebigen Punkt gehen:

$$= n^3 - 3n(n-1) - n,$$

d. h.

$$= n(n-1)(n-2).$$

Wir unterlassen die Durchführung der dualistisch entsprechenden Aufgabe für die allgemeine Fläche m^{ter} Classe, wodurch wir auf die Anzahl der Inflexionstangenten des ebenen Schnittes geführt würden. Dagegen möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die vorhin behandelte Frage nach den Haupttangenten, so sehr sie eine rein theoretische zu sein scheint, in der darstellenden Geometrie grosses praktisches Interesse gewinnt.

Wenn C als leuchtender Punkt gedacht wird und der Eigenschatten und ebene Schlagschatten der Fläche construirt werden soll, so wird ersterer als Berührungscurve $\mathfrak{B}$, letzterer als ebene Spur $\mathfrak{S}$ des Berührungskegels von C aus gefunden. Gleichzeitig tritt aber noch eine andere Curve $\mathfrak{D}$ auf, nämlich die Grenzlinie des Schlagschattens, welchen die Fläche auf sich selbst wirft und welche die Durchdringungscurve der Fläche mit ihrem Berührungskegel ist. Die Punkte, welche den beiden Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ gemeinschaftlich sind, haben offenbar die Eigenschaft, dass die nach ihnen hingehenden Lichtstrahlen drei unendlich benachbarte Punkte mit der Fläche gemein haben, also Haupttangenten sind. Andererseits sieht man sofort ein, dass in jedem solchen Punkt die beiden Curven den Lichtstrahl zur gemeinschaftlichen Tangente haben müssen. Denn seien $P_1 P_2 P_3$ die drei unendlich benachbarten Punkte, so muss der Lichtstrahl eine Tangente von $\mathfrak{B}$ sein, weil die Combination $P_1 P_2$ einen Punkt und die Combination $P_2 P_3$ einen zweiten auf dem Lichtstrahl unendlich benachbart liegenden Punkt von $\mathfrak{B}$ repräsentirt; ebenso aber stellen die drei Punkte, je nachdem man $P_1 P_2$ als Berührungspunkt und P_3 als weitern Schnittpunkt oder $P_2 P_3$ als Berührungspunkt und P_1 als weitern Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Fläche annimmt, zwei unendlich benachbarte Punkte von $\mathfrak{D}$ dar. Die beiden Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ haben also die Eigenschaft, dass man an sie von C aus Tangenten ziehen kann. Daraus folgt weiter, dass diese Tangenten stationäre Erzeugende des Berührungskegels sein müssen und endlich, dass der Schlagschatten einer Fläche im Allgemeinen Rückkehrpunkte besitze.

Allerdings treten diese Rückkehrpunkte, auch wenn sie reell sind, nie sichtbar auf, da sie ihrer Entstehung nach immer in das Innere des Schlagschattens fallen müssen. Schon wesentlich deutlicher dagegen kommen sie zum Vorschein bei der Aufgabe des Umrisses einer Fläche; hier kann der Rückkehrpunkt und einer der in ihm zusammenstossenden Curvenäste sichtbar werden.

Wenn auch bei diesen praktischen Aufgaben der darstellenden Geometrie schon in den ältern französischen Werken (Leroy, de la Gournerie) und neuerdings in dem Fiedler'schen Werke auf die betreffende theoretische Frage hingewiesen worden ist, so möchte doch dieser Beitrag nicht ganz ohne Interesse sein.

Riga, im Mai 1878.

Ueber rationale Functionen von n Elementen und die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von Julius König in Budapest.

Die Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie von Galois sowohl in ihren allgemeinsten Sätzen, wie in ihren wichtigsten Anwendungen entwickelt wurde, ist ihrem Wesen nach eine Theorie der rationalen Functionen, die sich aus den n Wurzeln der Gleichung bilden lassen. Diese Functionen nehmen bekanntlich eine gewisse Zahl von verschiedenen Werthen an, wenn man in denselben die Wurzeln beliebigen Permutationen unterwirft. Die hiebei auftretende Zahl von Werthen ist jedoch gewissen Bedingungen unterworfen, und schon die Abel'schen Untersuchungen zeigen, dass die hiebei auftretenden Verhältnisse im innigsten Zusammenhange stehen mit dem zweiten Probleme, die gegebene Gleichung durch Adjunction einer oder mehrerer Hülfsgleichungen aufzulösen. In der That finden beide Probleme ihre Erledigung aus einer gemeinschaftlichen Quelle, die zugleich — wie ich durch folgende Arbeit nachzuweisen hoffe — den natürlichsten Ausgangspunkt für diese Reihe von Untersuchungen bildet. Bei der Wichtigkeit derselben glaube ich recht gethan zu haben, wenn ich statt fragmentarischer Noten eine zusammenhängende Darstellung gegeben habe, in der ich nur einige Sätze aus der Theorie der Substitutionen voraussetze. Dass wenige Seiten trotz dieser Ausführlichkeit genügen, um alle Fundamentalsätze abzuleiten, darf wohl als weitere Rechtfertigung angeführt werden.

Das zur Anwendung kommende Princip ist folgendes: Sei eine gewisse Gruppe von Substitutionen der Elemente $x_1, \ldots x_n$ gegeben, V eine bestimmte Function dieser Elemente, die für die in der Gruppe enthaltenen Substitutionen die r Werthe $V_1, V_2, \ldots V_r$ annimmt. Wendet man nun auf diese r Functionen irgend eine Substitution der Gruppe an, so erhält man im Allgemeinen wieder irgend eine Permutation der V. D. h. der x Substitution entspricht eine bestimmte V-Substitution, und zwar so, dass dem Product zweier x-Substitutionen das Product der entsprechenden V-Substitutionen entspricht. Die beiden

Substitutionsgruppen sind isomorph, eine Bemerkung, die übrigens auf Neuheit keinen Anspruch macht; sie findet sich auch in Jordan's bekanntem Werke, ohne dass jedoch dort aus derselben wesentliche Folgerungen gezogen würden.

Was jedoch diese der gegebenen Gruppe isomorphe, und daher in ihren wichtigsten Eigenschaften bestimmte Gruppe so wichtig macht, ist, dass sie zugleich die Gruppe jener Gleichung r^{ten} Grades ist, als deren Wurzeln die Werthe der Function V angesehen werden können. Da eine weitere einleitende Auseinandersetzung der Methode bei der eigenartigen Natur dieser Untersuchungen kaum ihren Zweck erfüllen könnte, beschränke ich mich auf eine einfache Inhaltsangabe.

Nach einer kurzen Darstellung der auf isomorphe Substitutionsgruppen bezüglichen Fundamentalsätze (1), ergiebt sich als unmittelbare Folgerung der vielfach behandelte, von Bertrand allgemein bewiesene Satz, dass eine Function von n Elementen, die weniger als n Werthe besitzt, deren höchstens 2 haben kann (2). Ich gehe dann näher auf den Fall ein, wo die Anzahl der Werthe genau gleich n ist. Dies ist dann nichts anderes als die directe Untersuchung der Verhältnisse, die zwischen den zwei allgemeinsten Substitutionsgruppen von je n Elementen auftreten, wenn die Gruppen isomorph sind. Und die hierhergehörigen Fragen werden dadurch vollständig erledigt, dass man die irgend einer Substitution entsprechende in der isomorphen Gruppe wirklich bestimmt, wodurch wieder auch der hieher gehörige Bertrand'sche Satz bewiesen ist.

Die nächsten 3 Abschnitte geben auf Grundlage des oben erwähnten Princips die Theorie der Auflösung einer algebraischen Gleichung durch Adjunction von Irrationalen, und damit — in ausserordentlich einfacher Weise — die ganze Reihe der Galois'schen Sätze.

Mit dieser Darstellung der Fundamentaltheoreme schliesse ich diese Arbeit ab, hoffe jedoch, weitere Anwendungen, hier anknüpfend, später behandeln zu dürfen.

---

1. Isomorphe Substitutionen.

Sei V eine rationale Function der n Elemente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, und

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_r \tag{1}$$

die vollständige Reihe der verschiedenen Werthe, welche diese Function für die sämmtlichen Permutationen der x annimmt; die Anzahl dieser Werthe also gleich r. Wenden wir auf diese Reihe eine beliebige Substitution

$$s = (x_\alpha, x_\beta, \ldots)\ (x_{\alpha'}, x_{\beta'}, \ldots) \ldots$$

an, und bezeichnen das Resultat mit

(2) $$sV_1, sV_2, \ldots, sV_r$$

so muss diese Reihe, von der Anordnung abgesehen, mit (1) übereinstimmen. Da die Reihe der V-Werthe in (1) vollständig ist, so kann (2) keinen neuen Werth enthalten; es enthält aber auch die sämmtlichen aus (1), denn es können unter denselben keine gleichen vorkommen; aus

$$sV_i = sV_j$$

würde nämlich durch Anwendung der Substitution s^{-1} im Widerspruch mit der Annahme

$$V_i = V_j$$

folgen. Der Substitution s, die aus den Elementen x gebildet ist, entspricht daher eine bestimmte Substitution σ, als deren Elemente die V betrachtet werden können, ausführlicher geschrieben die folgende:

$$\begin{pmatrix} V_1, & V_2, & \ldots, & V_r \\ sV_1, & sV_2, & \ldots, & sV_r \end{pmatrix}.$$

Sei nun s' eine zweite Substitution der x, σ' die entsprechende der V; dann entspricht der Folge oder dem Product ss' das ähnlich gebildete $\sigma\sigma'$; und der Substitutionsgruppe g, die aus den Substitutionen $s, s', s'', \ldots$ zusammengesetzt ist, wieder eine Gruppe γ, die sich ebenso aus $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ zusammensetzt; denn mit den s_i und s_j entsprechenden σ_i und σ_j ist natürlich die $s_i s_j$ entsprechende Substitution $\sigma_i \sigma_j$ gegeben.

Die Substitutionsgruppen g und γ werden wegen dieses Verhaltens als *isomorph* bezeichnet. (S. Camille Jordan, Traité des substitutions p. 56.) Nun kann umgekehrt jeder Substitution σ entweder nur die eine s, oder allgemeiner $s_1, s_2, \ldots s_m$ entsprechen. Im ersteren Falle ist der Isomorphismus ein holoëdrischer, im zweiten ein meriëdrischer und es möge die Zahl m als Grad der Meriedrie bezeichnet werden.

Die auf isomorphe Gruppen bezüglichen Sätze sind, soweit sie für das Folgende benützt werden sollen, so einfach und rasch ableitbar, dass ich ihre Begründung des leichteren Zusammenhangs wegen hier einschiebe.

Jeder Substitution σ entspricht dieselbe Anzahl von Substitutionen s; d. h. die Zahl m ist constant. Denn seien $h_1, h_2, \ldots h_m$ diejenigen Substitutionen, die der identischen Substitution 1 der Elemente V entsprechen, wo also auch ein h die identische Substitution 1 bedeutet, s irgend eine σ entsprechende; dann entsprechen

$$sh_1, sh_2, \ldots, sh_m,$$

unter denen sich auch s befindet, sämmtlich der einen Substitution σ. Sind umgekehrt $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sämmtliche Substitutionen, denen σ ent-

spricht, so muss auch s_1^{-1} der Substitution σ^{-1} entsprechen; also auch die Reihe von m Substitionen

$$s_1 s_1^{-1},\ s_2 s_1^{-1}, \ldots, s_m s_1^{-1}$$

der Substitution $\sigma\sigma^{-1} = 1$. Daraus schliesst man aber in der That, dass die Zahl der s immer gleich der Zahl h ist.

Die Substitutionen h bilden weiter, wie man unmittelbar sieht, *eine Gruppe, die in der allgemeineren g enthalten ist.*

Diese Gruppe besitzt besondere Eigenschaften. Bezeichnet man nämlich wieder mit s eine beliebige Substitution der Gruppe g, so entspricht der Substitution $s^{-1}h_i s$ in der Gruppe γ die Substitution $\sigma^{-1}\sigma = 1$; es muss also $s^{-1}h_i s$, wie immer s gewählt sei, der Gruppe der h angehören. Es ist bekanntlich $s^{-1}h_i s$ eine h ähnliche Substitution, die erhalten wird, wenn man innerhalb der Cyklen von h die durch s^{-1} gegebene Vertauschung der Elemente ausführt. Wenn der Isomorphismus ein meriedrischer ist, also $m > 1$, kann die Gruppe h nicht aus der einen identischen Substitution bestehen; es giebt dann also eine Gruppe h, die in g enthalten ist, und die als solche mit allen Substitutionen von g *vertauschbar* ist, d. h. man hat

$$h_i s = s h_j,$$

wie aus

$$s^{-1} h_i s = h_j$$

unmittelbar ersichtlich. Die Gruppe g wird, wenn sie diese Eigenschaft besitzt, bekanntlich als *zusammengesetzte* Gruppe bezeichnet.

Ist g die allgemeinste Gruppe der $n!$ Substitutionen für die x, so kann $s^{-1}hs$, da s ganz beliebig gewählt wird, jede Substitution ergeben, die h ähnlich. Die Gruppe h enthält also sämmtliche Substitutionen, die einer bestimmten ähnlich sind. Diese Gruppe ist aber entweder die allgemeinste, die für n Elemente möglich ist, oder die aus $\frac{n!}{2}$ Substitutionen bestehende alternirende Gruppe, je nachdem die Substitution h aus einer ungeraden oder geraden Zahl von Transpositionen besteht, ein Satz, der nur dann eine Ausnahme erleidet, wenn $n = 4$ ist. (Siehe z. B. Jordan, l. c. art. 81.)

2. Functionen von n Elementen mit weniger als n Werthen.

Mit Hülfe der vorausgeschickten Sätze aus der Theorie der Substitutionen können wir nun auf den eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit übergehn. Sei wieder V eine Function der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ und

$$V_1, V_2, \ldots, V_r$$

die vollständige Reihe der Werthe, die sie für alle Substitutionen der x annimmt. Sei ferner

$$r < n,$$

d. h. die Anzahl der verschiedenen Werthe der Function kleiner als die Anzahl der Elemente, welche in sie eingehn. Dann ist die Gruppe γ der aus den V in der früher erörterten Weise gebildeten Substitutionen isomorph mit der aus den x gebildeten allgemeinsten Gruppe. Der Isomorphismus muss aber ein meriedrischer sein, denn es ist der speciellen Annahme nach $r! < n!$; also die Zahl der sämmtlichen V-Substitutionen kleiner als die der x-Substitutionen. Und hieraus folgt unmittelbar, dass nicht allen Substitutionen s verschiedene σ entsprechen können.

Da aber die Gruppe der x-Substitutionen die allgemeinste ist, so muss die Gruppe der der identischen V-Substitution entsprechenden h, nach dem Vorhergehenden, entweder wieder die allgemeinste oder die alternirende Gruppe sein. D. h. der Grad der Meriedrie ist entweder $n!$ oder $\frac{n!}{2}$.

Im ersten Falle entsprechen $n!$ d. h. alle x-Substitionen der identischen V-Substitution, d. h. keine Substitution ändert den Werth des V; V ist eine symmetrische Function und hat nur *einen* Werth.

Im zweiten Falle ändert die Hälfte der sämmtlichen Substitutionen den V-Werth, von dem wir ausgegangen, überhaupt nicht; die andere Hälfte der Substitutionen entspricht derselben V-Substitution, bei der aus V, V' werden mag. Dies sind aber die sämmtlichen Aenderungen die die allgemeinste Substitutionsgruppe an V hervorbringt. Es muss also, wenn $r < n$ ist, r gleich 1 oder 2 werden. Oder wir haben den Satz:

Eine Function von n Elementen, die bei beliebiger Vertauschung der Elemente weniger als n Werthe annimmt, kann nur 1 *oder* 2 *Werthe besitzen.* Auch hier bildet der Fall $n = 4$ natürlich eine Ausnahme, für den $x_1x_2 + x_3x_4$ eine dreiwerthige Function der vier Elemente ist.

3. Functionen von n Elementen mit n Werthen.

Wir nehmen zweitens an, dass die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche V annimmt, r, genau gleich n sei. Dann können unter den sämmtlichen x-Substitutionen entsprechenden V-Substitutionen gleiche oder auch nur verschiedene sein; die Ordnung der aus den V-Elementen gebildeten Gruppe ist gleich, oder kleiner als $n!$. Der Isomorphismus der Gruppen g und γ könnte also jetzt ein holoëdrischer oder meriedrischer sein. Das letztere ist aber unmöglich; denn wir würden auf den früheren Fall zurückgeführt werden, und die Anzahl der V-Werthe könnte nicht n sein. —

Der Zusammenhang muss also ein holoëdrischer sein. Nicht nur

jeder x-Substitution entspricht eine bestimmte V-Substitution, sondern auch umgekehrt; auch die Gruppe der V-Substitutionen ist die allgemeinste.

Aus dieser allgemeinsten Gruppe können wir eine in ihr enthaltene speciellere absondern, die das Element V_1 nicht versetzt. Dieselbe ist die allgemeinste Gruppe der Substitutionen von $n-1$ Elementen: $V_2, V_3, \ldots, V_n$. Die entsprechenden x-Substitutionen bilden dann auch eine Gruppe, in welcher die Zahl der Substitutionen ebenfalls $(n-1)!$ ist. Wir werden nachweisen, dass, wenn nicht $n=6$, diese die allgemeinste Gruppe zwischen $n-1$ der Elemente x ist, d. i. diejenige, welche alle Substitutionen enthält, die ein bestimmtes x_a nicht versetzen. Damit aber ist auch der Satz gewonnen:

Eine Function von n Elementen, die genau n Werthe annimmt, ist symmetrisch in Bezug auf $n-1$ Elemente. Nur der Fall $n=6$ bildet eine Ausnahme.

Um den oben angeführten Satz zu beweisen, wollen wir den Zusammenhang zwischen den zwei allgemeinsten Gruppen, die aus je n Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $V_1, V_2, \ldots, V_n$ entstehen, näher untersuchen, unter der Voraussetzung, dass ihr Isomorphismus ein holoëdrischer sei; dass also der identischen Substitution in der einen Gruppe nur wieder die identische der andern entspreche. Um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten, wollen wir für das Entsprechen zweier Substitutionen das Zeichen $\equiv$ einführen; hienach sagt

$$s \equiv \sigma,$$

dass der Substitution s der x-Elemente die Substitution σ der V entspricht.

Dann müssen *entsprechende Substitutionen* von *gleicher Ordnung* sein. Denn aus

$$s^k = 1$$

folgt wegen

$$s^k \equiv \sigma^k$$

auch

$$\sigma^k = 1,$$

und umgekehrt. Ferner sieht man, dass *ähnlichen Substitutionen auch ähnliche entsprechen* müssen. Denn jede Substitution, die gleichviel Cyklen mit s, und in den Cyklen gleichviel Buchstaben hat, ist durch $t^{-1}st$ darstellbar, und ihre entsprechende ist demnach $t^{-1}\sigma\tau$, eine σ ähnliche Substitution. Sei nun T eine beliebige Transposition (x_1, x_2), dann muss

$$T \equiv (V_a V_b)(V_c V_d)(V_e V_f)\ldots$$

sein, denn es muss auch die entsprechende Substitution von der zweiten Ordnung sein, kann also in keinem Cyklus mehr als zwei Elemente enthalten. Dann ist aber auch in

$$T' \equiv (V_a V_c)(V_b V_d)(V_e V_f)\ldots,$$

wo die nicht angeschriebenen Transpositionen unverändert gedacht werden, T' eine Transposition; denn da die V-Substitutionen ähnlich sind, ist auch:

$$T' = M^{-1} T M.$$

Dann hat man aber

$$(1) \qquad TT' \equiv (V_a V_d)(V_b V_c).$$

Hieraus folgt, dass T und T' kein gemeinschaftliches Element haben können. Wären beide Elemente gemeinschaftlich, so hätte man $TT' \equiv 1$, es müsste also in den V die identische Substitution entsprechen, was nicht der Fall ist; wäre eines gemeinsam, z. B.

$$T = (x_1, x_2), \quad T' = (x_1, x_3),$$

so würde

$$TT' = (x_1, x_3, x_2)$$

eine Substitution 3ter Ordnung sein, was nicht möglich, weil die entsprechende V-Substitution von der zweiten Ordnung ist. Hieraus ersieht man aber, dass *jedem Product zweier Transpositionen, die kein gemeinschaftliches Element besitzen, immer ein ähnlich gebildetes Product entspricht*, da man wie früher zu jeder ähnlichen Substitution übergehen kann.

Wir untersuchen nun die einer einzelnen Transposition entsprechende Substitution. Es ist jedenfalls, wie früher,

$$T \equiv (V_a V_b)(V_c V_d)(V_e V_f)(V_g V_h)\ldots,$$

und für eine gewisse zweite Transposition T', indem man wieder den Uebergang zu ähnlichen Substitutionen anwendet,

$$T' \equiv (V_a V_c)(V_b V_d)(V_e V_g)(V_f V_h)\ldots$$

Hieraus folgt aber

$$TT' \equiv (V_a V_d)(V_b V_c)(V_e V_h)(V_f V_g).$$

Hier kann T und T' kein gemeinschaftliches Element besitzen, sonst wäre TT' entweder 1 oder von der dritten Ordnung; die entsprechende Substitution zeigt, dass keiner dieser Fälle möglich ist. Nun ist aber TT' ein Product, das dem vorher ausgesprochenen Satze genügt, kann also nicht einem Product von 4 Transpositionen entsprechen. Diese Schlussfolgerung können wir aber immer ziehen, wenn die T entsprechende V-Substitution mehr als drei Transpositionen enthält.

Demnach muss einer Transposition entweder wieder eine Transposition oder ein Product von drei Transpositionen entsprechen; der Fall zweier Transpositionen ist schon nach dem Vorhergehenden ausgeschlossen, denn dann müsste auch jedem Producte zweier Transpositionen aus verschiedenen V-Elementen eine Transposition entsprechen, während wir wissen, dass diese immer ein Product zweier Transpositionen ist.

Nehmen wir von den möglichen Fällen zuerst den zweiten:

$$T \equiv (V_a V_b)(V_c V_d)(V_e V_f).$$

Dann entspricht *jeder* Transposition ein solches Product, und umgekehrt *jedem* solchen Product eine Transposition. Die Anzahl aller Transpositionen muss der Anzahl aller solchen Producte gleich sein; d. h. es muss, da die Zahl der Elemente in beiden Fällen n ist,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}$$

sein, eine Gleichung, von der man, wenn sie auf die Form

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)-24}{24}=0$$

gebracht wird, augenblicklich sieht, dass ihr nur eine positive ganze Zahl — mit Ausnahme der irrelevanten Lösungen 0 und 1 —

$$n = 6$$

genügt. *Wenn also nicht* $n = 6$ *ist*, muss demnach immer

(2) $$T \equiv (V_a,\ V_b)$$

sein, d. h. *einer Transposition der* x *entspricht eine Transposition der* V.

Wir wollen nun von einer bestimmten Transposition:

$$(x_1,\ x_2) \equiv (V_a,\ V_b)$$

ausgehn; sei ferner

$$(x_1,\ x_3) \equiv (V_m,\ V_c),$$

dann muss m oder c mit einem der Indices a oder b übereinstimmen. Sonst würde dem Product

$$(x_1, x_2)(x_1, x_3) \equiv (x_1, x_3, x_2),$$

das eine Substitution 3ter Ordnung darstellt, eine solche 2ter Ordnung oder die identische Substitution entsprechen, was nicht möglich. Sei das gemeinschaftliche Element, welches also dem gemeinschaftlichen x_1 entspricht, V_a, dann ist

(3) $$(x_1 x_2) \equiv (V_a V_b), \quad (x_1 x_2) \equiv (V_a V_c);$$

hieraus folgt

$$(x_1, x_2)(x_1, x_3)(x_1, x_2) \equiv (V_a V_b)(V_a V_c)(V_a V_b),$$

also auch:

(4) $$(x_2, x_3) \equiv (V_b V_c).$$

Wir gehn nun dazu über, die (x_1, x_4) entsprechende Substitution zu bestimmen. Es muss dann, wenn man die vorigen Schlüsse wiederholt,

$$(x_1, x_4) \equiv (V_a,\ V_d) \text{ oder } (x_1, x_4) \equiv V_b,\ V_d)$$

sein. Wäre das letztere richtig, so müsste auch

$$(x_1 x_4)(x_1 x_2) = (x_1 x_2 x_4) \equiv (V_b V_d)(V_a V_c)$$

sein, also einer Substitution dritter Ordnung eine solche zweiter Ordnung entsprechen, was nicht möglich ist. Man hat also:

(5) $$(x_1 x_4) \equiv (V_a V_d).$$

Hieraus schliesst man aber, wie früher,

(6) $$(x_2 x_4) \equiv (V_b V_d), \quad (x_3 x_4) \equiv (V_c V_d).$$

Ebenso kann man die ein fünftes Element enthaltenden Transpositionen in die Untersuchung hineinziehen. Man schliesst also ganz allgemein, dass die einer beliebigen Transposition, also auch einer aus diesen zusammengesetzten beliebigen Substitution entsprechende Substitution erhalten wird, indem man die Elemente

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

der Reihe nach mit

$$V_a, V_b, \ldots, V_p$$

vertauscht, wo die $V_a, V_b, \ldots,$ von der Anordnung abgesehen, mit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ übereinstimmen.

Stehen also zwei allgemeinste Gruppen von n Elementen in der Beziehung des holoedrischen Isomorphismus zu einander, so erhält man die entsprechenden Substitutionen dadurch, dass man die beiden Reihen der Elemente eindeutig auf einander bezieht, und die entsprechenden vertauscht.

Daraus ersieht man aber, dass die Substitutionen, welche ein x-Element nicht vertauschen, jenen Substitutionen entsprechen, die ein bestimmtes V nicht verändern, was in der That den oben ausgesprochenen Satz für eine n-werthige Function ergiebt.

Der Ausnahmefall $n = 6$ zeigt, dass es eine aus 6 Elementen gebildete Gruppe von 120 Substitutionen giebt, die nicht aus allen Vertauschungen von 5 Elementen besteht. Die Substitutionen dieser Gruppe sind nach dem Vorstehenden bekannt. Sie besteht aus allen Substitutionen, die sich aus bestimmten Producten von je 3 Transpositionen zusammensetzen lassen.

4. Allgemeine Sätze über algebraische Gleichungen.

Sei $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich als ungleich vorausgesetzt werden. Dann giebt es bekanntlich eine Gruppe von Substitutionen der Elemente x, die so beschaffen ist, dass jede Function der Wurzeln, die rational durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden können, diese Substitutionen zulässt und umgekehrt. Diese der Gleichung zugehörige Substitutionsgruppe ist die allgemeinste, wenn wir auch die Gleichung ganz allgemein voraussetzen; es wird eine speciellere, wenn für die Gleichung gewisse einschränkende Bestimmungen getroffen werden. Ich will zuerst den Zusammenhang zwischen Reductibilität der Gleichung und

Transitivität der Gruppe kurz resumiren. Soll die Gleichung $f(x)=0$ reductibel werden, d. h. soll

(1) $$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)$$

ein rationaler Divisor des Gleichungspolynoms sein, so darf die zugehörige Gruppe keine Substitution enthalten, die x_1 mit x_{r+1} vertauscht. Wäre eine solche Substitution vorhanden, so erhielte man aus dem vorstehenden Ausdruck durch diese Substitution den folgenden:

$$(x-x_{r+1})(x-x_a)\ldots(x-x_k),$$

der keinesfalls dem Vorhergehenden gleich sein kann, da er den neuen Factor $(x-x_{r+1})$ enthält. Der Ausdruck (1) ändert seinen Werth, kann also nicht rational sein. Dieser Schluss lässt sich auch umkehren. Enthält die Gruppe der Gleichung nur Substitutionen, die x_1 mit $x_2, \ldots, x_r$ vertauschen, so bleibt (1) unverändert, ist also rational.

Die Gruppe einer irreductibeln Gleichung gestattet ein beliebiges Element x_1 mit jedem andern zu vertauschen, sie ist also nach dem für diese Eigenschaft gebräuchlichen Ausdruck *transitiv*; dies ist nicht der Fall bei einer reductibeln Gleichung, ihre Gruppe ist *intransitiv*. Dieses Kriterium der Reductibilität lässt sich noch in eine für den Gebrauch bequemere Form bringen, wenn der Grad der Gleichung p eine Primzahl ist. Es ist dies die folgende:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Gleichung vom Primzahlgrade p irreductibel sei, ist, dass die Ordnungszahl ihrer Gruppe p als Theiler enthalte.

Sei zuerst die Gruppe intransitiv; dann kann sie keine Substitution p^{ter} Ordnung enthalten. Da p eine Primzahl, wäre dies eine cyklische Substitution p^{ter} Ordnung, und ihre verschiedenen Potenzen würden es im Gegensatz zur Annahme gestatten, x_1 mit einem beliebigen Elemente zu vertauschen. Eine Gruppe, deren Ordnungszahl durch p theilbar ist, muss aber eine Substitution p^{ter} Ordnung enthalten. Für den Fall einer reductibeln Gleichung, also intransitiven Gruppe, kann daher deren Ordnungszahl nicht durch p theilbar sein.

Ist aber eine Gruppe von p Elementen einmal transitiv, so muss ihre Ordnungszahl ohne Rücksicht auf den Primzahlcharakter des p durch p theilbar sein (Jordan, l. c. Art. 44. Cor. I.); womit der obige Satz vollständig bewiesen ist.

Ist die Gruppe einer Gleichung bekannt, so kann nach dem Vorhergehenden ein irreductibler Factor und die zugehörige Gruppe leicht ausgeschieden werden; wir setzen also im Folgenden die zu behandelnde Gleichung als irreductibel voraus.

Sei nun $f(x)=0$ diese Gleichung, deren Gruppe G aus den Substitutionen $g_1, g_2, \ldots, g_r$ besteht; dann kann man bekanntlich immer eine Function der Wurzeln:

$$V_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

bestimmen, die für jede dieser Substitutionen einen von den früheren verschiedenen Werth annimmt. Sei die Reihe dieser Werthe:

$$V_1, V_2, \ldots, V_r.$$

Dann entspricht wieder jeder Substitution von G eine Substitution in den V-Elementen; und man erhält wie früher eine der Gruppe G isomorphe Gruppe Γ aus den V, die, wie man sieht, die Eigenschaft besitzt, dass ihr *Grad*, die Zahl der Elemente, und ihre *Ordnung*, die Zahl ihrer Substitutionen, *beide gleich r sind*.

Man kann nun weiter die Gleichung r^{ten} Grades

$$F(V) \equiv (V - V_1)(V - V_2) \ldots (V - V_r)$$

bilden, deren Coefficienten als symmetrische Functionen der $V_1, \ldots, V_r$ sich bei keiner Substitution g ändern können, also rational sind.

Die Gruppe dieser V-Gleichung ist Γ, die der ursprünglichen Gleichungsgruppe G isomorphe Gruppe. Sei, um dies zu zeigen, R irgend eine Function der V, welche die Substitutionen Γ zulässt. Denken wir uns statt der V ihren Werth als Functionen der x hingeschrieben, so ist irgend eine Substitution γ gleichbedeutend mit der entsprechenden g; die Function ist rational ausdrückbar. Sei umgekehrt diese Eigenschaft vorausgesetzt; dann ändert sie sich nicht — als Function der x angesehn — für irgend eine Substitution g; da aber die x nur in den V-Combinationen vorkommen, ist diese gleichbedeutend mit der entsprechenden γ. Die Gruppe Γ besitzt also in der That die geforderten Eigenschaften.*)

Die Gleichung $F(V) = 0$ ist mit der Gleichung $f(x) = 0$ zugleich irreductibel. In der Gruppe Γ giebt es nämlich eine Substitution, die V_1 in V_i überführt. Denn die Reihe der V Werthe enthält alle V-Werthe, die durch die Anwendung irgend einer Substitution g auf V_1 entstehen und nur diese.

Die Auflösung der Gleichungen $f(x) = 0$ und $F(V) = 0$ sind völlig äquivalente Probleme. Mit den x sind natürlich die V bekannt, aber auch umgekehrt; denn die Anzahl der V muss wenigstens gleich n sein; die Gruppe G, die aus n Elementen gebildet und transitiv ist, hat eine durch n theilbare Ordnungszahl, und diese Ordnungszahl giebt eben die Anzahl der V. Die Bestimmung der x kann demnach aus einem System linearer Gleichungen geschehen.

Um die Gleichung $F(V) = 0$ aufzulösen, genügt es eine Wurzel derselben, V_1, zu bestimmen, denn jede andere kann bekanntlich als

---

*) Enthält V als Function der x irgend welche willkürlich eingeführte Irrationalitäten, so ist natürlich die Gruppe der V-Gleichung so zu verstehen, dass diese Grössen schon adjungirt wurden.

rationale Function dieser einen bestimmt werden. Um dies zu beweisen, genügt die Bemerkung, dass V_1 und z. B. V_2 dieselben Substitutionen aus der Gruppe G zulassen. Jede Substitution ändert nämlich nach den gemachten Voraussetzungen sowohl V_1, wie V_2; die Gruppe von Substitutionen, die irgend eine derselben ungeändert lassen, zieht sich jedesmal auf die Einheit oder identische Substitution zusammen. Sind aber V_2 und V_1 ähnliche Functionen, so lässt sich nach dem verallgemeinerten Lagrange'schen Satze (Jordan l. c. Art. 61) die eine als rationale Function der andern darstellen, und die Coefficienten dieser Darstellung sind unveränderlich für die Substitutionen von G, also auch rationale Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung.

Da nun jede Wurzel der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ eine lineare Function der V ist, jede dieser Grössen aber eine rationale Function von V_1 ist, so ist mit dem Vorigen auch der Galois'sche Satz bewiesen, dass *jede der Wurzeln x eine rationale Function von V_1 sein muss.*

Das Resultat der bisherigen Untersuchung mag noch in folgender Form ausgedrückt werden: *Die Gleichung $f(x) = 0$ ist vollständig aufgelöst, wenn man eine Wurzel der Gleichung $F(V) = 0$ kennt.*

Hieraus folgt, dass die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ nur durch *Adjunction* solcher Grössen erfolgen kann, die das Polynom der früher irreductiblen Gleichung $F(V) = 0$ in Factoren zu zerlegen gestattet. Ist dies nach Adjunction jener Grössen nicht der Fall, so ist das äquivalente Problem, *eine* Wurzel der irreductiblen Gleichung $F(V) = 0$ zu bestimmen, dasselbe geblieben. Gestattet hingegen die adjungirte Grösse einen Divisor von $F(V)$ so darzustellen, dass die Coefficienten rationale Functionen der ursprünglichen Coefficienten und der adjungirten Grösse sind, so brauchen wir uns nicht mehr mit $F(V)$, sondern nur mit diesem Divisor zu beschäftigen.

Daraus schliessen wir aber, dass *jede Grösse, deren Adjunction zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ beiträgt, eine rationale Function der Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ sein muss.*

Dem durch die Adjunction rational gewordenen Divisor entspreche die Gleichung

$$(V - V_1) \ldots . (V - V_\varrho) = 0;$$

dann kann als adjungirte Grösse irgend eine der symmetrischen Functionen von $V_1 \ldots V_\varrho$, also eine rationale Function der x betrachtet werden. Denn jede dieser Functionen lässt nur jene Substitutionen der Γ- oder G-Gruppe zu, welche die Grössen $V_1, \ldots, V_\varrho$ nur unter sich vertauschen. Jede andere Gleichheit von Werthen setzt, da die x gegebene Werthe sind, eine Relation unter den Coefficienten von $V_1 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ voraus, die bei der Bildung dieser Function vermieden werden konnte. Nach dem schon früher gebrauchten La-

grange'schen Satze sind die Coefficienten der neuen Gleichung rationale Functionen eines einzigen, und es muss also nur der Werth eines solchen adjungirt werden. Dieser ist aber eine rationale Function der x. — *Durch diese Adjunction reducirt sich aber auch die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ auf eine kleinere in ihr enthaltene. Diese Gruppe besteht aus denjenigen Substitutionen von G, die den Werth der adjungirten rationalen Function nicht ändern.* Da diese Function der x zugleich eine symmetrische Function von $V_1, \ldots, V_\varrho$ ist, so wird jede Function, welche diese Substitutionen zulässt, durch die V ausgedrückt, sich bei keiner Versetzung der Elemente $V_1, \ldots, V_\varrho$ ändern, also rational sein; während auch umgekehrt jede nach geschehener Adjunction rationale Function auch rational durch eine symmetrische Function von $V_1, \ldots, V_r$ ausgedrückt werden kann, also auch eine rationale Function der adjungirten Grösse ist und demnach sich für keine der betrachteten Substitutionen ändern kann. *Das Problem der Auflösung einer Gleichung ist demnach auch äquivalent der successiven Reduction ihrer Gruppe auf die eine identische Substitution.*

5. Adjunction der Wurzeln einer Hülfsgleichung.

Sei nun U_1 die rationale Function der Wurzeln, die wir der Gleichung $f(x) = 0$ adjungiren, und $U_1, U_2, \ldots, U_s$ die Werthe, die sie für die Substitutionen der der Gleichung zugehörigen Gruppe G annimmt. Dann genügt U einer Gleichung s^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten:

$$(U - U_1)(U - U_2) \ldots . (U - U_s) = 0,$$

denn die symmetrischen Functionen der U sind unveränderlich für die Substitutionen von G. Wir wollen nun nicht nur U_1, sondern *alle Wurzeln der Hülfsgleichung in U* der gegebenen Gleichung *adjungiren*. Dann reducirt sich die Gruppe der Gleichung auf jene Substitutionen, die keine der Grössen $U_1, U_2, \ldots, U_s$ ändern.

Sei nun $\mathfrak{G}$ die der G-Gruppe entsprechende isomorphe Gruppe, die — genau wie früher — die Gruppe der U-Gleichung sein muss und in welcher wieder der Substitution g die Substitution

$$\begin{pmatrix} U_1, & U_2, & \ldots, & U_s \\ g\,U_1, & g\,U_2, & \ldots, & g\,U_s \end{pmatrix}$$

entspricht. Dann verbleiben nur jene Substitutionen von G, die der identischen Substitution in $\mathfrak{G}$ entsprechen. *Sind nun G und $\mathfrak{G}$ holoedrisch isomorph*, so bleibt demnach auch von G nur die identische Substitution; alle Functionen der Wurzeln sind rational ausgedrückt, die Gleichung demnach in lineare Factoren zerfällt, also *vollständig aufgelöst.*

Im entgegengesetzten Falle *muss G eine zusammengesetzte Gruppe* sein. Bezeichne $H(h_1, h_2, \ldots, h_{\frac{\nu}{\sigma}})$ die Gruppe der der Einheit entsprechenden Substitutionen, und $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$ die Substitutionen, die, mit den H multiplicirt, alle Substitutionen von G geben, deren Zahl (die Ordnung von G) gleich ν sei. Dann ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich σ, und *die Adjunction der U-Gleichung reducirt die Gruppe G von ν auf $\frac{\nu}{\sigma}$ Substitutionen.*

Wenn V nun wieder eine Function ist, die für jede der Substitutionen G einen neuen Werth annimmt, so können wir für U eine symmetrische Function von

$$h_1 V, \; h_2 V, \; \ldots, \; h_{\frac{\nu}{\sigma}} V$$

wählen. Dieselbe ändert ihren Werth für keine der Substitutionen H, erhält aber einen neuen Werth für jede der Substitutionsreihen $g_1 H$, $g_2 H, \ldots, g_\sigma H$, nimmt also im Ganzen σ Werthe an und genügt demnach einer Gleichung σ^{ten} Grades. Irgend eine ihrer Werthereihen ist durch

$$g_1 U, \; g_2 U, \; \ldots, \; g_\sigma U$$

gegeben, und ändert sich in der That nicht für irgend eine Substitution h_1. Denn da die Gruppe h als solche mit allen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, hat man:

$$h_i g_k U = g_k h_j U = g_k U.$$

Hingegen ändert sich U für jede der Substitutionen g; denn dass

$$g_j U = U$$

sei, ist nach den für diese Function gemachten Annahmen unmöglich. *Die Ordnungszahl der Gruppe, — ν —,* wird also in diesem Falle *durch die Auflösung einer Gleichung σ^{ten} Grades auf $\frac{\nu}{\sigma}$ reducirt, und zwar hat die Gruppe der Hülfsgleichung eine Ordnungszahl, die ihrem Grade σ gleich ist.*

Dies ist der Fall, wenn die Gruppe der Gleichung zusammengesetzt ist. Ist die Gruppe einfach, so schmilzt die Zahl der Substitutionen H auf eine, die Einheit zusammen, es wird $\sigma = \nu$, und man sieht, dass die U-Gleichung mit der früher behandelten V-Gleichung zusammenfällt.

Man sieht auch, was für den Fall einer zusammengesetzten Gruppe aus dieser Gleichung wird. Dieselbe, ursprünglich vom ν^{ten} Grade, zerfällt durch die Adjunction einer Gleichung σ^{ten} Grades in Factoren vom Grade $\frac{\nu}{\sigma}$. *Es muss aber σ ein „Compositionsfactor" der Gruppe G sein.*

Ist die Gruppe der Gleichung einfach, so löst die U-Gleichung auch $f(x) = 0$ vollständig auf. Da aber auch die Gruppe dieser Gleichung von der Ordnung ν ist, und das Problem der Auflösung einer Gleichung gleichbedeutend mit der Reduction der Ordnungszahl, so ist die Aufgabe eigentlich nur durch eine äquivalente ersetzt. Da auch die Gruppe der U-Gleichung, wie aus der Definition des holoedrischen Isomorphismus hervorgeht, mit der ursprünglichen G zugleich einfach ist, ist auch an dieser eine Reduction des Problems in einzelne von niedrigerem Range unmöglich. *Ist übrigens in diesem Falle der Grad der Gleichung $f(x) = 0$ eine Primzahl p, so muss auch die U-Gleichung mindestens vom Grade p sein*, denn dann ist nach dem Früheren die Ordnungszahl der Gruppe G durch p theilbar, G enthält eine Substitution p^{ter} Ordnung. Die entsprechende Substitution muss in der holoedrisch-isomorphen Gruppe von der Einheit verschieden, und ähnlich, also auch von der p^{ten} Ordnung sein, demnach p Elemente versetzen. Das Hauptresultat dieser Untersuchung kann nun im folgenden Satze ausgesprochen werden:

Nur Gleichungen mit zusammengesetzter Gruppe gestatten eine Auflösung durch intermediäre Hülfsgleichungen.

Wenn nach Adjunction der Wurzeln der Hülfsgleichung die $f(x) = 0$ irreductibel geblieben ist, dann kann diese Adjunction nur als Vorbereitung zur Lösung gelten, es ist statt der ursprünglichen Gleichung eine solche von gleichem Grade, deren Gruppe aber von niedriger Ordnung ist, zu untersuchen. Ist diese Gruppe nicht mehr zusammengesetzt, so ist eine weitere Vereinfachung in der gesuchten Richtung nicht mehr möglich; die Gleichung ist nicht mehr auf andere zurückführbar. Im entgegengesetzten Falle wird die Gleichung $f(x) = 0$ schliesslich reductibel. Unter dieser Voraussetzung wollen wir die Verhältnisse näher untersuchen.

Im Allgemeinen ist man dann in der Gleichung $f(x) = 0$ von der Gruppe G zu einer kleineren Gruppe H gelangt, deren Substitutionen, mit $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$ multiplicirt, alle Substitutionen von G geben. Ist der Grad der Gleichung eine Primzahl p, so findet sich unter den Substitutionen der Gruppe G eine cyklische Substitution p^{ter} Ordnung, und diese kann *nicht* in H enthalten sein, sonst wäre H transitiv und also auch die neue Gleichung irreductibel. Dann muss aber die Zahl der g (die 1 mitgerechnet), d. i. σ wenigstens p sein; denn die Ordnungszahl von H, die nicht durch p theilbar ist, multiplicirt mit der Anzahl der g, muss die durch p theilbare Ordnung der Gruppe G geben. Zugleich ist aber σ der Grad der Hülfsgleichung. Man erhält also folgenden Satz:

Eine irreductible Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, kann durch keine Hülfsgleichung niedrigeren Grades reductibel werden.

Wir untersuchen nun die Factorenzerlegung, die in $f(x)$ nach Adjunction der entsprechenden Hülfsgleichung stattfindet. Sei k der Grad irgend eines Factors von $f(x)$, also

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$$

die Wurzeln, welche durch die Substitutionen von H mit einander vertauscht werden. Da $g_i h_j$ alle Substitutionen von G darstellt und h_j die obigen Elemente mit einander vertauscht, muss ein g_i das x_1 mit einem bestimmten, nicht in jener Reihe enthaltenen x_1' vertauschen. Dann ist die Substitution $g_i h g_i^{-1}$ wieder in der Gruppe H enthalten, und giebt eine Permutation der Elemente

$$x_1', x_2', x_3', \ldots, x_k',$$

von denen keines in der früheren Reihe enthalten sein darf. Wäre z. B. $x_k = x_k'$, so konnte man x_1 mit x_k, dieses mit x_1' vertauschen, also auch x_1 mit x_1' vertauschen, was nicht der Fall sein kann, da die Gruppe H nur eine gewisse Reihe von Elementen, die oben hingeschriebenen, vertauscht. Die aus den x' gebildeten, den früheren ähnlichen Vertauschungen sind aber auch in H enthalten. H ist also auch transitiv in Bezug auf die Elementenreihe x', deren Zahl wieder k. Wenn die Reihe der Elemente noch nicht erschöpft ist, kann man eine 3[te], 4[te] u. s. f. bilden, die aber immer k *neue* Glieder enthält. Dann sind aber die folgenden Factoren von $f(x)$:

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k),$$
$$(x-x_1')(x-x_2')\cdots(x-x_k'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

irreductibel, und *die Gleichung* $f(x) = 0$ *muss demnach in eine Reihe von irreductibeln Factoren gleichen Grades zerfällt sein.*

Wird demnach eine irreductible Gleichung durch Anwendung einer Hülfsgleichung reductibel, so sind die neuen, irreductibeln Factoren von gleichem Grade, und dieser ist demnach ein Divisor von n. Eine Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, wird daher entweder nicht verändert oder in lineare Factoren zerfällt.

6. Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Die *einfachste* algebraische Gleichung vom Grade n ist diejenige, für welche *auch die Ordnungszahl ihrer Gruppe* gleich n ist. Soll die Gleichung irreductibel sein, so muss, wenn n eine Primzahl ist, die Gruppe aus den Potenzen einer cyklischen Substitution n^{ter} Ordnung bestehen.

Ist die Ordnung der Gruppe einer irreductibeln Gleichung gleich ihrem Grade, so muss jede Wurzel rationale Function einer einzigen

sein. Adjungiren wir eine Wurzel der Gleichung, so bleiben nur jene Substitutionen, die diese Wurzel nicht versetzen; eine solche ist aber in unserem Falle die identische Substitution, und nur diese; nach dieser Adjunction muss die Gleichung in lineare Factoren zerfallen, die rationale Functionen von x_1 sind; also wird

$$x_2 = r(x_1),$$

wie dies für den speciellen Fall der Lagrange'schen Resolvente schon nachgewiesen wurde.

Die Umkehrung des Satzes ist bekannt. Ist n eine Primzahl, so erhält man die Abel'sche Gleichung für Primzahlgerade, die durch Adjunction einer binomischen Gleichung $z^n = A$ (d. i. der Adjunction eines Werthes von $\sqrt[n]{A}$ und der n^{ten} Einheitswurzeln) gelöst wird. Hier schiebt sich dann die bekannte Theorie der Abel'schen, der binomischen und Kreistheilungsgleichungen ein, deren ein Resultat darin besteht, dass die binomischen Gleichungen durch Abel'sche Gleichungen, deren Grad eine Primzahl, sowie umgekehrt diese durch jene gelöst werden können.

Die Wurzeln einer Gleichung sind daher durch Wurzelgrössen darstellbar, wenn die Gruppe der Gleichung durch Adjunction einer Reihe von primzahlgradigen Abel'schen Gleichungen auf die Einheit reducirt werden kann.

Die Adjunction einer solchen Gleichung ist aber nur möglich, wenn ihre Gruppe eine zusammengesetzte und der Compositionsfactor eine Primzahl ist. Wir sind demnach auf diesem einfachen Wege zu dem *Galois'schen allgemeinen Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit einer Gleichung* gelangt. Die Gruppe der Gleichung muss nach der Reihe von G auf H, J, ... bis 1 reducirt werden können, und zwar müssen zwei aufeinanderfolgende Gruppen in folgendem Zusammenhang stehen. J ist in H enthalten und ist als Gruppe mit allen Substitutionen von H vertauschbar; der Compositionsfactor (der anzeigt, den wievielten Theil der Substitutionen von H J enthält) muss endlich eine Primzahl sein.

Dass die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades diese Bedingung nicht erfüllt, wenn $n > 4$, ist bekannt (Jordan l. c. p. 388).

Schliesslich will ich noch die Umformung dieses Kriteriums für den Fall geben, dass der Grad der Gleichung eine Primzahl ist, die mit Hülfe unserer allgemeinen Sätze in der kürzesten Weise erfolgen kann.

Soll die Gleichung p^{ten} Grades aufgelöst werden, so kann dies nur durch eine zweite Gleichung p^{ten} Grades geschehen, dann muss sie aber auch durch Adjunction derselben in lineare Factoren zerfallen. Soll die Auflösung eine algebraische sein, so müssen alle adjungirten Glei-

chungen primzahlgradige Abel'sche Gleichungen sein. Wir beginnen mit der Adjunction einer solchen vom Grade p; war die Ordnung der Gleichungsgruppe ν, so wird sie jetzt $\frac{\nu}{p}$ und kann schon gleich eins sein. Dann war die Gleichung selbst eine Abel'sche.

Es scheint beinahe, dass dieses immer der Fall sein muss, denn, wenn die Gleichung durch eine solche Adjunction lösbar ist, muss sie nach derselben in lineare Factoren zerfallen. Bei der Auflösung der Abel'schen Gleichung sind aber auch die p^{ten} Einheitswurzeln adjungirt worden, und diese treten demnach im Allgemeinen in die linearen Factoren der Gleichung. Dies entspricht aber der Adjunction der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, deren Gruppe die Potenzen einer cyklischen Substitution $p-1^{\text{ter}}$ Ordnung sein muss. Diese muss auch noch der ursprünglichen Gleichung adjungirt werden, und dadurch wird die Ordnung ihrer Gruppe von $\frac{\nu}{p}$ auf $\frac{\nu}{p(p-1)}$ reducirt. Nun aber ist die Zerfällung eine vollständige; es muss also sein:

$$\nu = p\,(p-1).$$

Eine algebraisch lösbare Gleichung, deren Grad eine Primzahl p ist, hat daher entweder die Ordnung p (Abel'sche Gleichung) oder $p(p-1)$ (Galois'sche Gleichung), und damit sind die möglichen Fälle erschöpft.

Dass umgekehrt, wenn die Ordnung der Gruppe $p\,(p-1)$ ist, diese auch algebraisch lösbar sein muss, ist daraus ersichtlich, dass die Substitutionen p^{ter} Ordnung gegen die übrigen vertauschbar sein müssen, wenn die Ordnung der Gruppe $p\,(p-1)$ sein soll. Man hat also eine Gleichung p^{ten} Grades und eine $p-1^{\text{ten}}$ Grades aufzulösen. Die erste ist aber, da ihre Substitutionen Potenzen einer cyklischen Substitution p^{ter} Ordnung sind, eine Abel'sche Gleichung, und nach ihrer Auflösung zerfällt die Gleichung in lineare Factoren, die höchstens noch die p^{ten} Einheitswurzeln enthalten. Die Gleichung $p-1^{\text{ten}}$ Grades muss also diese liefern.

Danach muss sich die Gruppe der Galois'schen Gleichung durch Substitutionen von der Form

$$A^i B^j \,(i=0,1,\ldots,p-1;\ j=0,1,2,\ldots,p-2)$$

darstellen lassen, wo die Substitution A von der p^{ten} Ordnung, B von der $p-1^{\text{ten}}$ Ordnung, und die A und B in der That gegeneinander vertauschbar sind.

Eine Substitution A^i versetzt daher alle Wurzeln; eine Substitution B alle, mit Ausnahme einer einzigen. Es giebt aber auch Substitutionen in der Gruppe, die eine beliebig bestimmte nicht versetzen. Sei x_k diejenige Wurzel, die B nicht versetzt, A^r jene Substitution, die

x_k mit x_l vertauscht, so wird die in der Gruppe enthaltene Substitution $C = A^r B A^{-r}$ gerade x_l unverändert lassen, und man kann nun alle Substitutionen in der Form $A^i C^j$ darstellen.

Adjungiren wir nun x_l, so fallen alle Substitutionen aus der Gruppe fort, die x_l versetzen, es bleiben nur die Substitutionen C, adjungiren wir noch x_k, so fallen auch diese fort; die Gruppe reducirt sich auf die identische Substitution, die Gleichung zerfällt in lineare Factoren und wir erhalten den Galois'schen Satz:

Ist eine Gleichung, deren Grad eine Primzahl, algebraisch auflösbar, so ist eine jede Wurzel derselben eine rationale Function von zwei beliebigen Wurzeln.

Budapest, April 1878.

Ueber die Grenzwerthe der Quotienten.

Von O. Stolz in Innsbruck.

Die Regel der Differentialrechnung über die Ermittelung des Grenzwerthes eines Quotienten, dessen Zähler und Nenner sich zugleich entweder dem Grenzwerthe Null oder dem Grenzwerthe Unendlich nähern, hat bisher keinen völlig befriedigenden Ausdruck gefunden.

Für den ersteren Fall, wo die beiden Grenzwerthe Null sind, lässt sich durch nähere Untersuchung des von Cauchy gegebenen Beweises leicht die für einen so wichtigen Lehrsatz wünschenswerthe Genauigkeit herstellen.

Weniger befriedigend ist das bisherige Ergebniss im Falle unendlicher Grenzwerthe. Cauchy's Beweis macht nicht allein die selbstverständliche Voraussetzung, dass für den Quotienten der Ableitungen ein Grenzwerth existire, sondern auch die, dass *dasselbe auch gelte für den vorgelegten Quotienten selbst.* Die letztere Annahme macht aber die Regel eigentlich unbrauchbar, indem die Schwierigkeit gerade darin besteht, sich vom Vorhandensein dieses Grenzwerthes zu überzeugen.

Hr. P. du Bois-Reymond (Borchardt's Journal Bd. 74, p. 297) hat die Richtigkeit des Satzes

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

an die Bedingung geknüpft, dass die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ stetig seien und weder sie, noch ihre Ableitungen eine unendliche Anzahl von Maxima und Minima besitzen. Wenn (im Falle $\lim f = \lim \varphi = \infty$) damit gemeint ist, dass von einem bestimmten, endlichen Werthe $x = x_1$ an $f(x)$, $\varphi(x)$, sowie jede noch so hohe Ableitung derselben sich beständig in demselben Sinne ändern; so kann der Satz vielleicht richtig sein. Wenigstens ist mir gegenwärtig kein Beispiel eines Functionenpaares von der genannten Eigenschaft bekannt, dessen Quotient gleichwohl keinen Grenzwerth besässe. Ebensowenig ist es mir aber bisher

gelungen, bei der eben erwähnten Beschränkung der Functionen f, φ die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten $f:\varphi$ nachzuweisen.

Es lassen sich leicht *stetige*, *beständig wachsende* Functionen f, φ aufstellen, deren Quotient dennoch für $\lim x = +\infty$ unbestimmt wird. Z. B.

$$f(x) = e^x\,(c + \sin x)\,, \qquad \varphi(x) = e^x\,,$$

$$f(x) = e^{e^x}(c + \sin x)\,, \qquad \varphi(x) = e^{e^x},$$

wenn man sich nur $c \geqq \sqrt{2}$ denkt. Das letztere Beispiel bietet noch die Eigenthümlichkeit dar, dass auch jede Ableitung $f^n(x)$, $\varphi^n(x)$ schliesslich beständig wächst. Allerdings gilt dies für $f^n(x)$ anscheinend nur für alle $x \geqq G_n$, wobei $\lim G_n$ für $\lim n = +\infty$ selbst $+\infty$ ist.

Durch Verallgemeinerung eines Satzes, den Cauchy im Cours d'Analyse (1821) p. 48 gegeben hat, lassen sich Bedingungen herstellen, unter welchen auf die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten $f:\varphi$ geschlossen werden kann. Dieselben führen auf eine Fassung der in Rede stehenden Regel, welche nicht allein einer strengen Begründung fähig, sondern auch für die Anwendung hinlänglich bequem zu sein scheint.

Die im Folgenden vorkommenden Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen $x:\lim x = a$ sind immer *als stetig, aber als einseitig* zu denken. Da der Quotient $f:\varphi$ in einem Intervalle $x_1 \lesseqgtr x \lesseqgtr a$ als stetig vorausgesetzt wird, so ist ein unendlicher Grenzwerth desselben immer *bestimmt unendlich*.

§ 1.

Zwei Sätze über die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten $f(x):\varphi(x)$.

1. 1. Satz. *Wenn die stetigen Functionen* $f(x)$ *und* $\varphi(x)$ *für* $\lim x = +\infty$ *dem Grenzwerthe Null sich nähern und* $\varphi(x)$ *von einem bestimmten Werthe* $x = x_1$ *an sich stets in demselben Sinne ändert, wenn ferner für den Bruch*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}\,, \qquad h \gtrless 0,$$

wo h *eine beliebige Constante bezeichnet, für* $\lim x = +\infty$ *ein Grenzwerth* K *existirt, so existirt bei demselben Grenzübergange auch ein Grenzwerth für den Bruch* $f(x):\varphi(x)$ *und er ist* $= K$.

Bei dem Beweise genügt es anzunehmen, dass $\varphi(x)$ beständig abnehme, also positiv sei und die Constante h einen positiven Werth habe.

a) *K sei endlich.* Weil

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)-f(x+h)}{\varphi(x)-\varphi(x+h)} = K, \tag{1}$$

existirt eine endliche Zahl G, so dass bei vorgegebenem ε für *alle* $x > G$

$$K-\varepsilon < \frac{f(x)-f(x+h)}{\varphi(x)-\varphi(x+h)} < K+\varepsilon,$$

woraus sich wegen $\varphi(x) > \varphi(x+h)$ ergiebt:

$$(K-\varepsilon)\,[\varphi(x)-\varphi(x+h)] < f(x)-f(x+h) < (K+\varepsilon)\,[\varphi(x)-\varphi(x+h)].$$

Bezeichnet x' irgend eine Zahl $> G$, so findet man hieraus, nachdem man

$$x = x',\ x'+h,\ x'+2h \cdots\cdots x'+(n-1)h$$

gesetzt hat:

$$(K-\varepsilon)\left\{\varphi(x')-\varphi(x'+nh)\right\} < f(x')-f(x'+nh) < (K+\varepsilon)\left\{\varphi(x')-\varphi(x'+nh)\right\}$$

oder

$$-\varepsilon\left\{\varphi(x')-\varphi(x'+nh)\right\} < f(x')-f(x'+nh)-K\left\{\varphi(x')-\varphi(x'+nh)\right\}$$
$$< +\varepsilon\left\{\varphi(x')-\varphi(x'+nh)\right\}$$

und um so mehr:

$$-\varepsilon\varphi(x') < f(x')-K\varphi(x')-[f(x'+nh)-K\varphi(x'+nh)] < +\varepsilon\varphi(x'),$$

d. i.

$$-\varepsilon < \frac{f(x')}{\varphi(x')} - K - \frac{f(x'+nh)-K\varphi(x'+nh)}{\varphi(x')} < +\varepsilon.$$

Wie gross nun auch x' sein mag, so kann ich doch n so gross nehmen, dass

$$|f(x'+nh)-K\varphi(x'+nh)| < \varepsilon\varphi(x').$$

Somit ist für *alle* $x' > G$

$$\left|\frac{f(x')}{\varphi(x')} - K\right| < 2\varepsilon,$$

d. i.

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K,$$

q. e. d.

b) *K sei bestimmt unendlich*, z. B. $+\infty$. Nach (1) folgt, dass bei vorgegebenem H

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{\varphi(x)-\varphi(x+h)} > H$$

sein müsse für *alle* $x > G$. Und daraus wie oben

$$\frac{f(x')}{\varphi(x')} > H + \frac{f(x'+nh)-H\varphi(x'+nh)}{\varphi(x')}.$$

Wie gross nun auch x' sein möge, so kann man doch n so gross nehmen, dass

$$|f(x'+nh) - H\varphi(x'+nh)| < \varepsilon\varphi(x').$$

Also ist für *alle* $x' > G$

$$\frac{f(x')}{\varphi(x')} > H - \varepsilon,$$

d. i.

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty,$$

q. e. d.

2. 2. Satz. *Haben die stetigen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Eigenschaft, von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an sich stets in demselben Sinne, wie gross auch x genommen werden mag, so existiren Grenzwerthe* $\lim f(x)$ *und* $\lim \varphi(x)$ *für $x = +\infty$, von denen der letztere sicher unendlich sein soll. Wenn ferner für den Bruch*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)},$$

worin h eine beliebige, von 0 *verschiedene Constante bezeichnet, beim Grenzübergange* $\lim x = +\infty$ *ein Grenzwerth K existirt, so existirt auch für* $\lim x = +\infty$ *ein Grenzwerth für den Quotienten $f(x):\varphi(x)$ und er ist $= K$.*

Beim Beweise dieses Satzes genügt es anzunehmen, dass die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ von $x = x_1$ an beständig zunehmen, so dass $K \geqq 0$ sein muss; und dass die Constante $h > 0$ sei.

a) *K sei endlich.* Aus der Formel (1) folgt jetzt, dass für jeden Werth $x' > G$

$$\left| \frac{f(x'+nh)}{\varphi(x'+nh)} - K - \frac{f(x') - K\varphi(x')}{\varphi(x'+nh)} \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Nun sei x_0 eine beliebige nicht negative Zahl $< h$ und p eine ganze positive Zahl, so dass $ph > G$. Dann kann man in (2) setzen:

$$x' = x_0 + ph, \quad n = r - p,$$

wodurch man erhält:

$$\left| \frac{f(x_0+rh)}{\varphi(x_0+rh)} - K - \frac{f(x_0+ph) - K\varphi(x_0+ph)}{\varphi(x_0+rh)} \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

wenn nur $r > p$ ist. Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x_0+rh)}{\varphi(x_0+rh)} = K, \tag{4}$$

wie auch x_0 gemäss der obigen Bedingung gewählt werden mag. Allein daraus würde noch nicht mit Sicherheit folgen, dass auch

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K. \tag{5}$$

Aus (4) schliesst man zwar, dass

$$\left| \frac{f(x_0+rh)}{\varphi(x_0+rh)} - K \right| < \varepsilon$$

sein müsse für alle $r > S$. Aber S hängt von x_0 ab, so dass man sich erst davon überzeugen muss, ob die untere Grenze von S, während x_0 das Intervall $0 \leqq x_0 < h$ durchläuft, nicht Null sei. Diese Schwierigkeit wird dadurch beseitigt, dass man für S *einen von* x_0 *unabhängigen* Werth abzuleiten im Stande ist. Da gemäss den Voraussetzungen

$$\varphi(ph) < \varphi(x_0+ph) < \varphi(h+ph),$$
$$f(ph) < f(x_0+ph) < f(h+ph)$$

ist, so ergiebt sich:

$$f(ph)-K\varphi(h+ph) < f(x_0+ph)-K\varphi(x_0+ph) < f(h+ph)-K\varphi(ph).$$

Bezeichnet man mit P den grösseren der absoluten Beträge der äusseren, von x_0 unabhängigen Glieder dieser Ungleichung und bestimmt S so, dass für $r > S$

(6) $$\frac{P}{\varphi(rh)} < \varepsilon,$$

so ist auch

$$\left| \frac{f(x_0+ph) - K\varphi(x_0+ph)}{\varphi(x_0+rh)} \right| < \varepsilon,$$

und nach (3)

$$\left| \frac{f(x_0+rh)}{\varphi(x_0+rh)} - K \right| < 2\varepsilon.$$

Demnach ist sicher

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - K \right| < 2\varepsilon$$

für alle $x > h + Sh$, wobei S aus der Ungleichung (6) sich ergiebt. Also hat man in der That die Gleichung (5).

b) *Ist* $K = +\infty$, so folgt ähnlich wie in Nr. 1. b) und in a):

$$\frac{f(x_0+rh)}{\varphi(x_0+rh)} > H + \frac{f(x_0+ph) - H\varphi(x_0+ph)}{\varphi(x_0+ph)}.$$

Bestimmt man S durch die Ungleichung (6), nachdem K durch H ersetzt ist, so kann man schliessen:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > H - \varepsilon$$

für *alle* $x > h + Sh$, d. i.:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty.$$

§ 2.

Der Satz $\lim \frac{f}{\varphi} = \lim \frac{f'}{\varphi'}$.

3. Die vorstehenden Sätze, welche sich auch sonst z. B. in der „neuen Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit posi-

tiven Gliedern" des Hrn. P. du Bois-Reymond (Borchardt's Journal Bd. 76) als nützlich erweisen, führen vermittelst der Formel

$$\text{(a)} \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \frac{f'(X)}{\varphi'(X)}, \qquad x < X < x+h$$

$(h > 0)$ zu der verlangten Regel.

Betrachtet man den in Serret's C. de Calcul différentiel p. 23 vorkommenden Beweis der Formel (a), den bereits Hr. G. Cantor (Borchardt's Journal Bd. 74, p. 141) als stichhaltig erkannt hat, genauer, so findet man, dass *ausreichende* Bedingungen für die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ folgende sind:

1) die Functionen f, φ müssen für alle Werthe des Argumentes *innerhalb und an den Grenzen* des Intervalles $x \cdots x+h$ eindeutig, endlich und stetig sein;
2) dieselben besitzen *wenigstens für alle Werthe innerhalb* des genannten Intervalles Differentialquotienten*), die nicht zugleich unendlich sein dürfen;
3) $\varphi'(x)$ darf für keinen der in 2) bezeichneten Werthe verschwinden.

Leitet man die Formel (a) aus dem gewöhnlichen Mittelwerthsatze

$$F(t+\tau) - F(t) = \tau F'(T)$$

durch die Substitution $t = \varphi(x)$ ab, so tritt an Stelle der Bedingung 3) die folgende:

3*) *Innerhalb* des Intervalles $x \cdots x+h$ dürfen $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ nicht *zugleich* verschwinden und $\varphi'(x)$ darf nicht entgegengesetzt bezeichnete Werthe annehmen, so dass also $\varphi(x)$ in dem Intervalle $x \cdots x+h$ *sich beständig in demselben Sinne ändert.*

4. *Unter Voraussetzung der Existenz eines Grenzwerthes des Quotienten* $f'(x):\varphi'(x)$ für $\lim x = +\infty$ *folgt aus* (a):

$$\text{(b)} \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

X kann als eindeutige Function von x angesehen werden: $X = \Theta(x)$, welche der Bedingung genügt:

$$\lim_{x=+\infty} \Theta(x) = +\infty.$$

Hat man aber überhaupt $\lim\limits_{t=t_0} F(t) = \mathsf{A}$ und $\lim\limits_{x=a} \Theta(x) = t_0$, so ergiebt sich *zuverlässig:*

$$\text{(c)} \qquad \lim_{x=a} F[\Theta(x)] = \mathsf{A}.$$

---

*) Damit ist gemeint, dass die Grenzwerthe des Differenzquotienten $\Delta f(x) : \Delta x$ bei Annäherung von *beiden* Seiten übereinstimmen. Unendlich ist der Differentialquotient, wenn diese beiden Grenzwerthe entweder $+\infty$, oder $-\infty$ sind.

Denn man hat, wenn man sich a, A etwa als endliche Zahlen denkt, für *alle*

$$|t-t_0|<\tau, \qquad |F(t)-\mathsf{A}|<\varepsilon,$$

wo ε eine beliebige, vorgegebene Zahl bedeutet. Da ferner für *alle*

$$|x-a|<\delta, \qquad |\Theta(x)-t_0|<\tau,$$

und da die hier vorkommenden Werthe von $\Theta(x)$ im stetigen Intervalle $t_0-\tau \cdots t_0+\tau$ enthalten sein müssen, so ist auch für *alle*

$$\text{(d)} \qquad |x-a|<\delta, \qquad |F[\Theta(x)]-\mathsf{A}|<\varepsilon,$$

d. i. es besteht die Formel (c).

5. So bekannt der eben benutzte Satz über die *Transformation der Grenzwerthe* auch sein mag, so habe ich es doch für nothwendig gehalten, an denselben ausdrücklich zu erinnern. Man könnte *nicht ohne Weiteres umgekehrt* aus (c) schliessen, dass auch $\lim F(t)$ für $\lim t=t_0$ existire. Aus (c) folgt zwar (d). Aber nur wenn $|\Theta(x)-t_0|$ *alle* Werthe von 0 bis zu einer bestimmten Grenze τ (diese ausgeschlossen) durchläuft, während x von a bis $a\pm\delta$ geht, findet man

$$|F(t)-\mathsf{A}|<\varepsilon$$

für *alle* $|t-t_0|<\tau$, d i. $\lim\limits_{t=t_0} F(t)=\mathsf{A}$.

Dieser Schluss ist also mit Sicherheit nur möglich, wenn die Function $\Theta(x)$ nicht blos eindeutig definirt, sondern auch *stetig* ist. Nimmt man auf diese Bedingung keine Rücksicht, so ist man vor Fehlschlüssen nicht mehr sicher. Z. B. Es sei $F(x)$ im Intervalle $0\leq x\leq x_1$ endlich und stetig und habe für alle Werthe $0<x\leq x_1$ einen Differentialquotienten. Dann hat man

$$F(x)-F(0)=xF'(X), \qquad 0<X<x,$$

oder

$$XF'(X)=\frac{X}{x}\left\{F(x)-F(0)\right\}.$$

Daraus kann man zwar schliessen

$$\lim_{x=0} XF'(X)=0,$$

aber *nicht mit* **Schlömilch** (Comp. d. h. Analysis II, p. 185):

$$\text{(e)} \qquad \lim_{x=0} xF'(x)=0;$$

obwohl $\lim X=0$ für $\lim x=0$ ist. In der That, setzt man für $F(x)$ die stetige Function

$$\left.\begin{array}{ll} & F(0)=0 \\ (x\gtrless 0) & F(x)=x\sin\frac{1}{x} \end{array}\right\},$$

so findet man

$$xF'(x)=x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

welcher Ausdruck beim Grenzübergange $\lim x = 0$ unbestimmt wird. — Die Formel (e) ist richtig, wenn die Existenz des Grenzwerthes $\lim xF'(x)$ *vorausgesetzt* wird, vgl. Nr. 8.

6. Durch Zusammenfassung des 1. Satzes (§ 1.) und der Gleichung (b) ergiebt sich unmittelbar der folgende:

3. Satz. „Wenn die eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, welche sich für $\lim x = +\infty$ *beide dem Grenzwerthe Null nähern*, die Eigenschaft haben, dass sie für alle endlichen Werthe von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an endlich und stetig sind und Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ besitzen, die weder *zugleich* (bestimmt) unendlich sind, noch *zugleich* verschwinden, und *von denen der letztere $\varphi'(x)$ nicht entgegengesetzt bezeichnete Werthe annimmt**); so folgt *aus der Existenz des Grenzwerthes* $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ ($\lim x = +\infty$) *die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten* $f(x) : \varphi(x)$ *bei demselben Grenzübergange, und es ist*

$$\text{(f)} \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.“$$

Wichtiger ist der folgende, *bisher nur unvollständig bekannte* Satz, den man aus dem 2. Satze (§ 1.) in Verbindung mit der Formel (b) erschliesst.

4. Satz. „Wenn die eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ für alle endlichen Werthe von x von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an endlich und stetig sind und *sich beständig in demselben Sinne ändern*, so dass für $\lim x = +\infty$ Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim \varphi(x)$ vorhanden sind, *von welchen wenigstens der letztere unendlich ist*; wenn $f(x)$, $\varphi(x)$ ferner für die genannten Werthe von x Differentialquotienten besitzen, *die weder zugleich Null, noch zugleich unendlich sind: so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes* $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ ($\lim x = +\infty$) *die Existenz eines Grenzwerthes* $\lim \{f(x) : \varphi(x)\}$ ($\lim x = +\infty$) *und es besteht ebenfalls die Gleichung* (f).“

Sollte $\lim f(x)$ *unendlich*, $\lim \varphi(x)$ *endlich sein*, während die übrigen den Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ auferlegten Bedingungen erfüllt bleiben — so folgt zwar sofort

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

) Ersetzt man die hier aufgenommene Bedingung 3) durch die Bedingung 3) in Nr. 3., so erhält man einen Satz, der sich auch unmittelbar vermöge des Schlusses in Nr. 4. aus der Formel

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(X)}{\varphi'(X)}, \quad x < X,$$

ergiebt. (Dies ist der Eingangs erwähnte Beweis von Cauchy.)

Welches Zeichen aber die unendlichen Grenzwerthe der reciproken Brüche erhalten, muss besonders untersucht werden. Man findet z. B. wenn $\lim \varphi(x) = 0$ ist:

$$\text{(g)} \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = - \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

In der That, wenn $\varphi(x)$ abnehmend dem Grenzwerthe Null sich nähert, so werden die Werthe von $f(x):\varphi(x)$ schliesslich gleich bezeichnet mit $f(x)$, die Werthe von $f'(x):\varphi'(x)$ erhalten aber nach Formel (a) entgegengesetztes Zeichen als $f(x)$.

Dass die Gleichung (f) auch auf den Fall, dass nur einer der beiden Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim \varphi(x)$ unendlich sei, ausgedehnt werden könne, hat schon Hr. P. du Bois-Reymond bemerkt. (Clebsch, Math. Annalen Bd. VIII, p. 373.)

7. Durch die vorstehenden zwei Sätze ist das vorgesetzte Ziel erreicht: es ist die Untersuchung des Quotienten $f(x):\varphi(x)$ *völlig* auf die des Quotienten $f'(x):\varphi'(x)$ zurückgeführt.

Vermittelst der Transformationen

$$x = -x'; \qquad x = a \pm \frac{1}{x'}$$

dehnt man die genannten Sätze auf jeden beliebigen Grenzübergang des Argumentes $x : \lim x = a \pm 0$ aus. Das Intervall $x_1' \cdots +\infty$ geht dabei in ein Intervall $x_1 \cdots a$ über, wo $x_1 \gtrless a$.

§ 3.

Folgesätze.

8. 5. Satz. „*Es sei a eine endliche Zahl.* Aendert sich die stetige Function $f(x)$ in dem Intervalle $x = a \pm \delta$ bis $x = a$ $(\delta > 0)$ *beständig in demselben Sinne* und ist $\lim f(x) = \sigma\infty$ — $\sigma = \pm 1$ — für den Grenzübergang $\lim x = a \pm 0$; hat ferner $f(x)$ für alle Werthe dieses Intervalles ausser $x = a$ einen Differentialquotienten $f'(x)$, *für welchen bei dem genannten Grenzübergange ein Grenzwerth existiren soll*; so hat man

$$\lim_{x=a\pm 0} f'(x) = \mp \sigma \cdot \infty.\text{“}$$

Zufolge der Formel (g) ist nämlich

$$\lim f'(x) = - \lim \frac{f(x)}{x-a},$$

worin der letztere Grenzwerth $= \pm \lim f(x)$.

6. Satz. „Hat $f(x)$ ähnliche Eigenschaften wie oben, *ist aber* $\lim f(x)$ *endlich für* $\lim x = 0$ *oder* $\lim x = \pm\infty$, so hat man für den nämlichen Grenzübergang

$$\lim x f'(x) = 0,$$

die Existenz dieses Grenzwerthes vorausgesetzt.“

Denn nach dem 4. Satze ist jetzt

$$\lim \frac{f(x)}{lx} = \lim x f'(x).$$

Nach diesem Beweise ist der Satz jedoch nicht so allgemein, als nach dem in Nr. 5. mitgetheilten.

Andere Corollare findet man bei Moigno, C. différentiel p. 49, und in einer Abhandlung von P. du Bois-Reymond (Annali, 2. serie IV, p. 353).

Innsbruck, im Mai 1878.

Sur la partition des nombres.

Note de M. M. Faà de Bruno.

Depuis les travaux d'Euler et de Paoli*) on savait que le nombre des manières de former le nombre p même avec répétition en prenant r élements parmi les nombres 1, 2, 3 . . . n est égal au coefficient de $x^p r^r$ dans le developpement de la fonction:

$$Z = \frac{1}{(1-r)(1-xr)\cdots(1-x^n r)}, \tag{1}$$

et que le nombre des solutions en nombres entiers de l'équation:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = p \tag{2}$$

où $a_1, a_2 \ldots a_n$ sont des nombres donnés, est égal au coefficient de x^p dans le developpement de la fonction

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}. \tag{3}$$

La première question revient à la seconde en imposant aux nombres $x_1, x_2, \ldots$ la condition de satisfaire à l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r; \tag{4}$$

et en supposant

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \ldots a_n = n,$$

on demontre facilement**) que le coefficient cherché dans Z est égal à:

$$((x^p))\,\psi(x),\ \psi(x) = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x)\cdots(1-x^r)}. \tag{5}$$

Quant à la seconde question Mr. Sylvester a trouvé (*Annales de Tortolini T.* 8, 1856) qu'en appelant ϱ une racine primitive de $y^q - 1 = 0$ et par W_q le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement de:

$$\sum \frac{s^n e^{nt}}{(1-\varrho_1^{a_1} e^{-a_1 t})(1-\varrho^{a_2} e^{-a_2 t})\cdots(1-\varrho^{a_r} e^{-a_r t})} \tag{6}$$

---

*) Voir des Notes de Brioschi dans les Annales de Tortolini tome 7 page 303, tome 8 page 5.

**) Voir notre ouvrage *„Theorie des formes binaires" Paris, chez Gauthiers Villars.*

le nombre des solutions sera égal à la somme

$$(7)\qquad W_1 + W_2 + W_3 + \cdots$$

reglée d'après certaines conditions qu'on peut voir dans la note citée. M. Brioschi en reprenant la première question a trouvé que si l'on pose

$$(8)\qquad \psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

$$(9)\qquad s_m = \sum \frac{1}{\beta^m} - \sum \frac{1}{\alpha^m}$$

en appelant α, β les racines de $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, le nombre C_p de manières de former le nombre p avec les nombres 0, 1, 2, 3 ... n pris r à r, est fourni par la formule:

$$(10)\qquad 1.2.3 \ldots p . C_p = \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & 0 \cdots 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & -3 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & \cdots -(p-1) \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \cdots s_1 \end{vmatrix}.$$

La valeur de s_λ d'ailleurs est fournie par l'équation:

$$s_m = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{3}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+1}\right)$$
$$- \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+2}\right) - \cdots - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+r}\right)$$

où par $\left(\frac{m}{l}\right)$ on entend un nombre $= l$, $= 0$ selon que m est ou non multiple de l.

Mais les longs calculs qu'exigent ces formules rendent presque inutiles ces efforts néanmoins si admirables des Géomètres qui les ont données. C'est pourquoi je me suis proposé de simplifier la solution de ces questions, et je crois y avoir réussi par les nouvelles formules qui suivent, et qui d'ailleurs auront l'avantage d'être utiles dans d'autres recherches. Je reprendrais d'abord les équations qui servent à trouver le determinant (10), à savoir,

$$(11)\qquad \begin{aligned} C_1 &= s_1, \\ 2C_2 &= C_1 s_1 + s_2, \\ 3C_3 &= C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3, \\ &\cdots\cdots \\ pC_p &= C_{p-1}s_1 + C_{p-2}s_2 + C_{p-3}s_3 + \cdots + C_1 s_{p-1} + s_p. \end{aligned}$$

En les comparant avec les équations connues qui relient ensemble les coefficients avec les sommes s des puissances semblables des racines:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
& s_1 + a_1 = 0, \\
& s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0, \\
& s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0, \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& s_p + a_1 s_{p-1} + \cdots + p a_p = 0,
\end{aligned}
$$

on voit que le système (11) d'où l'on deduit la valeur de C_p se reduit au système (12), en supposant que $a_i = C_i$ et que les nombres $+ l$ se changent en $- l$. Or si l'on exprimait le coefficient a_p en fonction des s à l'aide de la formule connue (1)

$$
(13)\qquad a_p = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p}
$$

sous la condition:

$$
(14)\qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + p\lambda_p = p;
$$

il n'y aurait qu' à y changer $+ l$ en $- l$, ce qui fournirait:

$$
(15)\qquad C_p = \sum \frac{1}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p}
$$

comme nous avons déjà annoncé dans notre *Théorie des formes binaires* page 157. La formule (15) est déjà un pas important de fait dans la question. Mais on peut pousser bien plus loin la simplification.

A cet effet observons que toute expression de la forme:

$$
(16)\qquad \mathsf{P} = \sum \frac{1}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \cdots \alpha_p^{\lambda_p}
$$

sous la condition (14) peut se transformer ainsi:

$$
(17)\qquad \mathsf{P} = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \Big[\delta + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_p x^p\Big]^p,
$$

en supposant que $\pi(p)$ désigne la factorielle $1.2.3\ldots p$, que $((x^p))$ désigne le coefficient de x^p dans ce qui suit, et qu' après le developpement de la puissance p on change δ^i en $1.2.3\ldots i$. Si en effet on cherchait ce coefficient selon les voies ordinaires et en se rappelant la règle du developpement des puissances polynomiales, on trouverait pour ce coefficient l'expression suivante:

$$
(18)\qquad \sum \frac{\pi(p)}{(\lambda_0)(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \delta^{\lambda_0} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \cdots \alpha_p^{\lambda_p}
$$

sous la condition (14). Si donc on adopte de changer δ^{λ_0} en $1.2.3\ldots\lambda_0$, on verra qu'en divisant par $\Pi(p)$ cette expression on retombe sur la valeur énoncée de P.

En appliquant ce procédé à la formule C_p (15) on trouvera:

$$
(19)\qquad C_p = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \Big[\delta + \frac{s_1}{1} x + \frac{s_2}{2} x^2 + \frac{s_3}{3} x^3 + \cdots + \frac{s_p}{p} x^p\Big]^p.
$$

Mais il y a plus. On sait qu'en appelant $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ les sommes des puissances semblables des racines de l'équation:

$$(20) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

on a généralement en posant $y = \frac{1}{x}$ *)

$$(21) \quad \sigma_1 y + \frac{\sigma_2}{2} y^2 + \frac{\sigma_3}{3} y^3 + \cdots + \frac{\sigma_p}{p} y^p = -\log(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots).$$

Si l'on observe donc qu'en vertu de la relation (9) la somme indiquée dans le second membre (19):

$$\sum \frac{x^m}{\beta^m} - \sum \frac{x^m}{\alpha^m} = -\log\varphi(x) + \log f(x),$$

en remarquant que dans notre cas les σ appartiendraient aux fonctions $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, on aura:

$$(22) \qquad \frac{\sigma_1}{1} x + \frac{\sigma_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{\sigma_p}{p} x^p = \log \frac{f(x)}{\psi(x)},$$

ce qui d'ailleurs se voit directement, car puisque:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{\Pi(x-\alpha)}{\Pi(x-\beta)} = \frac{a_n \Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}{a_{n'} \Pi\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)},$$

en désignant par n, n' les degrés de f et de ψ, on aura:

$$\log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \log\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) - \sum \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)$$

$$= \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \frac{s_m(\beta) x^m}{m} - \sum \frac{s_m(\alpha) x^m}{m},$$

ou

$$(23) \qquad \log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \frac{s_m}{m} x^m.$$

Ainsi si l'on suppose que les derniers termes soient $= 1$, comme cela a lieu dans notre cas, il viendra:

$$\log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \sum \frac{s_m}{m} x^m.$$

Mais la formule (19) deviendra:

$$(24) \quad C_p = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \left[\delta + \log \frac{f(x)}{\psi(x)}\right]^p, \text{ ou encore}$$

$$(25) \quad C_p = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \left[\delta + \log \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}\right]^p.$$

---

*) Il est sousentendu que l'on arrêtera le developpement du second membre à y^p.

S'il s'agissait de trouver le nombre des invariants indépendants de degré r appartenants à une même forme de degré n, en posant $V_p = C_p - C_{p-1}$ ce nombre serait:

$$(26) \qquad V_p = \frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta + \log\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^r)}\right]^p.$$

En procédant de la même façon on trouverait que le nombre W_p des solutions entières et positives de l'équation:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = p$$

est fourni par la formule très-simple:

$$(27) \qquad W_p = \frac{1}{\pi(p)} f((x^p))\left[\delta + \log\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}\right]^p,$$

resultat extrèmement plus simple que celui (6) du à Sylvester, quoique extrèmement remarquable par la profondeur des vues qu'il revèle.

1⁰ Exemple, Formule (25). — Soit $n = 3$, $r = 3$, $p = 6$, on aura:

$$C_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + \log\frac{(1-x)^6(1-x^7)(1-x^4)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right]^6,$$

$$C_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]^6$$

$$= 15.24\left[\frac{2}{5} + \frac{9}{4} + \frac{16}{9}\right] + 20.6\left[\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + 12\right] + 15.2\left[\frac{16}{3} + \frac{29}{2}\right]$$

$$+ 6.\ \left[\frac{15}{2} + 1\right] = 6. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

2⁰ Exemple, Formule (26). 1⁰; Soit $n = 4$, $r = 2$, $p = \frac{rn}{2} = 4$

$$V_4 = \frac{1}{\pi(6)}((x^4))\left[\delta + \log\frac{1}{1-x^2}\right]^4 = \frac{1}{24}((x^6))\left[\delta + x^2 + \frac{x^4}{2}\right]^4$$

$$= \frac{1}{24}\left[12 + 12\right] = 1 \ \text{C. Q. F. T.}$$

3⁰; Soit $n = 4$, $r = 3$, $p = \frac{rn}{2} = 6$;

$$V_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + \log\frac{(1-x^5)(1-x^6)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right]^p$$

$$= \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5 - \frac{x^6}{6}\right]^6$$

$$= \frac{-120 + 720 + 120}{720} = 1. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Nous savons en effet que les quartiques n'ont qu'un invariant de second degré, et un seul invariant de 3ᵉ degré.

4⁰ Exemple. Soit l'équation:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$$

traitée déjà par Brioschi d'après Sylvester après de longs calculs; on aura:

$$W_8=\frac{1}{\pi(8)}((x^8))\left[\delta+\log\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}\right]$$
$$=\frac{1}{\pi(8)}((x^8))\left[\delta+x^2+x^3+\frac{x^6}{2}+x^5+\frac{5x^6}{6}+\frac{x^8}{4}\right]^8$$
$$=\frac{1}{\pi(8)}\left\{8\pi(7)\tfrac{1}{4}+28\pi(6)\left(\tfrac{10}{6}+\tfrac{1}{4}+2\right)+56\pi(5)\left(\tfrac{3}{2}+3\right)+70\pi(4)\right\}=3.$$

En général si l'on avait:

$$2x_1+3x_2+5x_3=p$$

on aurait:

$$W_p=\frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta+\log\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}\right]^p.$$

Et pour calculer d'après la methode de Sylvester $l_1 W_p$ on aurait à sommer les valeurs que voici:

$$W_1=\frac{1}{36}\left[\frac{(n+5)^2}{2}-\frac{19}{12}\right];\quad W_2=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{4},$$
$$W_3=-\frac{1}{9}\left[2\mathrm{E}\left(\frac{n+2}{3}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{3}\right)+\mathrm{E}\frac{n}{3}\right],$$
$$W_5=-\frac{1}{25}\left[4\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{5}\right)-10\mathrm{E}\left(\frac{n}{5}\right)+5\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{5}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{n-4}{5}\right)\right],$$

valeurs qui à elles seules exigeraient déjà beaucoup de calculs pour y arriver. Les formules (19) à (23) permettent de developper n'importe quelle fonction rationelle $\frac{\vartheta(x)}{\omega(x)}$, car on peut toujours faire en sorte que le terme $\log\frac{a_n}{a_{n'}}$ de la formule (23) soit $=0$, en préparant convenablement les fonctions. Ainsi on aura ce theorème général. — *Le coefficient de x^p dans le developpement de la fonction:*

$$\frac{\vartheta(x)}{\omega(x)}=\frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\cdots}{\omega_1(x)\,\omega_2(x)\cdots}$$

est exprimé par l'équation:

$$\frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta+\log\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\cdots}{\omega_1(x)\,\omega_2(x)\cdots}\right]^p.$$

Prenons l'exemple le plus simple $\vartheta(x)=1$, $\omega(x)=a-x$, et cherchons le coefficient de x^4, que nous savons $=\frac{1}{a^5}$.

On $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$; il suffira de developper $\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$, et l'on trouvera:

$$\frac{1}{\pi(4)}((x))\left[\delta+\log\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right]^4=\frac{1}{24}((x^4))\left[\delta+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^4}{4a^4}\right]^4$$
$$=\frac{1}{24}\left[\frac{4\delta^3}{4}+6\delta^2\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)+4\delta\left(\frac{3}{2}\right)+1\right]\frac{1}{a^4}=\frac{6+3+8+6+1}{24}\frac{1}{a^4}=\frac{1}{a^4};$$

donc le coefficient sera $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^4}=\frac{1}{a^5}$.

Comme on peut toujours supposer les fonctions irrationelles décomposées en un nombre infini de facteurs, il s'ensuit qu'on aura généralement pour n'importe quelle fonction (en supposant les facteurs de la forme $(1-\alpha x)$, ce qui est toujours possible),

$$((x^p))\,\varphi(x) = \frac{1}{\pi(p)}\,((x^p))\Big[\delta + \log\varphi(x)\Big]^p.$$

Soit comme exemple

$$\psi(x) = \frac{\sin x}{x} = \prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)$$

on aura

$$((x^p))\,\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi(p)}\,((x^p))\left[\delta - \frac{\pi^2}{6}\,x^2 - \frac{\pi^2}{180}\,x^4 - \cdots\right]^p \ast)$$

Pour $p = 4$, il viendra

$$((x^4))\,\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{24}\,((x^4))\left[\delta - \left(\frac{\pi}{6}\,x^2 + \frac{\pi}{180}\,x^4\right)\right]^p$$

$$= -\frac{1}{180} + \frac{1}{72} = +\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

comme cela doit être.

---

*) On se rappellera que $\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^2}{180}$, etc.

Turin, 11. Mai 1878.

Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten.

Von M. Nöther in Erlangen.

Die Aufgabe, deren Lösung die vorliegende Abhandlung*) bietet, ist die, für die *allgemeinen Thetafunctionen von vier Argumenten* die Ausdrücke für das *Additionstheorem* in ausgeführter Form aufzustellen. Solche Ausdrücke sind bisher nur für die *hyperelliptischen* Thetafunctionen (Weierstrass; vgl. Königsberger, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen, Borch. J. 64, p. 17) und für die allgemeinen Thetafunctionen von *drei* Argumenten (Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin, Reimer 1876) gegeben worden. Beidemale war die Gruppirung der *Charakteristiken* der ϑ-Functionen (nach dem von Riemann eingeführten Ausdrucke; s. dessen Werke, p. 457) der Weg, auf welchem die Constantenbestimmung in den ϑ-Formeln erreicht worden ist; im ersten Falle im speciellen Anschluss an die algebraische Normirung des hyperelliptischen Umkehrproblems, im zweiten Falle durch eine directe Untersuchung der combinatorischen Eigenschaften der dreireihigen Charakteristiken.

Indem ich nun als die wesentliche Eigenschaft von Systemen von Charakteristiken den Charakter des Geraden oder Ungeraden der Summe einer *ungeraden* Anzahl von Charakteristiken betrachte, kann ich diesen letzteren Gedankengang auf die vierreihigen Charakteristiken erweitern. Dabei ergeben sich, den von Hrn. Weber untersuchten „vollständigen" 7-Systemen analog, hier *Systeme von* 8 *ungeraden Charakteristiken*, für welche ebenfalls die Summe von je 5 derselben ungerade, die von je 3 oder 7 gerade ist. Unter Zugrundelegung von ϑ-Functionen, deren Charakteristiken mit einem solchen 8-System (oder auch zwei 7-Systemen) einfach zusammenhängen, ergeben sich dann die Ausdrücke für das allgemeine Additionstheorem, die noch das Eigenthümliche haben, dass die Coefficienten aller Glieder selbst *zweigliedrige*

*) Ein Theil der Resultate dieses Aufsatzes ist in den Sitzungsber. der Erl. Soc. vom 11. Febr. d. J. mitgetheilt.

Producte sind. Nur durch speciellere Annahmen erhält man Formeln mit eingliedrigen Coefficienten. Für die daraus abgeleiteten achtfach-periodischen Functionen:

$$\frac{\vartheta_\varepsilon(u+v)}{\vartheta(u+v)}$$

existiren dagegen keine solche Darstellungen, bei welchen für alle 256 Functionen, die durch die 256 verschiedenen Werthe von ε entstehen, derselbe Nenner auftritt und in denen zugleich sowohl Zähler als Nenner nur eingliedrige Coefficienten besitzen; vielmehr ist dies nur bei 255 derselben möglich. In diesem Verhalten liegt also eine Abweichung von der Gestalt des Theorems bei den hyperelliptischen und den Functionen von 3 Argumenten*).

Als eine Anwendung der zwischen den ϑ-Functionen mit Nullargumenten erhaltenen Relationen (zwischen je 4 Producten) gebe ich im letzten Paragraphen die Reduction der hinreichenden Bedingungen, unter welchen die ϑ-Functionen zu hyperelliptischen werden, auf ihre kleinste Anzahl, das Verschwinden von *drei* geraden ϑ-Functionen.

Ich will nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, wie die Erkenntniss dieser Gruppirungen überall ihren Ausgangspunkt in den Curven-Theorieen genommen hat. Was oben als wesentliche Eigenschaft von Systemen von Charakteristiken bezeichnet wurde, ist bei den von Clebsch behandelten Berührungsproblemen (Borch. J. 63) hervorgetreten und, nach diesen Problemen, von Hrn. C. Jordan in seinem „Traité des substitutions", p. 229, als jene Eigenschaft entwickelt worden. Die besondern 7-Systeme für $p=3$ sind ferner von Aronhold bei den Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung angegeben; und deren Anzahl 8. 36 und Anordnung findet sich bei Clebsch, d. Ann. III, p. 59 wieder. Ebenso bin ich auf die Gruppirung der 8-Systeme für $p=4$ zuerst durch algebraische Betrachtungen an speciellen Curven mit $p=4$ hingewiesen worden, wobei sich freilich zunächst nur ein Theil der wirklich existirenden 8-Systeme ergab.

---

*) H. Weber bemerkt, l. c. p. 39. Anm., dass bei den Functionen mit mehr als drei Variabeln Systeme von Charakteristiken, wie die dort vollständig genannten, nicht mehr existiren. Unsere Systeme von 8 bei 4 Variabeln sind nun durch die oben als wesentlich bezeichneten Eigenschaften der dreireihigen 7-Systeme ebenfalls definirt; sie sind es auch durch die Bedingung, dass $(p)+(\beta_i)+(\beta_k)$ ungerade sein soll, also durch alle die Eigenschaften, welche, nach pag. 27 jener Schrift, den Namen der „vollständigen" Systeme rechtfertigen. Aus diesem Grunde nenne ich, der obigen Bemerkung entgegen, in der o. c. Note und im vorliegenden Aufsatze die 8-Systeme ebenfalls *vollständige*. Wenn jene Bemerkung aber unter vollständigen Systemen vierreihiger Charakteristiken gerade solche von $2^p-1=15$ verstanden wissen will, welche für die 256 achtfach periodischen Functionen eingliedrige Ausdrücke mit demselben Nenner liefern, so ist sie freilich zutreffend.

Diese algebraischen Betrachtungen, mit den algebraischen Anwendungen der hier vorgetragenen Charakteristikentheorie, behalte ich einer späteren Mittheilung vor.

Noch bemerke ich, dass der in §§ 3.—6. eingeschlagene Weg sich durchaus nicht auf die vierreihigen Charakteristiken beschränkt; dass vielmehr ein den §§ 3., 5. völlig analoger Uebergang von diesen zu den Systemen fünfreihiger Charakteristiken führt, von denen dann solche von 9 ungeraden Charakteristiken mit ungerader Summe hervortreten, welche sich auch als Systeme von 10 mit Summe (0) auffassen lassen. Auch auf diese Erweiterungen der Theorie gedenke ich bei einer späteren Gelegenheit einzugehen.

---

§ 1.

Definition der Charakteristiken und Gruppen.

Unter *Charakteristik* (α) verstehe ich hier einen vierreihigen Zahlencomplex

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & n_3^\alpha & n_4^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & m_3^\alpha & m_4^\alpha \end{pmatrix},$$

in welchem jede Zahl m_a^α oder n_a^α beliebig einen der Werthe 0 oder 1 annehmen kann. Insbesondere sei

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als *Summe* zweier Charakteristiken

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & n_3^\alpha & n_4^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & m_3^\alpha & m_4^\alpha \end{pmatrix}, \quad (\beta) = \begin{pmatrix} n_1^\beta & n_2^\beta & n_3^\beta & n_4^\beta \\ m_1^\beta & m_2^\beta & m_3^\beta & m_4^\beta \end{pmatrix}$$

sei der Ausdruck bezeichnet:

$$(\alpha) + (\beta) = (\alpha\beta) = \begin{pmatrix} n_1^{\alpha\beta} & n_2^{\alpha\beta} & n_3^{\alpha\beta} & n_4^{\alpha\beta} \\ m_1^{\alpha\beta} & m_2^{\alpha\beta} & m_3^{\alpha\beta} & m_4^{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

wo

$$\left.\begin{aligned} n_a^{\alpha\beta} &\equiv n_a^\alpha + n_a^\beta \\ m_a^{\alpha\beta} &\equiv m_a^\alpha + m_a^\beta \end{aligned}\right\} \pmod{2}.$$

Ferner sei (α) *gerade* oder *ungerade* genannt, je nachdem

$$\sum_{a=1}^{a=4} n_a^\alpha m_a^\alpha \equiv 0, \text{ oder } \equiv 1, \pmod{2}.$$

Zur Abkürzung schreibe ich im Folgenden in der Regel $\sum n^\alpha m^\beta$ für

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=4} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} m_{\mathfrak{a}}^{\beta}.$$

Es giebt im Ganzen hier 256 Charakteristiken, von denen 136 gerade, 120 ungerade sind.

Ueber die Zerlegungen der Charakteristiken in Summen von je zweien, insbesondere von je zwei *ungeraden*, existirt eine Reihe von Sätzen, welche in allgemeiner Form für n-reihige Charakteristiken von C. Jordan, „Traité des substitutions etc.“, pag. 229—236, ausgesprochen worden sind. Für 3-reihige Charakteristiken sind diese Sätze auch in Weber's „Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3“, pag. 19—24, enthalten. Ich werde für die 4-reihigen Charakteristiken diese Sätze hier unter Anschluss an die Terminologie und den Beweisgang der letzteren Arbeit geben.

I. *Jede Charakteristik*, (0) *ausgenommen*, *lässt sich auf* 128 *Arten in die Summe zweier zerlegen; auf* 64 *Arten in die Summe einer geraden und einer ungeraden Charakteristik; auf* 36 *Arten in die Summe zweier geraden*, *auf* 28 *Arten in die Summe zweier ungeraden Charakteristiken.*

Das System von 28 Paaren ungerader Charakteristiken, in welche jede Charakteristik (α), (0) ausgenommen, zerlegt werden kann, sei als *Gruppe* bezeichnet und dieser Gruppe ebenfalls eine *Gruppen-Charakteristik*, $[\alpha]$, beigelegt. Sei

$$(\alpha) = (a_1) + (a_2) = (a_1') + (a_2') = \cdots,$$

wo (a_1), (a_2), $(a_1')\ldots$ ungerade sind, so sagen wir, dass (a_1), (a_2), $(a_1')\ldots$ in der Gruppe $[\alpha]$ *enthalten* sind, und zwar (a_1) und (a_2) *gepaart*. Es giebt 255 Gruppen.

§ 2.

Beziehungen zwischen mehreren Gruppen.

In dem gegenseitigen Verhalten zweier Gruppen $[g]$ und $[h]$ sind *zwei* Fälle zu unterscheiden:

$$\text{A)} \quad K = K_{g,h} = \sum_{\mathfrak{a}} \left(n_{\mathfrak{a}}^{g} m_{\mathfrak{a}}^{h} + n_{\mathfrak{a}}^{h} m_{\mathfrak{a}}^{g}\right) \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2)$$

$$\text{B)} \quad K = K_{g,h} \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2):$$

II. *Zwei Gruppen*, *welche in der Beziehung* $K \equiv 1$ *stehen*, *enthalten* 28 *beiden gemeinsame Charakteristiken*, *die in keiner der beiden Gruppen gepaart sind. Jedes Paar einer Gruppe enthält also eine Charakteristik*, *welche zugleich in der zweiten Gruppe vorkommt.*

Zwei Gruppen, *welche in der Beziehung* $K \equiv 0$ *stehen*, *haben* 24

Charakteristiken gemein, die in jeder der beiden Gruppen gepaart sind, so dass von einem Paar einer Gruppe entweder beide oder keine Charakteristiken in der zweiten Gruppe vorkommen. Die 24 Charakteristiken zerfallen in 6 Systeme von je 4.

Sei $[k]$ eine dritte Gruppe, für welche $(k) = (g) + (h)$, d. h.

$$(g) + (h) + (k) = (0).$$

Man findet dann auch:

$$K_{g,h} \equiv \sum (n^g m^g + n^h m^h + n^k m^k),$$

so dass auch $[g]$ und $[k]$, ferner $[h]$ und $[k]$ dieselbe Beziehung A), bez. B) haben, wie $[g]$ und $[h]$. Die Beziehung A) findet also statt, wenn von den drei Charakteristiken (g), (h), (k) keine oder zwei gerade sind, die B), wenn eine oder drei derselben gerade sind. Sei nun (a_1), (b_1) ein Paar der Gruppe $[g]$, so wird

$$\sum n^{h a_1} m^{h a_1} + \sum n^{h b_1} m^{h b_1}$$

im Falle A) $\equiv 1$, im Falle B) $\equiv 0$, was, mit Hülfe einer einfachen Abzählung der überhaupt in $[g]$, $[h]$, $[k]$ vorkommenden Charakteristiken, den Satz II. ergiebt.

Man hat so für $K \equiv 1$:

$$\begin{aligned}(g) &= (a_1 b_1) = (a_2 b_2) = \cdots = (a_{28} b_{28}),\\ (h) &= (a_1 c_1) = (a_2 c_2) = \cdots = (a_{28} c_{28}),\\ (k) &= (b_1 c_1) = (b_2 c_2) = \cdots = (b_{28} c_{28});\end{aligned}$$

für $K \equiv 0$ aber:

$$\begin{aligned}(g) &= (a_1 b_1) = (a_2 b_2) = \cdots = (a_{13} b_{13}) = \cdots,\\ (h) &= (a_1 a_2) = (b_1 b_2) = \cdots = (a'_{13} b'_{13}) = \cdots,\\ (k) &= (b_1 a_2) = (a_1 b_2) = \cdots = (a''_{13} b''_{13}) = \cdots,\end{aligned}$$

wo die 3 Gruppen des ersten *Tripels* keine Charakteristik gemein haben und zusammen nur 84 der Charakteristiken überhaupt enthalten; die 3 Gruppen des zweiten *Tripels* aber alle ungeraden Charakteristiken enthalten und zwar 24 unter ihnen gemeinsam.

Durch die Lösungen der Congruenzen $K_{g,h} \equiv 1$ und $K_{g,h} \equiv 0$ oder direct aus Satz I. ziehen wir noch die Schlüsse: dass zu jeder Gruppe $[g]$ noch 128 Gruppen $[h]$ gefunden werden können, welche zu $[g]$ in der Beziehung $K_{g,h} \equiv 1$ stehen; und dass 126 Gruppen $[h]$ existiren, welche die Beziehung $K_{g,h} \equiv 0$ zu $[g]$ haben (indem hierbei die Lösungen (g) und (0) auszuschliessen sind). Je zwei der so gefundenen $[h]$, $[h]$ und $[k]$, bilden aber mit $[g]$ eines der vorhin betrachteten *Tripel*, und von diesen Tripeln der Art A) existiren $\frac{1}{6} \cdot 128 \cdot 255$, von den Tripeln der Art B) $\frac{1}{6} \cdot 126 \cdot 255$.

Wir beweisen weiter den Satz:

III. *Drei Gruppen* $[g]$, $[g']$, $[g'']$, *von denen je zwei die Beziehung* $K \equiv 1$ *zu einander haben, sind entweder drei Gruppen eines Tripels der Art* A) *und haben dann keine allen dreien gemeinsame Charakteristik; oder aber, die drei Gruppen haben* 16 *Charakteristiken gemeinsam und die entsprechenden Zerlegungen sind von der Art:*

$$(g) = (a_1 b_1) = \cdots = (a_{12} b_{12}) = (a_{13} b_{13}) = \cdots = (a_{28} b_{28}),$$
$$(g') = (a_1 b_1') = \cdots = (a_{12} b_{12}') = (a_{13} b_{13}') = \cdots = (a_{28} b_{28}'),$$
$$(g'') = (b_1 b_2') = (b_2 b_1') = \cdots = (b_{11} b_{12}') = (b_{12} b_{11}') = (a_{13} b_{13}') = \cdots = (a_{28} b_{28}').$$

Denn aus den Zerlegungen von (g) und (g') folgt:

$$(gg') = (b_1 b_1') = (b_2 b_2') = \cdots = (b_{28} b_{28}').$$

Aber die Gruppen $[g'']$ und $[gg']$ stehen, wenn sie nicht identisch sind, zu einander in der Beziehung $K \equiv 0$, da

$$\sum (n^{g''} m^{gg'} + n^{gg'} m^{g''}) \equiv \sum (n^{g''} m^{g} + n^{g} m^{g''}) + \sum (n^{g''} m^{g'} + n^{g'} m^{g''}) \equiv 0;$$

daher muss dann die Gruppe $[g'']$ nach Satz II. 12 der in $[gg']$ enthaltenen b_ϱ und die entsprechenden 12 der b_ϱ' gepaart enthalten, und keine weiteren, wobei nicht zwei der b_ϱ unter sich in $[g'']$ gepaart sein können, wegen der Beziehung $K \equiv 1$ von $[g'']$ zu $[g]$. Dies ergiebt direct die ersten 12 oben angegebenen Paare von $[g'']$; und die letzten 16 Paare folgen aus der angenommenen Beziehung von $[g'']$ zu $[g]$ und $[g']$ nach Satz II.

§ 3.

Uebergang von 3-reihigen zu 4-reihigen Charakteristiken.

Es ist zur Verification der folgenden Schlussreihen bequem, ein übersichtliches Bildungsgesetz für alle Charakteristiken zu haben. Eine solche einfache Darstellung ergiebt sich, wenn man die für 3-reihige Charakteristiken existirenden Beziehungen (s. Weber's Schrift) zu Grunde legt. Ich fasse diese Beziehungen hier zusammen:

Seien hier unter (π), (α_ϱ) *dreireihige* Charakteristiken verstanden. Ein 7-System

$$(\pi) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_7)$$

wird dann als ein *vollständiges* System bezeichnet, wenn:

a) jedes der (α_ϱ) ungerade,

b) die Summe irgend 3 der (α_ϱ), d. h. $(\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau)$, gerade,

c) die Summe irgend 5 der (α_ϱ), d. h. $(\pi \alpha_\varrho \alpha_\sigma)$, ungerade,

d) die Summe (π) der 7 (α_ϱ) gerade ist,

wobei ϱ, σ, τ, immer von einander verschieden anzunehmen sind.

Die Eigenschaften a) und b) oder a) und c) genügen übrigens schon zur Definition. Dabei werden die (α_ϱ), $(\pi\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ alle von einander verschieden, ebenso die (π), $(\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$. Im Ganzen giebt es 8.36 solcher Systeme, welche in 36 Klassen zu je 8 zerfallen, indem je 8 zur selben geraden Summe führen. Aus dem obigen Systeme ergeben sich die zugehörigen 7 weiteren Systeme durch Bildung von

$$(\pi) = (\alpha_1) + (\pi\alpha_1\alpha_2) + \cdots + (\pi\alpha_1\alpha_7)'$$

und durch Vertauschung der α_ϱ; ein System einer zweiten Klasse durch Bildung von:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\pi\alpha_1\alpha_2) + (\pi\alpha_3\alpha_4) + (\pi\alpha_3\alpha_5) + (\pi\alpha_3\alpha_6) + (\pi\alpha_3\alpha_7).$$

Daher ist es leicht, aus irgend einem System, für das man etwa

$$(0) = \begin{pmatrix}111\\111\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}001\\011\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}101\\100\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}100\\101\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}110\\010\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}010\\110\end{pmatrix}$$

wählen mag, alle anderen abzuleiten.

Um nun den Uebergang auf unsere 4-reihigen Charakteristiken zu machen, sei vor jede 3-reihige Charakteristik (α) noch eine Reihe $\begin{smallmatrix}\lambda\\\mu\end{smallmatrix}$ gesetzt, wo λ und μ die Werthe 0 oder 1 annehmen können, und dies mit

$$(\beta) = \begin{pmatrix}\lambda & \\ \mu & \alpha\end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Wir bilden dann aus einem beliebigen vollständigen System dreireihiger Charakteristiken

(1) $$(\pi) = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_7)$$

das 7-System 4-reihiger Charakteristiken:

(2) $$\begin{pmatrix}0 & \\ 0 & \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}0 & \\ 0 & \alpha_7\end{pmatrix},$$

das bezeichnet sei mit:

(2′) $$(p) = (\beta_1) + \cdots + (\beta_7).$$

Sei ferner:

$$\begin{pmatrix}0 & 000\\1 & 000\end{pmatrix} = (r) \qquad \begin{pmatrix}1 & 000\\0 & 000\end{pmatrix} = (s).$$

Die oben angegebenen Eigenschaften a) bis d) liefern dann für unser 7-System (2′) sogleich folgende Eigenschaften:

ungerade sind die Charakteristiken:

(4) (β_ϱ), $(r\beta_\varrho)$, $(s\beta_\varrho)$, $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(pr\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(ps\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, (prs);

gerade sind:

(4′) (p), (pr), (ps), $(rs\beta_\varrho)$, $(prs\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, $(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, $(s\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$.

Diese Ausdrücke sind auch alle von einander verschieden, was wir an einer allgemeineren Darstellung in § 5. noch zu zeigen Gelegenheit haben werden; und sie liefern *alle* unsere Charakteristiken. Man kann dieselben, indem man

$$(prs) = (\beta_8) \tag{5}$$

setzt und von dem 8-System

$$(rs) = (\beta_1) + (\beta_2) + \cdots + (\beta_8) \tag{6}$$

ausgeht, auch so darstellen:

ungerade:

$$(\beta_\varrho),\ (rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau),\ (pr\beta_\varrho\beta_\sigma),\ (ps\beta_\varrho\beta_\sigma); \tag{7}$$

gerade:

$$(pr),\ (ps),\ (rs\beta_\varrho),\ (\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau),\ (pr\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau\beta_\zeta) = (ps\beta_{\varrho'}\beta_{\sigma'}\beta_{\tau'}\beta_{\zeta'}), \tag{7'}$$

wo die Indices $\varrho\sigma\ldots$ die Werthe $1, \ldots 8$ anzunehmen haben.

Das 8-System (6) hat also, wie das 7-System (2′) die Eigenschaft, dass irgend *eine* oder die Summe von fünf Charakteristiken des Systems *ungerade* wird; die Summe von *drei* oder *sieben* derselben aber *gerade* ist, während der Charakter einer Summe einer *geraden* Zahl von Charakteristiken des Systems unwesentlich und unbestimmt ist; was genau die Eigenschaften a) .. d) des Systems (1) waren.

Man hätte auch aus dem 7-System (1) ein 7-System 4-reihiger Charakteristiken durch die Operation ableiten können:

$$\begin{pmatrix}1 & \\ 0 & \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}1 & \\ 0 & \alpha_7\end{pmatrix}.$$

Sei dieses wieder bezeichnet mit:

$$(p) = (\beta_1) + \cdots + (\beta_7),$$

und sei hier

$$(r) = \begin{pmatrix}1\,0\,0\,0\\ 0\,0\,0\,0\end{pmatrix}, \quad (s) = \begin{pmatrix}1\,0\,0\,0\\ 1\,0\,0\,0\end{pmatrix},$$

so würde auch dieses 7-System noch die Eigenschaften (4) und (4′) haben, und hierdurch, oder durch Bildung des entsprechenden 8-Systems (6), vermöge (7) oder (7′) eine Darstellung aller Charakteristiken liefern.

Als solches 8-System mag man z. B. nehmen:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\,0\,0\,0\\ 1\,0\,0\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,1\,1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 1\,0\,0\\ 0\ \ 1\,0\,1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 0\,1\,0\\ 0\ \ 1\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 1\,1\,1\\ 0\ \ 1\,1\,1\end{pmatrix}\\ + \begin{pmatrix}1\,0\,1\,1\\ 0\,0\,0\,1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 1\,0\,1\\ 0\ \ 1\,0\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 1\,1\,0\\ 0\ \ 0\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ \ 0\,0\,0\\ 1\ \ 0\,0\,0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

für welches:

$$(pr) = (0), \quad (ps) = \begin{pmatrix}0\,0\,0\,0\\ 1\,0\,0\,0\end{pmatrix} = (rs) = (q),$$

so dass in diesem speciellen 8-Systeme sich alle ungeraden Charakteristiken durch

$$(\beta_\varrho),\ (\beta_\varrho\beta_\sigma),\ (q\beta_\varrho\beta_\sigma),\ (q\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau);$$

die geraden Charakteristiken durch

$$(0),\ (q),\ (q\beta_\varrho),\ (\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau),\ (\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau\beta_\zeta),\ (q\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau\beta_\zeta)$$

ausdrücken. Dieses specielle System hat also die Eigenschaft, dass sich auch der Charakter der Summe einer geraden Zahl seiner Charakteristiken bestimmen lässt; und es kann desshalb ohne Weiteres durchaus an Stelle von *Tafeln* für die Charakteristiken und ihre Gruppirungen angewandt werden. So ist z. B. die Gruppe $[\beta_1]$ gegeben durch die Zerlegungen:

$$(\beta_1) = (\beta_\varrho) + (\beta_1\beta_\varrho) = (q\beta_1\beta_\varrho\beta_\sigma) + (q\beta_\varrho\beta_\sigma),$$

wo ϱ, σ die Werthe $2, 3, \ldots, 8$ anzunehmen haben.

Ausser diesem Vortheil können wir aus diesen specielleren Systemen auch noch die wesentlichen Eigenschaften erschliessen, welche wir von den allgemeineren Systemen vierreihiger ungerader Charakteristiken zu fordern haben. Wir verallgemeinern insbesondere die in (4) angegebene Eigenschaft, dass zwei Gruppen $[r]$ und $[s]$ existiren, welche die 7 Charakteristiken des 7-Systems gemeinsam enthalten, indem wir zunächst über die Gruppirung der 28 Charakteristiken, welche zwei Gruppen, die in Beziehung $K \equiv 1$ stehen, gemein haben, einige Sätze aufstellen. Es wird daraus hervorgehen, dass für solche 28 Charakteristiken dieselben Gesetze gelten, wie für die 28 dreireihigen ungeraden Charakteristiken.

§ 4.

Gruppirung der zwei Gruppen von der Beziehung $K \equiv 1$ gemeinsamen Charakteristiken.

IV. *Drei Gruppen* $[r]$, $[s]$, $[t]$, *von denen* $[r]$ *und* $[s]$ *die Beziehung* $K \equiv 1$, $[r]$ *und* $[t]$, *sowie* $[s]$ *und* $[t]$ *aber die Beziehung* $K \equiv 0$ *zu einander haben, enthalten* 12 *Charakteristiken gemeinsam, die in* $[t]$ *in* 6 *Paare vertheilt sind. Zu gegebenen* $[r]$, $[s]$ *giebt es* 63 *solcher Gruppen* $[t]$; *und die entsprechenden Zerlegungen sind von der Art:*

$$\begin{aligned}
(r) &= (\beta_1\gamma_1) = \cdots\cdots\cdots\cdots = (\beta_{28}\gamma_{28}),\\
(s) &= (\beta_1\delta_1) = \cdots\cdots\cdots\cdots = (\beta_{28}\delta_{28}),\\
(t) &= (\beta_1\beta_7) = \cdots = (\beta_6\beta_{12}) = (\gamma_1\gamma_7) = \cdots = (\gamma_6\gamma_{12})\\
&= (\delta_1\delta_7) = \cdots = (\delta_6\delta_{12}) = (\varepsilon_1\varepsilon_1') = \cdots = (\varepsilon_{10}\varepsilon_{10}').
\end{aligned}$$

Denn $[t]$ muss, nach II., 12 der Grössen (β_ϱ) enthalten. Keines der (β_ϱ) kann dabei mit einem der (δ_σ) gepaart sein, weil sonst auch:

$$(t) = (\beta_\varrho \gamma_\sigma) = (\beta_\varrho \delta_\tau),$$

also $(\gamma_\sigma) = (\delta_\tau)$ wäre, was nicht der Fall ist. Dies giebt die Zerlegungen von (t). Alle Gruppen $[t]$ erhält man also, indem man alle Combinationen $(\beta_\varrho \beta_\sigma)$ bildet, von denen je 6 dasselbe $[t]$ liefern, im Ganzen also $\frac{1}{6} \frac{28 \cdot 27}{2} = 63$ Gruppen $[t]$.

Untersucht man nun das gegenseitige Verhalten dieser 63 Gruppen $[t]$, $[t']$, ..., die zu $[r]$ und $[s]$ die Beziehung $K \equiv 0$ haben, indem man immer nur auf diejenigen 6 Paare jeder Gruppe achtet, deren Charakteristiken in $[r]$ und $[s]$ enthalten sind, so gelten die Betrachtungen, welche das Verhalten der 63 Gruppen 3-reihiger Charakteristiken liefern (vgl. Weber's Schrift), auch völlig für die obigen Gruppen $[t]$, $[t']$, ... Man hat daher für diese eine Reihe von Sätzen, die ich hier entwickle, indem ich dabei immer unter $[r]$, $[s]$ zwei Gruppen von der Beziehung $K \equiv 1$, unter (β_ϱ) die $[r]$ und $[s]$ gemeinsamen Charakteristiken, unter $[t]$, $[t']$ ... Gruppen verstehe, die zu $[r]$ und $[s]$ die Beziehung $K \equiv 0$ haben:

V. *Zwei der* 63 *Gruppen* $[t]$, $[t']$, *die untereinander in der Beziehung* $K \equiv 1$ *stehen, enthalten* 6 *gemeinsame Charakteristiken* (β_ϱ), *die in keiner der beiden Gruppen gepaart sind.*

Zwei solche Gruppen $[t]$, $[t']$, *die in der Beziehung* $K \equiv 0$ *stehen, enthalten* 4 *gemeinsame Charakteristiken* (β_ϱ), *die zu jeder der beiden Gruppen gepaart sind.*

Ein Tripel $[t]$, $[t']$, $[t'']$, für welches

$$(t) + (t') + (t'') = (0),$$

enthält 18 der (β_ϱ) und zwar keine den 3 Gruppen gemeinsame Charakteristik, wenn dieselben zu einander die Beziehung $K \equiv 1$ haben; enthält aber alle Charakteristiken (β_ϱ) und zwar 4 von ihnen, die allen 3 Gruppen gemeinsam sind, wenn diese die Beziehung $K \equiv 0$ haben.

Drei Gruppen $[t]$, $[t']$, $[t'']$, die in der Beziehung $K \equiv 1$ zu einander stehen und nicht *einem* Tripel angehören, haben 4 der Charakteristiken (β_ϱ) gemein.

Die Beweise sind genau, wie bei Satz II. und III.

VI. *Die Summe dreier Charakteristiken* (β_ϱ) *einer Gruppe* $[t]$, *von denen keine zwei in* $[t]$ *gepaart sind, ist immer eine gerade Charakteristik.*

Denn sei

$$(t) = (a_1 b_1) = (a_2 b_2) = (a_3 b_3) = \cdots,$$
$$(t') = (a_1 a_2) = (b_1 b_2) = \cdots$$

wo die a_1, a_2, b_1, ... aus den (β_ϱ) genommen sind. Hier stehen $[t]$, $[t']$ in der Beziehung $K \equiv 0$ zu einander. Wäre nun etwa $(a_1 a_2 a_3)$ ungerade, so würde (a_3) ausser $[t]$ auch $[t']$ angehören, und $[t]$ und $[t']$ hätten 5 der (β_ϱ) gemein, was nach V. nicht der Fall ist.

VII. *Die Summe der 28 Charakteristiken* (β_ϱ), *welche* $[r]$ *und* $[s]$ *gemein sind, ist gleich* (0).

Denn sei $[t]$, $[t']$, $[t'']$ ein Tripel von der Beziehung $K\equiv 0$, für welches also

$$(t)+(t')+(t'')=(0).$$

Addirt man die 6 Paare von (t), welche die (β_ϱ) enthalten, zu den analogen von (t') und von (t''), so giebt die linke Seite (0), die rechte Seite aber eine Summe, in welcher jede der 28 Grössen (β_ϱ) einmal oder dreimal vorkommt; was den Satz giebt.

Ich schliesse hier noch eine Bemerkung an, die ebenso für die 28 3-*reihigen* ungeraden Charakteristiken gilt, und die sich auf Systeme bezieht, welche bisher auch in dieser Theorie noch nicht beachtet worden sind. Aus dem aus den (β_ϱ) gebildeten Tripel von Gruppen:

$$\begin{aligned}(t)&=(a_1b_1)=(a_2b_2)=(a_3b_3)=(a_4b_4)=(a_5b_5)=(a_6b_6),\\(t')&=(a_1a_2)=(b_1b_2)=(a_3'b_3')=(a_4'b_4')=(a_5'b_5')=(a_6'b_6'),\\(t'')&=(a_1b_2)=(a_2b_1)=(a_3''b_3'')=(a_4''b_4'')=(a_5''b_5'')=(a_6''b_6'')\end{aligned}$$

kann man nämlich zunächst Ausdrücke von je 4 Charakteristiken bilden, deren Summe (0) ist, und aus diesen Ausdrücken weiter ein System von 7 derselben, welches *alle* Charakteristiken (β_ϱ) enthält und jede nur einmal, z. B.

$$(a_1b_1a_2b_2),\ (a_3b_3a_4b_4),\ (a_5b_5a_6b_6),\ (a_3'b_3'a_4'b_4'),\ (a_5'b_5'a_6'b_6'),$$
$$(a_3''b_3''a_4''b_4''),\ (a_5''b_5''a_6''b_6'').$$

Solcher 7-Systeme findet man 27 bei gegebenem Tripel $[t]$, $[t']$, $[t'']$, zu jedem System aber 7 Tripel, von denen überhaupt $\frac{1}{6}\cdot 30\cdot 63$ existiren, also im Ganzen aus den (β_ϱ)

$$\tfrac{1}{6}\cdot 30\cdot 63\cdot 27\cdot \tfrac{1}{7}=1215$$

Systeme. Analoge Systeme von 30 Ausdrücken folgen auch für alle 120 ungeraden Charakteristiken aus den Tripeln mit $K\equiv 0$ des Satzes II.

§ 5.

Die vollständigen 7-Systeme ungerader Charakteristiken.

VIII. *Seien* $[r]$ *und* $[s]$ *zwei Gruppen, welche in der Beziehung* $K_{r,s}\equiv 1$ *stehen, so giebt es 36 gerade Charakteristiken* (p), *für welche* (pr) *und* (ps) *gerade sind.*

Denn sei $(r)=(p)+(q)$ irgend eine der 36 Zerlegungen von (r) in die Summe zweier geraden Charakteristiken, so folgt aus den Congruenzen

$$\sum (n^r m^s + n^s m^r)\equiv 1,\quad \sum n^p m^p \equiv \sum n^q m^q \equiv 0$$

auch

$$\sum n^{sp} m^{sp} + \sum n^{sq} m^{sq} \equiv 1,$$

so dass entweder (sp) oder (sq) gerade sein muss.

IX. *Sei* (p) *eine der in* VIII. *angegebenen geraden Charakteristiken,* (β_1), (β_2), $\cdots$, (β_{28}) *die* $[r]$ *und* $[s]$ *gemeinsamen Charakteristiken, so steht jede Gruppe* $[p\beta_\varrho]$ *zu* $[r]$ *und zu* $[s]$ *in der Beziehung* $K \equiv 0$, so dass die Darstellung des Satzes IV. gilt.

Denn ist $(r) = (\beta_\varrho \gamma_\varrho)$, so kann $[p\beta_\varrho]$ weder (β_ϱ) noch (γ_ϱ) enthalten, da sonst $(p\beta_\varrho\beta_\varrho) = p$, oder $(p\beta_\varrho\gamma_\varrho) = (pr)$ ungerade sein müsste; und ebenso in Bezug auf $[s]$.

Aus dieser Darstellung der $(p\beta_\varrho)$ folgen nun direct, wie bei den 3-reihigen Charakteristiken, die 7-Systeme:

X. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* IX. *lassen sich auf acht verschiedene Weisen sieben der* (β_ϱ):

$$(\beta_1),\ (\beta_2),\ \cdots,\ (\beta_7),$$

finden, welche die Eigenschaft haben, dass alle $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$ *ungerade sind.*

Sei nämlich (β_1) eine beliebige der 28 (β_ϱ). Die Gruppe $[p\beta_1]$ sei, indem wir immer nur die die (β_ϱ) enthaltenden Paare beachten:

$$(p\beta_1) = (\beta_2\beta_2') = (\beta_3\beta_3') = \cdots = (\beta_7\beta_7'),$$

wo auch die (β_ϱ'), (β_ϱ'') aus den (β_ϱ) genommen sind. Sei weiter (β_2) eine beliebige der zur Rechten stehenden 12 Charakteristiken, so enthält die Gruppe $[p\beta_2]$ die Charakteristik (β_2'), nicht aber (β_2), hat also zu $[p\beta_1]$ die Beziehung $K \equiv 0$, und man hat, nach V., eine Darstellung der Art:

$$(p\beta_2) = (\beta_1\beta_2') = (\beta_3\beta_3'') = \cdots = (\beta_7\beta_7'').$$

Hiermit sind zu (β_1), (β_2) 5 weitere Charakteristiken (β_3), $\cdots$, (β_7) eindeutig bestimmt, wobei schon (β_2), $\cdots$, (β_7) der Gruppe $[p\beta_1]$, (β_1), (β_3), $\cdots$, (β_7) der Gruppe $[p\beta_2)$ angehören. Ferner stehen die 3 Gruppen $[p\beta_1]$, $[p\beta_2]$, $[p\beta_3]$ je in der Beziehung $K \equiv 1$, ohne dass die Summe der entsprechenden Charakteristiken, wie die obige Zerlegung von $(p\beta_1)$ zeigt, $= (0)$ sein kann; daher haben diese 3 Gruppen nach Satz V. vier der (β_ϱ) gemein, unter denen aber weder (β_3), noch (β_2') (wegen $(p\beta_3) = (\beta_2\beta_3'')$) enthalten sein kann. Hieraus folgt, dass die Charakteristiken (β_4), $\cdots$, (β_7) in der Gruppe $[p\beta_3]$ enthalten sein müssen, und ebenso weiter, dass (β_5), (β_6), (β_7) auch in $[p\beta_4]$ enthalten sind, etc.

Von derselben Charakteristik (p) ausgehend, gelangt man, indem man (β_1) fest lässt, dagegen statt (β_2) die Charakteristik $(\beta_2') = (p\beta_1\beta_2)$ als zweite wählt, zu einem zweiten 7-System, und indem man auch statt (β_1) irgend ein anderes der (β_ϱ) nimmt, im Ganzen zu $\frac{2 \cdot 28}{7} = 8$ Systemen, welche demselben (p) zugeordnet sind, und die sich so schreiben:

$$(\beta_1),\ (\beta_2),\ \cdots,\ (\beta_7),$$
$$(\beta_1),\ (p\beta_1\beta_2),\ \cdots,\ (p\beta_1\beta_7),$$

und 5 weitere, indem man in dem letzten System den Index 1 mit den Indices 2, $\cdots$, 7 vertauscht. Diese 8 Systeme sind in der That alle von einander verschieden, wie der nächstfolgende Satz zeigt.

Für ein solches 7-System (β_1), (β_2), $\cdots$, (β_7) gelten genau die in § 2. unter a), b), c), d) angegebenen Gesetze, die in dem folgendem Satze zusammengestellt sind, indem unter ϱ, σ, τ, $\cdots$ von einander verschiedene Indices verstanden sind, welche die Werthe 1, 2, $\cdots$, 7 annehmen sollen:

XI. *Die* 35 *Charakteristiken* $(\beta_\varrho \beta_\sigma \beta_\tau)$, *die aus einem* 7-*System gebildet sind, sind alle gerade, und von einander und von* (p) *verschieden. Die Summe der* 7 *Charakteristiken des* (p) *zugeordneten Systems ist gerade und gleich* (p). *Die Charakteristiken* (β^ϱ) *und die Summen von je* 5 *derselben, oder die* $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$, *sind alle ungerade und von einander verschieden, und sie stellen alle* 28 *den beiden Gruppen* $[r]$ *und* $[s]$ *gemeinsamen Charakteristiken vor.*

Denn es können z. B. die beiden ungeraden Charakteristiken $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(p\beta_\tau\beta_\zeta)$ nicht einander gleich sein, da nach Satz VI. $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, dessen Elemente ungepaart in $[p\beta_\zeta]$ vorkommen, gerade ist und nicht $=(\beta_\zeta)$ sein kann. Ebensowenig $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)=(\beta_\tau)$, da $(p\beta_\varrho)$ nicht $=(\beta_\sigma\beta_\tau)$. Dass $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$ wieder zu den (β) gehört, giebt der Satz IX. Aus VIII. folgt dann:

$$\sum_{\varrho,\sigma}(p\beta_\varrho\beta_\sigma)+\sum_\varrho(\beta_\varrho)=(0), \qquad \left(\begin{matrix}\varrho,\sigma=1,\cdots,7\\ \sigma>\varrho\end{matrix}\right),$$

oder

$$(p)+\sum_\varrho(\beta_\varrho)=(0).$$

Hieraus folgt weiter, dass auch keine zwei der geraden Charakteristiken $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ einander gleich sein können, da z. B. für

$$(\beta_1\beta_2\beta_3)=(\beta_4\beta_5\beta_6)$$

auch

$$(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6)=(p\beta_7)=0$$

sein müsste, etc. Ebensowenig kann $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)=(p)$ sein.

Zu diesen Beziehungen, welche die Charakteristiken eines 7-Systems gegen einander haben, kommen nun noch solche zu den beiden Charakteristiken (r) und (s), aus deren Gruppe sie erhalten sind. Von den darüber geltenden Sätzen erstreckt sich der *erste* der hier folgenden Sätze nicht nur auf die 7 Charakteristiken des 7-Systems, sondern auf alle in $[r]$ und $[s]$ enthaltenen (β_ϱ):

XII. *Die Charakteristiken* (prs), $(r\beta_\varrho)$, $(s\beta_\varrho)$ *sind ungerade,* $(rs\beta_\varrho)$ *gerade.*

Denn $(r\beta_\varrho)$ und $(s\beta_\varrho)$ sind ungerade nach der Definition aller (β_ϱ). Sei $(s)=(\beta_\varrho\delta_\varrho)$, so ist $(r\delta_\varrho)$ gerade, da $[r]$ und $[s]$ die Beziehung

$K\equiv 1$ haben sollen; aber es ist $(r\delta_\sigma)=(rs\beta_\varrho)$. Ferner ist (prs) ungerade, weil

$$\sum n^{prs}m^{prs}\equiv\sum n^{pr}m^{pr}+\sum(n^r m^s+n^s m^r)$$
$$+\sum n^{ps}m^{ps}+\sum n^p m^p\equiv 1.$$

XIII. *Die Charakteristiken* $(pr\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(ps\beta_\varrho\beta_\sigma)$ *sind ungerade,* $(prs\beta_\varrho\beta_\sigma)$ *gerade.*

Denn da die Gruppe $[p\beta_\varrho]$ nach der Definition des 7-Systems (β_σ) enthält, und da sie zur Gruppe $[r]$ in der Beziehung $K\equiv 0$ steht, so enthält sie auch $(\gamma_\sigma)=(r\beta_\sigma)$, so dass $(p\beta_\varrho\gamma_\sigma)=(pr\beta_\varrho\beta_\sigma)$ ungerade wird. Aehnlich für $(ps\beta_\varrho\beta_\sigma)$.

Sei weiter $(r)=(\beta_\varrho\gamma_\varrho)$, $(s)=(\beta_\sigma\delta_\sigma)$. Die Gruppen $[s]$ und $[p\gamma_\varrho]$ stehen in der Beziehung $K\equiv 1$, da

$$\sum(n^s m^{p\gamma_\varrho}+n^{p\gamma_\varrho}m^s)\equiv\sum(n^s m^r+n^r m^s)$$
$$+\sum(n^s m^{p\beta_\varrho}+n^{p\beta_\varrho}m^s)\equiv 1,$$

nach Satz IX. Aber die Gruppe $[p\gamma_\varrho]$ enthält (β_σ), da $(pr\beta_\varrho\beta_\sigma)$ ungerade ist, sie kann daher das in $[s]$ damit gepaarte (δ_σ) nicht enthalten, und es muss

$$(p\gamma_\varrho\delta_\sigma)=(prs\beta_\varrho\beta_\sigma)$$

gerade sein.

XIV. *Die Charakteristiken* $(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, $(s\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ *sind gerade,* $(rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ *ungerade.*

Denn da $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ gerade ist, so enthält die Gruppe $[\beta_\varrho\beta_\sigma]$, die zu $[r]$ und $[s]$ die Beziehung $K\equiv 0$ hat, auch nicht $(\gamma_\tau)=(r\beta_\tau)$ und nicht $(\delta_\tau)=(s\beta_\tau)$, so dass $(\beta_\varrho\beta_\sigma\gamma_\tau)=(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ und $(s\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ gerade werden.

Ferner enthält die Gruppe $[\beta_\varrho\gamma_\sigma]$ wohl (β_ϱ), nicht aber $(\delta_\varrho)=(s\beta_\varrho)$, da

$$(\beta_\varrho\gamma_\sigma\delta_\varrho)=(rs\beta_\sigma),$$

also gerade ist; steht daher zu $[s]$ in der Beziehung $K\equiv 1$. Da die Gruppe $[\beta_\varrho\gamma_\sigma]$ nun auch (β_τ) nicht enthält, indem $(\beta_\varrho\beta_\tau\gamma_\sigma)=(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ gerade ist, so muss sie $(\delta_\tau)=(s\beta_\tau)$ enthalten, d. h.

$$(\beta_\varrho\gamma_\sigma\delta_\tau)=(rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$$

wird gerade.

XV. *Die ungeraden Charakteristiken*

(prs), (β_ϱ), $(r\beta_\varrho)$, $(s\beta_\varrho)$, $(p\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(pr\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(ps\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$

und die geraden Charakteristiken

(p), (pr), (ps), $(rs\beta_\varrho)$, $(prs\beta_\varrho\beta_\sigma)$, $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, $(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$, $(s\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$

sind alle von einander verschieden und stellen daher alle 120 *ungeraden und* 136 *geraden Charakteristiken vor,* wenn man die (β) aus irgend

einem 7-System nimmt und ϱ, σ, τ von einander verschiedene Werthe von $1, \cdots, 7$ beilegt.

Dass die angegebenen Charakteristiken alle von einander verschieden sind, folgt leicht aus den vorhergehenden Sätzen. So muss $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ von allen $(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ verschieden sein, da $(s)+(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ gerade, $(s)+(r\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ aber ungerade wird, etc.

XVI. *Die 36 geraden Charakteristiken (q) des Satzes* VIII., *für welche (qr) und (qs) gerade sind, sind (p) und die $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$. Zu einem 7-System $(\beta_1), \cdots, (\beta_7)$, das zu $[r]$, $[s]$ gehört, existirt keine dritte Gruppe, welcher alle 7 Charakteristiken angehören.*

Das Erstere wird durch die Darstellung XV. sogleich gezeigt. Sei ferner $[r']$ eine dritte Gruppe, welche die 7 (β_ϱ) enthalte. Entweder müsste nun $[r']$ zu $[r]$ und $[s]$ die Beziehung $K\equiv 0$ haben. Dann enthielte $[r']$ nach IV. die (β) in 6 Paaren, also von den 7 (β_ϱ) wenigstens zwei gepaart, z. B. $(\beta_1\beta_2)$; aber die Gruppe $[\beta_1\beta_2]$ enthält $(\beta_3), \cdots, (\beta_7)$ nicht. Oder $[r']$ hätte die Beziehung $K\equiv 1$ zu $[r]$ und $[s]$; aber dann hätte $[r']$ nach V. nur 4 Charakteristiken (β_ϱ) mit $[r]$ und $[s]$ gemein, oder gar keine, wenn $(r')=(rs)$. Oder es mag endlich $[r']$ zu $[r]$ die Beziehung $K\equiv 1$, zu $[s]$ die Beziehung $K\equiv 0$ haben. Dann hat man, nach IV., für (r') eine Darstellung der Art:

$$(r')=(\beta_\varrho\delta_\sigma)=(\beta_\sigma\delta_\varrho),$$

und 5 ähnliche Doppelpaare, so dass wenigstens eines dieser Doppelpaare *zwei* der $(\beta_1), \cdots, (\beta_7)$ enthalten müsste, z. B.

$$(r')=(\beta_1\delta_2)=(\beta_2\delta_1)=(s\beta_1\beta_2).$$

Aber auch diese Gruppe $[s\beta_1\beta_2]$ enthält nicht $(\beta_3), \cdots, (\beta_7)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Hiernach können wir jetzt alle aus den $[r]$ und $[s]$ gemeinsamen Charakteristiken gebildeten 7-Systeme darstellen. Ein

$$(q)=(\beta_1\beta_2\beta_3)$$

zugeordnetes System erhält man, indem man die Zerlegungen von $(q\beta_1)$ und $(q\beta_2)$ betrachtet, wie folgt:

$$(\beta_1\beta_2\beta_3)=(\beta_1)+(\beta_2)+(p\beta_1\beta_2)+(p\beta_3\beta_4)+(p\beta_3\beta_5)+(p\beta_3\beta_6)+(p\beta_3\beta_7).$$

und die 7 übrigen (q) zugeordneten Systeme aus diesem nach demselben Gesetze, nach dem oben bei X. die 7 weiteren (p) zugeordneten Systeme aus dem ersten

$$(p)=(\beta_1)+(\beta_2)+\cdots+(\beta_7)$$

abgeleitet waren. Im Ganzen ergeben sich so, den 36 geraden Charakteristiken (p) und $(\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ zugeordnet, $8\cdot 36$ von einander verschiedene 7-Systeme aus den 28 Grössen (β_ϱ).

Da ferner nach dem letzten Satze zu einem 7-Systeme auch nur *ein* Paar $[r]$, $[s]$ gehört, so findet man *alle* existirenden 7-Systeme,

und jedes nur einmal, wenn man alle Paare von Gruppen $[r]$, $[s]$ aufstellt, die in der Beziehung $K \equiv 1$ stehen und zu jedem Paar die ihm angehörigen 288 Systeme bildet. Nach dem zu Satz II. Bemerkten giebt es $255 \cdot 64$ solcher Paare von Gruppen $[r]$, $[s]$; also *giebt es überhaupt*

$$255 \cdot 64 \cdot 36 \cdot 8 = 136 \cdot 120 \cdot 36 \cdot 8$$

von einander verschiedene 7-*Systeme.* Zu jedem (p) existiren nämlich noch 120 Paare $[r]$, $[s]$.

Um *alle* diese Systeme ohne Weiteres hinzuschreiben, wäre es nöthig, für die Bezeichnung aller *Gruppen* vorher noch eine andere Darstellung zu geben, als die durch XV. angezeigte, wie $[r]$, $[prs\beta_\varrho]$ etc. Da indessen diese 7-Systeme hier nur als Durchgangspunkt zu den wichtigeren vollständigen 8-Systemen gebraucht werden, die im nächsten Paragraphen behandelt sind, so kann ich zunächst über diese vollständige Darstellung hinweggehen, indem ich bemerke, dass sie in der späteren Darstellung der 8-Systeme inbegriffen ist. Nur einen Theil der 7-Systeme habe ich auch explicite bei dem nun vorzunehmenden Uebergange sogleich anzugeben. Auch andere noch mögliche Definitionen der 7-Systeme, als die durch VIII. und X. gegebenen, werden weiterhin hervorgehen.

§ 6.

Die vollständigen 8-Systeme ungerader Charakteristiken.

Aus einem zu $[r]$, $[s]$ und (p) gehörigen 7-Systeme

$$(p) = (\beta_1) + (\beta_2) + \cdots + (\beta_7)$$

kann man 7 andere 7-Systeme ableiten, welche mit dem ersteren in enger Verbindung stehen.

Wir betrachten an Stelle von $[r]$ und $[s]$ die beiden Gruppen:

$$[r'] = [ps\beta_1], \qquad [s'] = [pr\beta_1],$$

die in der Beziehung $K_{r',s'} \equiv 1$ zu einander stehen, da z. B. von dem Paar

$$(pr\beta_1) = (\beta_2) + (pr\beta_1\beta_2)$$

die Charakteristik (β_2), nicht aber $(pr\beta_1\beta_2)$ in $[ps\beta_1]$ enthalten ist. Eine gerade Charakteristik (p'), für welche $(p'r')$ und $(p's')$ gerade sind, ist

$$(p') = (rs\beta_1),$$

und ein zugehöriges 7-System wird

$$(p') = (rs\beta_1) = (prs) + (\beta_2) + (\beta_3) + \cdots + (\beta_7).$$

Denn dieses System, für $[r']$, $[s']$, (p'), erfüllt alle Bedingungen von VIII. und X., da $(p'prs\beta_\sigma)$ und $(p'\beta_\sigma\beta_\tau)$ (σ und τ von $2, \cdots, 7$) nach XV. ungerade sind.

Man erhält auf diese Weise aus dem ersteren 7-Systeme für $[r]$, $[s]$, (p) sieben solcher Systeme, die aus jenem dadurch entstehen, dass man je eine seiner Charakteristiken, (β_ϱ), ersetzt durch (prs), was ein bez.

$$[ps\beta_\varrho],\quad [pr\beta_\varrho],\quad (rs\beta_\varrho)$$

zugeordnetes 7-System giebt.

Macht man aber nun dieselbe Operation auf irgend eines dieser letzteren 7-Systeme, so erhält man immer nur wieder eines der schon vorher erhaltenen 8 Systeme, und die 7-Systeme gruppiren sich also zu je 8, die zusammen nur 8 Charakteristiken enthalten. Denn die in dem neuen Systeme der (prs) entsprechende Charakteristik, welche an Stelle einer früheren tritt, wird

$$(ps\beta_\varrho)+(pr\beta_\varrho)+(rs\beta_\varrho)=(\beta_\varrho).$$

Mit anderen Worten: *Die* 8 *ungeraden Charakteristiken*

$$(prs),\ (\beta_1),\ (\beta_2),\ \cdots,\ (\beta_7)$$

verhalten sich völlig gleichmässig gegen einander. Wir sind daher darauf geführt, die Eigenschaften eines solchen 8-Systems zu untersuchen.

Von den dem ersten 7-System zugeordneten Zeichen $[r]$, $[s]$, (p) bleiben für das daraus abgeleitete 8-System nur die Summen je zweier, diesen Zeichen entsprechender Charakteristiken erhalten, indem für

$$[r'] = [ps\beta_\varrho],\quad [s'] = [pr\beta_\varrho],\quad (p') = (rs\beta_\varrho)$$

folgt:

$$[r's'] = [rs],\quad (p'r') = (pr),\quad (p's') = (ps).$$

Wir setzen daher im Folgenden:

$$(pr) = (q),\quad (ps) = (q'),\quad [rs] = [qq'] = [g],$$

wo nun (q) und (q') *irgend welche zwei von einander verschiedene gerade* Charakteristiken vorstellen, (g) jede von (0) verschiedene Charakteristik sein kann. Das obige 8-System

$$(prs)+(\beta_1)+(\beta_2)+\cdots+(\beta_7)=(rs)=(qq')=(g)$$

schreiben wir dann, indem wir die 8 Charakteristiken in irgend einer Reihenfolge mit (α_1), (α_2), $\cdots$, (α_8) bezeichnen, so:

$$S_{qq'} = (g) = (\alpha_1)+(\alpha_2)+\cdots+(\alpha_8).$$

Wir nennen dasselbe ein *vollständiges* 8-*System* und sprechen seine wesentlichste Eigenschaft im folgenden Satze aus:

XVII. *Ein vollständiges* 8-*System hat die Eigenschaft, dass jede seiner Charakteristiken oder die Summe von irgend* 5 *derselben ungerade, die Summe von irgend* 3 *oder von irgend* 7 *seiner Charakteristiken aber gerade ist. Es giebt* $255\cdot 36\cdot 64$ *solcher Systeme, welche in* 255 *Classen zerfallen, von denen jede wieder in* 36 *Classen von je* 64 *Systemen zerfällt, den* $255\cdot 36$ *Paaren gerader Charakteristiken entsprechend.*

Denn für das 8-System

$$S_{qq'} = (g) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

sind, nach dem Zusammenhange mit den 8 7-Systemen, also nach XV., die Charakteristiken

$$(\alpha_\varrho), \quad (g\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau) \quad (\varrho,\ \sigma,\ \tau \text{ von einander verschieden})$$

ungerade, die Charakteristiken

$$(g\alpha_\varrho), \quad (\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$$

aber *gerade*. Ferner führen je acht, durch irgend eines derselben eindeutig gegebene, der $255 \cdot 64 \cdot 36 \cdot 8$ 7-Systeme auf *ein* 8-System, so dass man im Ganzen $255 \cdot 64 \cdot 36$ solcher hat. Man kann dann zunächst diejenigen S_g zusammennehmen, welche auf dieselbe Summe (g) führen, so dass man 255 Classen erhält. Jede der 36 Zerlegungen von (g) in die Summe zweier geraden Charakteristiken (q) und (q') giebt dann eine Unterclasse von S_g, indem diese beiden Charakteristiken die in dem folgenden Satze angegebene sie auszeichnende Eigenschaft besitzen, dass für *alle* Charakteristiken des 8-Systems sowohl $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$, als $(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ *ungerade* ist. Für jede Unterclasse S_g, (q), (q') bleiben dann noch 64 Systeme.

Für das vollständige 8-System $S_{qq'}$ gelten noch die weiteren Eigenschaften:

XVIII. *Ungerade sind die Charakteristiken:*

$$(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma), \quad (q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma);$$

gerade die Charakteristiken:

$$(q), \quad (q'), \quad (q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau\alpha_\zeta) = (q'\alpha_{\varrho'}\alpha_{\sigma'}\alpha_{\tau'}\alpha_{\zeta'}).$$

Die ungeraden Charakteristiken

$$(\alpha_\varrho), \quad (qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau), \quad (q\alpha_\varrho\alpha_\sigma), \quad (q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$$

und die geraden

$$(qq'\alpha_\varrho), \quad (\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau), \quad (q), \quad (q'), \quad (q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau\alpha_\zeta)$$

sind alle von einander verschieden und stellen alle 120 *ungeraden und alle* 136 *geraden Charakteristiken vor.*

Dieser Satz ist nur eine Umschreibung von XV. und folgt unmittelbar aus dem Zusammenhange der (α) mit den (β) jenes Satzes. Es folgt aus demselben, dass ausser (q) und (q') keine andere Charakteristik (r) die Eigenschaft hat, alle $(r\alpha_\sigma\alpha_\tau)$ ungerade zu machen.

Um nun mit Hülfe dieser Darstellungsweise der Charakteristiken, die aus irgend einem vollständigen Systeme abgeleitet ist, *alle* existirenden 8-Systeme, sowie alle Gruppen etc. zu bilden, leiten wir zunächst für die Gruppencharakteristiken $[a]$, für die Systemscharakteristiken S_g, sowie für die Summen irgend einer *geraden* Zahl von Charakteristiken eines vollständigen Systems überhaupt, für die alle

der Charakter des Geraden oder Ungeraden unwesentlich ist, noch eine zweite Darstellung ab:

XIX. *Wenn die* (α_ϱ) *ein vollständiges* 8-*System von* (q), (q') *bilden, so sind die Charakteristiken*

(qq'), $(q\alpha_\varrho)$, $(q'\alpha_\varrho)$, $(\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$, $(qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$, $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$, $(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$, $(\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau\alpha_\zeta)$ *alle von einander verschieden und stellen die den* 255 *Gruppen entsprechenden Charakteristiken vor**).

Es ist nur zu zeigen, dass diese 255 Charakteristiken alle unter sich und von (0) verschieden sind; aber dies folgt sogleich aus XVIII. So kann $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$ nicht $=(0)$ sein, weil sonst $(q)=(\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$ würde, etc.

Die Darstellung XVIII. der Charakteristiken und die Darstellung XIX. der Gruppen erlaubt uns nun, sobald *irgend ein* 8-System bekannt ist (z. B. das auf p. 255, für das $(q')=(0)$ ist), sämmtliche Zerlegungen und sämmtliche 7- und 8-Systeme etc. anzuschreiben; was die Aufstellung von besondern Tafeln für diese Zerlegungen durchaus ersetzen kann. So sind die Zerlegungen etwa der Gruppen $[q\alpha_1]$ und $[q'\alpha_1]$:

$$(q\alpha_1)=(\alpha_\sigma)+(q\alpha_1\alpha_\sigma)=(q'\alpha_\sigma\alpha_\tau)+(qq'\alpha_1\alpha_\sigma\alpha_\tau),$$
$$(q'\alpha_1)=(\alpha_\sigma)+(q'\alpha_1\alpha_\sigma)=(q\alpha_\sigma\alpha_\tau)+(qq'\alpha_1\alpha_\sigma\alpha_\tau),\quad(\sigma,\tau \text{ von } 2,\cdots,7)$$

so dass beide Gruppen in der Beziehung $K\equiv 1$ zu einander stehen, etc. Durch diese Verbindung von XVIII. mit XIX. wird also in dieser praktischen Hinsicht ganz dasselbe erreicht, als was das specielle System auf p. 255, in welchem $(q')=0$ ist, also XIX. mit XVIII. identisch wird, leistet**).

Um alle vollständigen 8-Systeme zu erhalten, deren Summe $(g)=(qq')$ ist, mögen wir auf die 7-Systeme zurückgehen, also zunächst alle 64 Paare von Gruppen

$$[r],\ [s]$$

aufsuchen, für die

$$(g)=(rs)$$

und die zugleich in Beziehung $K\equiv 1$ zu einander stehen. Nach XIX. sind es die folgenden Paare:

$$(g)=(q\alpha_\varrho)+(q'\alpha_\varrho)=(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)+(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau),\quad(\varrho,\sigma,\tau \text{ von } 1,\cdots,8).$$

Man hat alsdann, nach dem vorigen Paragraphen, für irgend eines dieser Paare, z. B.

$$[r]=[q\alpha_1\alpha_2\alpha_3],\quad [s]=[q'\alpha_1\alpha_2\alpha_3],$$

*) Ein analoger Satz ist auch bei den 3-reihigen Charakteristiken zur Bildung der Gruppen etc. auszusprechen.

**) In der in der Einleitung citirten Note aus den Erl. Ber. waren nur alle diejenigen 8-Systeme mitgetheilt, für welche $(q')=(0)$ ist.

die 28 gemeinsamen ungeraden Charakteristiken (β) zu bilden, die hier
$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (q q' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_\sigma),\ (q q' \alpha_1 \alpha_3 \alpha_\sigma),\ (q q' \alpha_2 \alpha_3 \alpha_\sigma),\ (q q' \alpha_\sigma \alpha_\tau \alpha_\zeta),$$
$$(\sigma,\ \tau,\ \zeta \text{ von } 3, \cdots, 8),$$
werden; und mag nun für das gerade (p), das auch (pr) und (ps) gerade macht, etwa
$$(p) = (q q' \alpha_4)$$
nehmen, wobei
$$(pr) = (q' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) \quad (ps) = (q \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4), \quad (prs) = (\alpha_4)$$
werden. Ein durch Betrachtung der Gruppen $[p\alpha_1]$ und $[p\alpha_2]$ nach dem vorigen Paragraphen gebildetes 7-System wird dann
$$(p) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (q q' \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_7 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7),$$
aus dem endlich durch Zufügung von $(prs) = (\alpha_4)$ das vollständige 8-System folgt:
$$(q q') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha_4) + (q q' \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_7 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8) + (q q' \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7),$$
zugeordnet den beiden geraden Charakteristiken
$$(pr) = (q' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4), \quad (ps) = (q \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4).$$

Die 36 · 64 vollständigen 8-Systeme, für die die Summe der Charakteristiken $(q q')$ ist, enthalten, wie diese Entwickelung oder die Bedingung des Satzes XVIII., dass $(q q' \alpha_\varrho)$ gerade ist, zeigt, nur 64 der 120 ungeraden Charakteristiken, die
$$(\alpha_\varrho) \text{ und } (q q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau).$$

Indem man nun dieses Verfahren auf *alle* Gruppen $[g]$ anwendet, gelangt man, von irgend einem bestimmten derselben
$$S_{q,q'} = (q q') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$
ausgehend, zu allen vollständigen 8-Systemen, welche im folgenden Satze zusammengestellt werden. Dieselben sind je 2 geraden Charakteristiken (π), (π') zugeordnet, derart, dass, wenn das System mit
$$S_{\pi,\pi'} = (\pi \pi') = (\gamma_1) + (\gamma_2) + \cdots + (\gamma_8)$$
bezeichnet wird, die Charakteristiken
$$(\pi \gamma_\varrho \gamma_\sigma), \quad (\pi' \gamma_\varrho \gamma_\sigma), \quad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma \text{ von } 1, \cdots, 8, \\ \varrho < \sigma \end{pmatrix}$$
alle ungerade sind, $(\pi \pi')$ aber die Summe der 8 Charakteristiken vorstellt. Diese Zeichen (π), (π') werden bei jedem Systeme durch $S_{\pi,\pi'}$ angegeben.

XX. *Die* 36 · 64 *vollständigen* 8-*Systeme, welche* $(q q')$ *zur Summe ihrer Charakteristiken haben, sind:*

$$
\begin{aligned}
(qq') = S_{q,q'} &= (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8) \\
&= (\alpha_1) + (\alpha_2) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_4) + \cdots + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_8) \\
&= (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_4) + (qq'\alpha_1\alpha_3\alpha_4) + (qq'\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \\
&\quad + (qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_7) + (qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_8) + (qq'\alpha_5\alpha_7\alpha_8) + (qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(qq') = S_{q\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\, q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8} &= (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha_4) \\
&\quad + (qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_7) + (qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_8) + (qq'\alpha_5\alpha_7\alpha_8) \\
&\quad + (qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8) \\
&= (\alpha_1) + (\alpha_2) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_4) \\
&\quad + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_5) + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_6) + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_7) \\
&\quad + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_8) \\
&= (\alpha_1) + (qq'\alpha_2\alpha_3\alpha_5) + (qq'\alpha_2\alpha_4\alpha_5) + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_5) \\
&\quad + (qq'\alpha_1\alpha_5\alpha_6) + (qq'\alpha_1\alpha_5\alpha_7) + (qq'\alpha_1\alpha_5\alpha_8) \\
&\quad + (qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8) \\
&= (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_5) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_6) + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_7) \\
&\quad + (qq'\alpha_3\alpha_4\alpha_8) + (qq'\alpha_3\alpha_5\alpha_6) + (qq'\alpha_4\alpha_5\alpha_6) \\
&\quad + (qq'\alpha_1\alpha_7\alpha_8) + (qq'\alpha_2\alpha_7\alpha_8) \\
&= \cdots,
\end{aligned}
$$

wenn man hier noch alle Vertauschungen der 8 Indices 1, 2, $\cdots$, 8 vornimmt.

Bei diesen Vertauschungen liefert das zweite der angegebenen Systeme von $S_{q,q'}$ 28 analoge, das dritte 35 solcher; ferner das erste für $S_{q\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\, q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}$ angegebene, indem man nur die Indices 1, 2, 3, 4 unter sich vertauscht, und ebenso 5, 6, 7, 8, sodann auch zu gleicher Zeit 1, 2, 3, 4 mit 5, 6, 7, 8, im Ganzen 2 analoge Systeme, das zweite der angegebenen Systeme 12 analoge, das dritte 32, das vierte 18, zusammen 64.

Da man hiernach aus irgend einem 8-Systeme das Gesetz der Ableitung aller andern $36 \cdot 64 - 1$ Systeme kennt, welche dieselbe Summe haben wie das erste System, so genügt es, für diese weiteren 254 Summen nur noch je *ein* System mitzutheilen:

XXI.
$$
\begin{aligned}
(q\alpha_1) = S_{q',\, qq'\alpha_1} &= (\alpha_1) + (q'\alpha_1\alpha_2) + (q'\alpha_1\alpha_3) + \cdots \\
&\quad \cdots + (q'\alpha_1\alpha_8), \\
(q'\alpha_1) = S_{q,\, qq'\alpha_1} &= (\alpha_1) + (q\alpha_1\alpha_2) + (q\alpha_1\alpha_3) + \cdots \\
&\quad \cdots + (q\alpha_1\alpha_8), \\
(\alpha_1\alpha_2) = S_{qq'\alpha_1,\, qq'\alpha_2} &= (q\alpha_1\alpha_2) + (q'\alpha_1\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha_4) + \cdots \\
&\quad \cdots + (\alpha_8), \\
(qq'\alpha_1\alpha_2) = S_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\, qq'\alpha_3} &= (\alpha_1) + (\alpha_2) + (q\alpha_1\alpha_2) + (q\alpha_3\alpha_4) \\
&\quad + (q\alpha_3\alpha_5) + \cdots + (q\alpha_3\alpha_8),
\end{aligned}
$$

$$(q\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = S_{q,\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = (q'\alpha_1\alpha_2) + (q'\alpha_1\alpha_3) + (q'\alpha_2\alpha_3) + (\alpha_4) + (\alpha_5) + \cdots + (\alpha_8),$$

$$(q'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = S_{q',\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = (q\alpha_1\alpha_2) + (q\alpha_1\alpha_3) + (q\alpha_2\alpha_3) + (\alpha_4) + (\alpha_5) + \cdots + (\alpha_8),$$

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = S_{q,\,q\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + (q'\alpha_4\alpha_5) + (q'\alpha_4\alpha_6) + (q'\alpha_4\alpha_7) + (q'\alpha_4\alpha_8),$$

wo denn wieder alle Vertauschungen der Indices $1, \cdots, 8$ auszuführen sind.

§ 7.

Weitere Eigenschaften der vollständigen 8-Systeme.

Wir haben im Vorigen die vollständigen 8-Systeme durch ihre Ableitung aus den 7-Systemen definirt und hierdurch die Eigenschaften jener Systeme erhalten. Man kann nun weiter fragen, welche dieser Eigenschaften zur Definition der 8-Systeme schon *hinreichend* sind. Die im Vorigen vollständig angegebenen Bildungsgesetze der Systeme bieten ein bequemes Mittel, alle solche Fragen zu beantworten, wie jetzt wenigstens für einen Theil derselben gezeigt werden soll.

Seien (α_1) irgend eine ungerade Charakteristik, (q), (q') irgend zwei gerade Charakteristiken, für welche $(qq'\alpha_1)$ gerade ist. Dann zeigt XX., dass (α_1) in 8 der 64 (q) und (q') zugeordneten 8-Systeme vorkommt, und in $8 \cdot 36$ solchen Systemen, welche (qq') zur Summe haben. Es giebt ferner $2 \cdot 36 + 64 = 136$ Werthe von (qq'), für welche $(qq'\alpha_1)$ gerade wird, *also giebt es* $8 \cdot 36 \cdot 136$ *vollständige 8-Systeme, welche eine beliebige ungerade Charakteristik* (α_1) *enthalten.*

Sei (α_2) eine zweite beliebige, nur von (α_1) verschiedene ungerade Charakteristik. Man findet 72 Werthe (qq'), für welche $(qq'\alpha_1)$ und $(qq'\alpha_2)$ gerade sind, sodann 16 Werthepaare (q), (q'), für welche $(q\alpha_1\alpha_2)$ und $(q'\alpha_1\alpha_2)$ ungerade sind, und endlich unter den 64 Systemen, welche einem solchen Paar (q), (q') zugeordnet sind, zwei, welche (α_1) und (α_2) enthalten, wie immer die Formeln XX. zeigen. *Also giebt es* $2 \cdot 16 \cdot 72$ *vollständige 8-Systeme, welche zwei beliebige ungerade Charakteristiken* (α_1), (α_2) *enthalten.*

Zu drei beliebigen (α_1), (α_2), (α_3), für welche nur $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ *gerade* ist, finden sich 36 Werthe (qq'), zu jedem Werthe (qq') noch 6 Paare (q), (q') derart, dass unter den zu (q), (q') gehörigen Systemen noch eines (α_1), (α_2) und (α_3) enthält: *es giebt* $6 \cdot 36$ *Systeme, welche drei beliebige ungerade Charakteristiken* (α_1), (α_2), (α_3), *deren Summe gerade ist, enthalten.*

Sei (α_4) eine *beliebige* 4^te^ ungerade Charakteristik, nur derart, dass

die *Summe je dreier* der (α_1), (α_2), (α_3), (α_4) *gerade* ist. *Dann giebt es* $2 \cdot 16$ *Systeme, welche solche* 4 *Charakteristiken enthalten.*

Sei (α_5) eine *beliebige* 5[te] ungerade Charakteristik, nur derart, dass

$$(\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau) \textit{ gerade}, \quad (\varrho, \sigma, \tau \text{ von } 1, \cdots, 5),$$

es giebt 6 *vollständige* 8-*Systeme, welche solche* 5 *Charakteristiken enthalten.*

Wir mögen, da unter den (α_1), (α_2), $\cdots$, (α_8) des vorigen Paragraphen *irgend* ein vollständiges 8-System verstanden war, die 5 Charakteristiken (α_1), $\cdots$, (α_5) des letzten Satzes identificiren mit den (α_1), $\cdots$, (α_5) der ersten Formel XX. des vorigen Paragraphen. Die 6 Systeme, welche diese (α_1), $\cdots$, (α_5) enthalten, gehören dann zu den 6 Summen:

$$(qq'), \quad (q\alpha_6\alpha_7\alpha_8), \quad (q'\alpha_6\alpha_7\alpha_8), \quad (\alpha_6\alpha_7), \quad (\alpha_6\alpha_8), \quad (\alpha_7\alpha_8),$$

nach der Bezeichnung von XX. und XXI.

Irgend eine 6[te] ungerade Charakteristik, welche, zu zweien der (α_1), $\cdots$, (α_5) addirt, etwas Gerades liefern soll, muss sodann eine der folgenden sein:

$$(\alpha_6), \quad (q\alpha_6\alpha_7), \quad (q'\alpha_6\alpha_7), \quad (qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8),$$

wenn man noch die Vertauschungen der Indices 6, 7, 8 hinzunimmt. Aber die letzte, mit (α_1), $\cdots$, (α_5) verbunden, gehört *keinem* vollständigen System mehr an; in der That kann auch zu

$$(\alpha_1), \quad (\alpha_2), \quad (\alpha_3), \quad (\alpha_4), \quad (\alpha_5), \quad (qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8)$$

keine 7[te] ungerade Charakteristik hinzugefunden werden, derart, dass die Summe irgend drei der 7 gerade ist. Die übrigen, (α_6), $(q\alpha_6\alpha_7)$ etc., dagegen kommen alle in irgend welchen unserer 8-Systeme vor, und wir mögen die 6[te] Charakteristik daher mit (α_6) bezeichnen, wenn wir die Forderung stellen, dass mehr als 6 solcher gefunden werden sollen, für die die Summe je dreier gerade ist:

Von sieben und mehr ungeraden Charakteristiken, für welche die Summe je dreier gerade sein soll, sind nur 5 *willkürlich dieser Bedingung gemäss zu nehmen. Irgend* 6 *solcher* 7 (*oder mehr*) *Charakteristiken kommen in je zwei vollständigen* 8-*Systemen vor.*

Die 6 Charakteristiken (α_1), (α_2), $\cdots$, (α_6) kommen nämlich in den beiden Systemen vor:

$$S_{q,q'} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_6) + (\alpha_7) + (\alpha_8),$$
$$S_{qq'\alpha_7,\, qq'\alpha_8} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_6) + (q\alpha_7\alpha_8) + (q'\alpha_7\alpha_8).$$

Die Charakteristiken, welche, zu zweien der (α_1), $\cdots$, (α_6) addirt, etwas Gerades liefern, sind nur

$$(\alpha_7), \quad (\alpha_8), \quad (q\alpha_7\alpha_8), \quad (q'\alpha_7\alpha_8);$$

daher zeigen die beiden eben hingeschriebenen Systeme:

Irgend 7 Charakteristiken, für welche die Summe je dreier gerade ist, kommen in einem 7-System und in einem 8-System vor; irgend 8 solcher in einem 8-System; mehr als 8 solcher existiren nicht; d. h. *die Bedingung, dass* $(\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau)$ *gerade sei, ist hinreichend zur Definition der 7- und vollständigen 8-Systeme.*

Ein analoger Satz existirt für die Bedingung, dass $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ ungerade sei. Wir sprechen denselben auch für die 7-Systeme aus:

Sei (q) *eine beliebige gerade Charakteristik,* (0) *eingeschlossen. Irgend 7 ungerade Charakteristiken* $(\alpha_1), \cdots, (\alpha_7)$, *welche nur den Bedingungen unterliegen, dass* $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ *ungerade sei, bilden eines der 7-Systeme des* § 5. *Irgend 8 ungerade Charakteristiken* $(\alpha_1), \cdots, (\alpha_8)$, *welche denselben Bedingungen genügen, bilden ein vollständiges 8-System, dem* (q) *zugeordnet ist. Mehr als* 8 *den Bedingungen genügende Charakteristiken existiren nicht.*

Unter allen (q) zugeordneten 8-Systemen des vorigen Paragraphen giebt es nämlich immer solche, welche eine beliebig vorgegebene ungerade Charakteristik enthalten, die wir daher mit (α_1) bezeichnen können. Jede der in der Gruppe $[q\alpha_1]$ enthaltenen Charakteristiken kommt nach XX., XXI. mit (α_1) ebenfalls in (q) zugeordneten 8-Systemen vor; irgend eine solche mag daher mit (α_2) bezeichnet sein. Ferner kommt jede der in den Gruppen $[q\alpha_1]$ und $[q\alpha_2]$ zugleich enthaltenen Charakteristiken, nämlich

$$(\alpha_3),\ (qq'\alpha_1\alpha_2\alpha_3),\ (q'\alpha_3\alpha_4)\ \text{(mit Vertauschungen von } 3, \cdots, 8),$$

mit (α_1), (α_2) in mehreren (q) zugeordneten Systemen vor, und irgend eine derselben kann daher mit (α_3) bezeichnet werden. Ebenso kann man irgend eine der in den Gruppen $[q\alpha_1]$, $[q\alpha_2]$, $[q\alpha_3]$ zugleich enthaltenen Charakteristiken als (α_4) nehmen, irgend eine den Gruppen $[q\alpha_1]$, $[q\alpha_2]$, $[q\alpha_3]$, $[q\alpha_4]$ gemeinsame als (α_5). Irgend eine den Gruppen $[q\alpha_1], \cdots, [q\alpha_5]$ gemeinsame ist dann eine der Charakteristiken

$$(\alpha_6),\ (\alpha_7),\ (\alpha_8),\ (q'\alpha_6\alpha_7),\ (q'\alpha_6\alpha_8),\ (q'\alpha_7\alpha_8),$$

und man hat noch 9 verschiedene 7-Systeme, in welchen $(\alpha_1), \cdots, (\alpha_5)$ mit zweien dieser auftreten, nämlich mit

$$(\alpha_6)+(\alpha_7),\ \text{oder mit}\ (\alpha_6)+(q'\alpha_7\alpha_8),\ \text{oder}\ (q'\alpha_6\alpha_7)+(q'\alpha_6\alpha_8),$$

oder mit den durch Vertauschung von 6, 7, 8 hieraus hervorgehenden; dagegen nur 2 der 8-Systeme, in denen drei jener 6 Charakteristiken auftreten, nämlich:

$$(\alpha_1)+\cdots+(\alpha_5)+(\alpha_6)+(\alpha_7)+(\alpha_8),$$
$$(\alpha_1)+\cdots+(\alpha_5)+(q'\alpha_6\alpha_7)+(q'\alpha_6\alpha_8)+(q'\alpha_7\alpha_8).$$

Man kann daher (α_6) für die 6te, der Bedingung des Satzes genügende,

Charakteristik nehmen, und hat dann noch als die den Gruppen $[q\alpha_1]$, $\cdots$, $[q\alpha_6]$ gemeinsamen Charakteristiken:

$$(\alpha_7),\ (\alpha_8),\ (q'\alpha_7\alpha_8).$$

Dies liefert nun wohl, indem man irgend eine derselben zu $(\alpha_1), \cdots,$ (α_6) nimmt, 3 der 7-Systeme, dagegen führt das 7-System

$$(\alpha_1) + \cdots + (\alpha_6) + (q'\alpha_7\alpha_8)$$

auf kein 8-System, das die Bedingung des Satzes erfüllte. Um zu einem 7-System zu gelangen, darf man also die Bedingung, dass $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ ungerade sei, *successive* durch irgend welche (α) erfüllen, die je mit den vorher angenommenen der Bedingung genügen; sollen aber 8 solcher (α) gefunden werden, so sind nur 6 so zu bestimmen; und das 8-System ist dann eindeutig gegeben.

Man hat noch einen analogen Satz:

Sei (g) *irgend eine Charakteristik,* (0) *ausgenommen. Irgend* 8 *ungerade Charakteristiken,* $(\beta_1), \cdots, (\beta_8)$, *welche die Bedingungen, dass die* $(g\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ *ungerade seien, erfüllen, bilden ein vollständiges System, dessen Summe* (g) *ist.*

Zum Beweise sei zuerst angenommen, dass wenigstens für *eines* der (β_ϱ) die Charakteristik $(g\beta_\varrho) = (p)$ gerade sei. Für die sieben übrigen (β) soll dann $(p\beta_\sigma\beta_\tau)$ ungerade sein, diese bilden also nach dem vorhergehenden Satze eines der 7-Systeme; wir mögen also unter diesen 7 irgend 7 Charakteristiken eines vollständigen 8-Systems verstehen.

Wenn nun $[r]$ und $[s]$ die beiden Gruppen sind, welchen diese $(\beta_1), \cdots, (\beta_7)$ angehören, so ist nach XV. die Charakteristik $(g) = (rs)$ die einzige, für welche alle $(\beta_\sigma\beta_\tau\beta_\zeta)$ ungerade sind ($\sigma, \cdots$ von $1, \cdots, 7$). Sei (β) die 8[te] ungerade Charakteristik, für welche die $(rs\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ ungerade werden sollen; so ist, wieder nach XV., $(\beta) = (prs)$ die einzige solche, wenn unter (p) verstanden wird:

$$(p) = (\beta_1) + \cdots + (\beta_7).$$

Man gelangt also zu dem System

$$(prs),\ (\beta_1), \cdots, (\beta_7),$$

was ein vollständiges 8-System mit der Summe $(rs) = (g)$ ist.

Wenn zweitens keines der $(g\beta_\varrho)$ gerade ist, so sei $(g) = (qq')$, nach der Bezeichnung von XX. Die (β_ϱ) sind dann *nur* unter der $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ und $(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ enthalten, und es genügt, sich auf die $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ zu beschränken, da 8 solche Charakteristiken $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$, welche die Eigenschaft, dass $(qq'\beta_\varrho\beta_\sigma\beta_\tau)$ ungerade sei, erfüllen, diese Eigenschaft behalten, wenn man einige $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ durch die entsprechenden $(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ ersetzt. Aber aus den 28 Charakteristiken $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ kann auf keine Weise ein solches System von 8 gebildet werden, da je drei solcher

8 Charakteristiken entweder keines oder zweimal ein (α) gemein haben müssten, was nicht ausführbar ist. — Damit ist der Satz bewiesen.

§ 8.

Zweitheilungsgleichungen.

1. Wenn man den 120 *ungeraden* Charakteristiken (a), (b), $\cdots$ die Wurzeln einer Gleichung 120sten Grades eindeutig zuordnet, welche Wurzeln wir ebenfalls mit den Zeichen (a), (b), $\cdots$ der Charakteristiken belegen wollen, so muss nach den bisherigen Betrachtungen die *Gruppe dieser Gleichung* aus denjenigen Substitutionen unter den Charakteristiken (a), (b), $\cdots$ bestehen, durch welche der Charakter des Geraden oder Ungeraden von einer, der Summe von drei, von fünf oder von irgend einer ungeraden Anzahl der 120 Charakteristiken nicht verändert wird; durch welche ferner die Beziehung $K \equiv 0$ oder $\equiv 1$ zwischen irgend zwei der *Gruppencharakteristiken* $[g]$, $[h]$, $\cdots$ unverändert bleibt, etc., also auch die vollständigen 8-Systeme wieder in solche übergehen. Indem wir diese Substitutionen erst weiterhin angeben, wollen wir zunächst die Frage beantworten: *wie man aus der Kenntniss von* 8 *solchen Wurzeln der Gleichung, welche einem vollständigen* 8-*System der Charakteristiken entsprechen, die übrigen* 112 *Wurzeln ableiten kann.* Es wird sich zeigen, *dass man* 56 *weitere Wurzeln eindeutig durch solche zu Grunde gelegten* 8 *Wurzeln ausdrücken kann, die übrigen* 56 *aber alsdann in zwei Systeme von je* 28 *Wurzeln zerfallen, deren Berechnung noch die Auflösung einer quadratischen Gleichung verlangt.*

Man kann sich, um dies zu zeigen, darauf beschränken, aus den 8 gegebenen Charakteristiken des vollständigen Systems

$$S_{q,\,q'} = (qq') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

alle *Gruppen* $[\alpha_\varrho \alpha_\sigma]$ zu bilden und diese mit einander zu vergleichen. Eine Gruppe $[\alpha_1 \alpha_2]$ besteht aus den 28 Zerlegungen:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \alpha_2) &= (\alpha_1) + (\alpha_2) = (q q' \alpha_1 \alpha_\varrho \alpha_\sigma) + (q q' \alpha_2 \alpha_\varrho \alpha_\sigma) \\ &= (q \alpha_1 \alpha_\varrho) + (q \alpha_2 \alpha_\varrho) = (q' \alpha_1 \alpha_\varrho) + (q' \alpha_2 \alpha_\varrho), \quad (\varrho, \sigma \text{ von } 3, \cdots, 8).\end{aligned}$$

Bildet man daher die 6 Gruppen

$$[\alpha_1 \alpha_4], \ [\alpha_2 \alpha_4], \ [\alpha_3 \alpha_4], \ [\alpha_1 \alpha_5], \ [\alpha_2 \alpha_6], \ [\alpha_3 \alpha_7],$$

so haben diese *eine* und *nur* eine Charakteristik gemeinsam, nämlich

$$(q q' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3).$$

Auf analoge Weise erhält man also alle 56 Charakteristiken $(q q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau)$, und entsprechend die 56 Wurzeln eindeutig aus den gegebenen 8 Wurzeln eines 8-Systems. Es sind, mit den (α), diejenigen Charakteristiken (β), für welche $(q q' \beta)$ gerade ist.

Was die übrigen 56 Charakteristiken (β) betrifft, für welche $(qq'\beta)$ ungerade ist, also die $(q\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ und $(q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$, so ist zunächst zu bemerken, dass solche zwei Charakteristiken $(q\alpha_i\alpha_k)$ und $(q'\alpha_i\alpha_k)$ in allen Gruppen $[\alpha_\varrho\alpha_\sigma]$, ebenso in den jetzt bekannten Gruppen $[(\alpha_\varrho)+(qq'\alpha_\sigma\alpha_\tau\alpha_\zeta)]$, immer zu gleicher Zeit enthalten sind, wenn eine der beiden darin vorkommt, wie die Symmetrie des 8-Systems in Bezug auf (q) und (q') ergiebt. Dagegen kann man wieder durch Gruppenbildung irgend ein solches *Paar*, z. B. $(q\alpha_1\alpha_2)$, $(q'\alpha_1\alpha_2)$ isoliren. Wir stellen die Gruppen auf:

$$[\alpha_1\alpha_3],\ [\alpha_1\alpha_4],\ [\alpha_1\alpha_5],\ [\alpha_1\alpha_6],\ [\alpha_1\alpha_7],\ [\alpha_1\alpha_8],$$

und diese haben, ausser (α_2), die bekannt ist, oder auch durch weitere Gruppenbildung ausgeschieden werden mag, nur das Paar

$$(q\alpha_1\alpha_2),\ (q'\alpha_1\alpha_2)$$

gemeinsam. Um dieses Paar weiter zu trennen, hat man also noch *eine quadratische Gleichung* aufzulösen, wonach man denn die beiden betreffenden Wurzeln beliebig den $(q\alpha_1\alpha_2)$, $(q'\alpha_1\alpha_2)$ zuordnen kann.

Nach dieser Zuordnung sind aber nun auch alle übrigen Paare $(q\alpha_i\alpha_k)$, $(q'\alpha_i\alpha_k)$ schon zerlegt und den Wurzeln eindeutig zugeordnet. Denn um etwa $(q\alpha_1\alpha_3)$ von $(q'\alpha_1\alpha_3)$ zu trennen, bilde man die schon bekannte Gruppe $[q\alpha_1]$, für die

$$(q\alpha_1) = (\alpha_2) + (q\alpha_1\alpha_2) = (\alpha_3) + (q\alpha_1\alpha_3);$$

und in der die Wurzel $(q\alpha_1\alpha_3)$ mit der bekannten Wurzel (α_3) gepaart ist; und analog bestimmen sich alsdann $(q\alpha_3\alpha_4)$, etc. Hiermit ist die ganze oben bezeichnete Bestimmung der Wurzeln geliefert.

Selbstverständlich lässt dieses Verfahren die mannigfachste Abänderung zu. So kann man die hier nothwendige quadratische Gleichung auch so bilden, dass man zu 7 der gegebenen 8 Grössen, etwa

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ \cdots,\ (\alpha_7),$$

diejenigen zwei Gruppen $[r]$ und $[s]$, welche diese 7 (α) gemeinsam enthalten, aufstellt und dieselben mit Hülfe einer quadratischen Gleichung trennt.

2. Die Substitutionsgruppe G der Gleichung 120sten Grades ist schon von Hrn. C. Jordan, „Traité des substitutions etc." p. 229—242, unter dem Namen der „Steiner'schen Gruppe G" angegeben und ausserdem deren Identität mit der vorher p. 171—194 von ihm betrachteten „Abel'schen Gruppe" linearer Substitutionen nachgewiesen. Ich führe diese Substitutionsgruppe, in der ersten Form, hier an, da sie, auf irgend eines der vollständigen 8-Systeme angewandt, unmittelbar alle solche Systeme ergeben muss, somit neben den früher erwähnten, ein weiteres Bildungsgesetz der Systeme.

Sei $[g]$ eine Gruppencharakteristik im Sinne des § 1. dieses Auf-

satzes, und ihre 28 Zerlegungen in je 2 ungerade Charakteristiken seien:

$$(g) = (a_1 b_1) = (a_2 b_2) = \cdots = (a_{28} b_{28}).$$

Wir betrachten nun hier mit Jordan $\{g\}$ als eine *Substitution,* welche die 56 ungeraden Charakteristiken a_ϱ und b_ϱ paarweise in einander überführt, also aus 28 Cykeln $(a_\varrho b_\varrho)$ besteht, welche aber die 64 übrigen ungeraden Charakteristiken ungeändert lässt.

Die weiteren Eigenschaften einer solchen Substitution $\{g\}$ ergeben sich so: Sei

$$(h) = (a_1) + (a_2) + \cdots + (a_\mu)$$

eine Summe von μ ungeraden Charakteristiken, also:

$$\sum n^{a_1} m^{a_1} \equiv 1, \qquad \sum n^{a_2} m^{a_2} \equiv 1, \qquad \ldots, \qquad \sum n^{a_\mu} m^{a_\mu} \equiv 1.$$

Man habe weiter:

$$\sum n^{g a_1} m^{g a_1} \equiv \varepsilon_1, \quad \sum n^{g a_2} m^{g a_2} \equiv \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \sum n^{g a_\mu} m^{g a_\mu} \equiv \varepsilon_\mu,$$

wobei ν der μ Zahlen ε den Werth 1, die übrigen $\mu - \nu$ den Werth 0 haben mögen. Addirt man diese μ Congruenzen unter Berücksichtigung der vorhergehenden, so ergiebt sich:

1) für gerades μ:

$$\sum (n^g m^h + n^h m^g) = K_{g,h} \equiv \nu;$$

2) für ungerades μ:

$$\sum n^h m^h + \sum n^{gh} m^{gh} \equiv \nu + 1.$$

Dies sagt aus:

Die Summe (h) einer geraden Anzahl von ungeraden Charakteristiken wird durch eine Substitution $\{g\}$ in (gh) verwandelt, oder bleibt ungeändert, je nachdem die Beziehung $K_{g,h}$ zwischen $[g]$ und $[h]$ den Werth 1 oder 0 hat. Ist $(h) = 0$, so bleibt die Summe durch jedes $\{g\}$ unverändert.

Die Summe (h) einer ungeraden Zahl von ungeraden Charakteristiken wird durch eine Substitution $\{g\}$ in (gh) verwandelt, wenn (gh) und (h) zugleich gerade oder zugleich ungerade sind; bleibt aber ungeändert, wenn die eine der beiden Charakteristiken (gh) und (h) gerade, die andere ungerade ist.

Hieraus schliesst man weiter, dass auch die Beziehung zwischen zwei Gruppencharakteristiken $[h]$ und $[k]$, welche mit $K_{h,k} \equiv 1$ oder $\equiv 0$ bezeichnet ist, bei irgend einer Substitution $\{g\}$ erhalten bleibt. Denn in den drei Fällen:

1. $K_{g,h} \equiv 0$, $K_{g,k} \equiv 0$; 2. $K_{g,h} \equiv 1$, $K_{g,k} \equiv 0$; 3. $K_{g,h} \equiv 1$, $K_{g,k} \equiv 1$

erhält man statt $K_{h,k}$ durch die Substitution $\{g\}$ bezüglich:

$$1.\ K_{h,k};\quad 2.\ K_{gh,k};\quad 3.\ K_{gh,gk},$$

welche dem ursprünglichen Werthe von $K_{h,k}$ congruent werden.

Alle durch Zusammensetzung der 255 Substitutionen $\{g\}$ entstehenden Substitutionen bilden eine Gruppe, welche in der Gruppe G der Gleichung enthalten ist. Nach C. Jordan besteht G auch nur aus diesen Substitutionen und ist überdies eine *einfache* Gruppe (s. p. 41 und 212 l. c.).

Wir können insbesondere solche Substitutionen von G zu einer in G enthaltenen Gruppe zusammenfassen, welche von einem System von μ Charakteristiken

$$(h) = (a_1) + (a_2) + \cdots + (a_\mu)$$

die *Summe* (h) unverändert lassen. Ist μ gerade, so seien (b_1), (b_1') zwei ungerade Charakteristiken, für welche

$$(a_1) + (a_2) + \cdots + (a_\mu) + (b_1) + (b_1') = (0);$$

da der Ausdruck zur Linken bei jeder Substitution von G den Werth (0) behält, so besteht dann unsere Untergruppe aus denjenigen Substitutionen von G, welche die Gruppe $[h]$, d. h.

$$(h) = (b_1) + (b_1') = \cdots = (b_{28} + b_{28}')$$

in sich überführen.

Ist aber μ ungerade, und ist erstens (h) ungerade, so ist unsere Untergruppe die Gesammtheit der Substitutionen von G, durch welche die Charakteristik (h) unverändert bleibt. Ist zweitens (h) gerade, so sei

$$(h) = (b_1) + (b_2) + (b_3) = (b_1') + (b_2') + (b_3') = \cdots,$$

wo die (b), (b') ungerade Charakteristiken sind; und unsere Untergruppe besteht aus den Substitutionen, die (b_1) in eine *beliebige* ungerade Charakteristik (b_1') überführen, (b_2) und (b_3) aber in ein Paar der Gruppe $(b_1 b_2 b_3 b_1')$.

3. Es mögen nun, mit Hülfe der früher entwickelten Betrachtungen über die vollständigen 8-Systeme ungerader Charakteristiken, Resolventen der Gleichung 120sten Grades aufgestellt werden, durch welche deren einfachste Lösung vermittelt wird.

Sei

$$S_{qq'} = (qq') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

ein beliebiges, (q) und (q') zugeordnetes vollständiges 8-System. Da ein solches, nach § 7., durch die Eigenschaft, dass die Summe je dreier seiner Charakteristiken gerade sei, völlig definirt ist, so führen alle Substitutionen der Gruppe G dasselbe wieder in vollständige 8-Systeme über. Wir können nun, nach dem Vorhergehenden, zunächst alle diejenigen Substitutionen zu einer Untergruppe zusammenfassen, durch

welche die *Summe* (qq') der 8 Charakteristiken (α_ϱ) unverändert bleibt. Dies muss, nach § 6., $36 \cdot 64$ Systeme

$$S_{qq'},\quad S'_{qq'},\ \cdots\cdot$$

liefern. Irgend eine symmetrische Function dieser $36 \cdot 64$ Systeme, etwa

$$\Sigma_{(qq')} = S_{qq'} \cdot S'_{qq'} \cdots,$$

nimmt dann durch alle Substitutionen von G im Ganzen 255 Werthe an, den 255 Gruppencharakteristiken $[qq']$ entsprechend. Daher genügt $\Sigma_{(qq')}$ einer *Gleichung vom Grade* 255. Die vollständige Lösung dieser Gleichung für Σ würde, da die Gruppe G *einfach* ist, auch die der gegebenen Gleichung mit sich bringen, wie übrigens leicht direct zu zeigen ist. Wir denken uns indess zunächst nur *eine* Wurzel der Gleichung für Σ gefunden, die wir mit $\Sigma_{(qq')}$ bezeichnen. Die Wurzeln dieser Gleichung für $\Sigma_{(qq')}$ und die für die 255 Gruppen $[qq']$ entsprechen sich übrigens nach dem Obigen eindeutig, und wir können also auch *eine* Gruppe $[qq']$ von Paaren ungerader Charakteristiken als gefunden annehmen.

Indem hiernach die Gruppe der Gleichung auf diejenigen Substitutionen G' reducirt ist, welche die $36 \cdot 64$ Systeme $S_{qq'}$, $S'_{qq'}$, $\cdots$ unter sich vertauschen, mögen wir weiter diejenigen Substitutionen G'' von G' zusammenfassen, welche eines der 36 Paare (q), (q') von geraden Charakteristiken, deren Summe (qq') ist, unverändert lassen. Sei nämlich

$$(qq') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

eines der Systeme. Nach Weglassung irgend eines der (α), etwa (α_8), hat man ein 7-System

$$(qq'\alpha_8) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_7),$$

dessen Charakteristiken nach § 5. in nur 2 Gruppen $[r]$ und $[s]$ enthalten sind, gepaart mit Charakteristiken (γ) und (δ), nämlich:

$$(r) = (\alpha_1) + (\gamma_1) = \cdots = (\alpha_7) + (\gamma_7),$$
$$(s) = (\alpha_1) + (\delta_1) = \cdots = (\alpha_7) + (\delta_7).$$

Die Grössen

$$(rqq'\alpha_8) = (\gamma_1) + (\gamma_2) + \cdots + (\gamma_7),$$
$$(sqq'\alpha_8) = (\delta_1) + (\delta_2) + \cdots + (\delta_7)$$

sind dann zwei solche gerade Charakteristiken, deren Summe (qq') ist, und sind für ein 8-System dieselben, welches der (α) auch beim Uebergang zum 7-System weggelassen wurde. Die gesuchte Untergruppe G'' besteht daher aus denjenigen Substitutionen von G', welche die Summe der 7 ungeraden Charakteristiken (γ) und die der 7 (δ) ungeändert lassen, verbunden mit denjenigen, welche die Charakteristiken (α_1), (α_2), $\cdots$, (α_8) nur unter sich vertauschen.

Man erhält auf diese Weise aus *einem* System im Ganzen 64 solcher, die demselben Paar (q), (q') zugeordnet sind; und eine symmetrische Function $\Sigma'_{q,q'}$ dieser 64 Systeme nimmt durch alle Substitutionen der Gruppe G' 36 Werthe an, was eine Gleichung des Grades 36 für Σ' liefert.

Auch von dieser Gleichung denken wir uns wieder *eine* Wurzel gefunden, (q), (q'), wonach sich die Gruppe der Gleichung auf G'' reducirt. Vermöge der Substitutionen von G'' erhält man dann aus *einem* (q), (q') zugeordneten 8-Systeme $S_{q,q'}$ deren 64, so dass S einer Gleichung 64[sten] Grades genügt.

Nachdem weiter auch von dieser Gleichung *eine* Wurzel $S_{q,q'}$ gefunden, hat man *ein* vollständiges 8-System

$$S_{q,q'} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8),$$

das nun durch Auflösung einer Gleichung 8[ten] Grades in seine 8 Elemente zu zerlegen ist. Nach dem ersten Theile dieses Paragraphen ist sodann die Auflösung der Gleichung 120[sten] Grades vollendet, wenn man noch *eine* quadratische Gleichung gelöst hat, so dass man im Ganzen zu finden hat:

eine Wurzel einer Gleichung vom Grade 255,
sodann „ „ „ „ „ „ 36,
„ „ „ „ „ „ „ 64,
sodann die 8 Wurzeln einer Gleichung vom Grade 8,
endlich die Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

Würde man direct die 7-Systeme, statt der 8-Systeme, aufgesucht haben, so hätte man (zur Bestimmung einer Gruppe $[r]$) zunächst wieder eine Wurzel der Gleichung vom Grade 255, sodann (zur Bestimmung der zweiten Gruppe $[s]$) eine Wurzel einer Gleichung vom Grade 64, sodann*) (um $(q) = (pr)$, $(q') = (ps)$ zu bestimmen) eine Wurzel einer Gleichung 36[sten] Grades zu finden; und endlich eine Gleichung 8[ten] Grades zu lösen (zur Bestimmung der 8 Systeme von der Summe (p)). Die letzte Gleichung lässt sich auch so auflösen, dass man *eine* Wurzel derselben bestimmt, und da hierdurch *ein* 7-System ausgezeichnet ist, dann die Lösung der Gleichung 7[ten] Grades vornimmt, welche dieses System trennt. Hierdurch sind dann, indem man etwa das 7-System zu einem vollständigen 8-System eindeutig ergänzt, auch alle Wurzeln der Gleichung 120[sten] Grades bestimmt, ohne dass man (da hier $[r]$ und $[s]$ schon getrennt sind) weiter eine quadratische Gleichung aufzulösen hätte.

---

*) Von hier an wird die Lösung dieselbe, wie bei der Gleichung 28[sten] Grades bei 3-reihigen Charakteristiken.

Wir bemerken noch, dass man schon alle 8-Systeme $S_{qq'}$ von XXII. § 6. erhält, wenn man auf

$$S_{q,q'} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

Substitutionen der Art

$$\{\alpha_\varrho \alpha_\sigma\}, \quad \{q q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma\}, \quad \{\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau \alpha_\zeta\}$$

wiederholt anwendet; die übrigen XIX. § 6. dann durch Substitutionen

$$(q\alpha_\varrho), \quad (q'\alpha_\varrho), \quad (q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau), \quad (q'\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau).$$

§ 9.

Weitere Charakteristikensysteme.

Weitere bemerkenswerthe Systeme und Gleichungen, die in der Theorie der 4-reihigen Charakteristiken auftreten, seien hier noch angedeutet. So giebt es (C. Jordan, l. c. p. 234.) *Systeme von* 7 *Gruppen*, welche je 8 ungerade Charakteristiken gemein haben; und bei gegebenem System bestimmen sich dessen 8 Charakteristiken aus einer Gleichung 8ten Grades, wie sie von Hrn. Mathieu untersucht sind (vgl. l. c. p. 305), nämlich mit der Eigenschaft, dass zwischen vier Wurzeln, von denen drei beliebig sind, eine symmetrische rationale Relation besteht, was deren Auflösung auf die einer Gleichung 7ten Grades und von quadratischen Gleichungen zurückbringt.

Es giebt ferner *Systeme von je* 10 *geraden Charakteristiken* mit folgenden Eigenschaften: die Summe der 10 Charakteristiken ist (0); die Summe von je 3 derselben ist ungerade, von je 5 derselben gerade; und zwar erhält man durch diese Summen *alle* ungeraden und *alle* geraden Charakteristiken, die 10 des Systems selbst ausgenommen. Man kann diese 10-Systeme leicht zu den vollständigen 8-Systemen in Beziehung setzen. Aus einem 8-System

$$S_{q,q'} = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8)$$

ergiebt sich nämlich immer ein 10-System auf die Weise:

$$(q), (q'), (qq'\alpha_1), (qq'\alpha_2), \ldots (qq'\alpha_8),$$

und dasselbe ist ebenso aus $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ verschiedenen vollständigen 8-Systemen ableitbar, so dass es im Ganzen $136 \cdot 96$ solcher 10-Systeme giebt. Durch 5 seiner Charakteristiken ist das 10-System *eindeutig* bestimmt, denn seien diese 5 etwa

$$(qq'\alpha_1), (qq'\alpha_2), \ldots (qq'\alpha_5),$$

so könnte, wegen der Definitionseigenschaft, dass die Summe je dreier der geraden Charakteristiken ungerade sein soll, eine 6te Charakteristik des Systems nur eine der folgenden sein:

$$(qq'\alpha_6),\ (qq'\alpha_7),\ (qq'\alpha_8),\ (q),\ (q'),\ (\alpha_6\alpha_7\alpha_8);$$

aber die letzte bleibt ausgeschlossen, weil sie nur auf ein 8-, nicht auf ein 10-System gerader Charakteristiken führt, und die 5 übrigen bilden mit den 5 angenommenen Charakteristiken das eine 10-System. Sind 4 der Charakteristiken gegeben, wie etwa

$$(qq'\alpha_1),\ \ldots (qq'\alpha_4),$$

so kann man dieselben auf *zwei* verschiedene Weisen zu einem 10-Systeme ergänzen, nämlich durch:

$$(qq'\alpha_5),\ \ldots (qq'\alpha_8),\ (q),\ (q'),$$

oder durch

$$(\alpha_5\alpha_6\alpha_7),\ (\alpha_5\alpha_6\alpha_8),\ (\alpha_5\alpha_7\alpha_8),\ (\alpha_6\alpha_7\alpha_8),\ (q\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4),\ (q'\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4).$$

Sind endlich nur drei der Charakteristiken eines 10-Systems gegeben, so gehören dieselben 8 verschiedenen 10-Systemen an, und je zwei dieser Systeme haben 4 Charakteristiken gemein.

Bezeichnet man die 3 gegebenen geraden Charakteristiken mit (p), (pr), (ps), so stehen diese 8-Systeme in directer Beziehung zu den 8 im Satz X, § 5. den 3 Charakteristiken zugeordneten 7-Systemen ungerader Charakteristiken.

§ 10.

Die Thetafunctionen.

Die ursprüngliche Thetafunction sei definirt durch:

$$\vartheta(u) = \vartheta(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum\nolimits' e^{\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \nu_\mathfrak{a}\nu_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + 2\sum\limits_{\mathfrak{a}} \nu_\mathfrak{a} u_\mathfrak{a}},$$

wo die Summationen im Exponenten von e auf die Werthe $1, \ldots 4$ der Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, die Summation $\sum'$ auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe der 4 Grössen $\nu_1, \ldots \nu_4$ zu erstrecken ist. Die Moduln $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ der Function haben die Bedingung zu erfüllen:

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

ferner die Bedingung der Convergenz der ϑ-Function — wonach, wenn $a'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ der reelle Theil von $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, der Ausdruck $\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \nu_\mathfrak{a}\nu_\mathfrak{b} a'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein muss —, seien aber im Uebrigen ganz *allgemein* angenommen.

Der Charakteristik (α)

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & n_3^\alpha & n_4^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & m_3^\alpha & m_4^\alpha \end{pmatrix},$$

werde nun ein Periodensystem zugeordnet:

$$\varpi^{\alpha} = m_{\mathfrak{a}}^{\alpha} \pi i + \sum_{\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{b}}^{\alpha} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, \ldots 4),$$

das kurz mit ϖ^{α} bezeichnet sei. Hierbei denken wir uns jedoch die Zahlen $n_{\mathfrak{a}}^{\alpha}$ und $m_{\mathfrak{a}}^{\alpha}$ noch *nicht* auf ihre Werthe 0 oder 1 (mod. 2) reducirt, und demzufolge verstehen wir im Folgenden unter $(\alpha\beta)$ immer eine Charakteristik, deren Elemente die *algebraischen Summen* entsprechender Elemente von (α) und (β) sind. Den halben Periodensystemen $\frac{1}{2}\varpi^{\alpha}$ entsprechend, mögen dann die allgemeinen ϑ-Functionen definirt sein durch den Ausdruck:

$$\vartheta_{\alpha}(u) = e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} n_{\mathfrak{b}}^{\alpha} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} m_{\mathfrak{a}}^{\alpha} + \sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} u_{\mathfrak{a}}} \cdot \vartheta(u + \tfrac{1}{2}\varpi^{\alpha}).$$

Die bekannten Beziehungen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht wird, stelle ich in diesem Paragraphen zusammen.

Aendert man in der Charakteristik (α) eine der Zahlen $n_{\mathfrak{a}}^{\alpha}$, $m_{\mathfrak{a}}^{\alpha}$ um *Vielfache von* 2, so kann sich höchstens das Vorzeichen von $\vartheta_{\alpha}(u)$ ändern, nach der Regel:

$$\vartheta_{\alpha\beta\beta}(u) = (-1)^{\sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} m_{\mathfrak{a}}^{\beta}} \cdot \vartheta_{\alpha}(u);$$

vom Vorzeichen abgesehen, hat man also nur 256 von einander verschiedene ϑ-Functionen. Ferner sind die ϑ-Functionen mit geradem Index *gerade*, die mit ungeradem Index *ungerade Functionen* ihrer Argumente, da

$$\vartheta_{\alpha}(-u_1, -u_2, -u_3, -u_4) = (-1)^{\sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} m_{\mathfrak{a}}^{\alpha}} \cdot \vartheta_{\alpha}(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Die *Periodicitätseigenschaften* der ϑ-Functionen sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\vartheta_{\alpha}(u + \varpi^{\beta}) = (-1)^{\sum\limits_{\mathfrak{a}}(n_{\mathfrak{a}}^{\alpha} m_{\mathfrak{a}}^{\beta} + n_{\mathfrak{a}}^{\beta} m_{\mathfrak{a}}^{\alpha})} \cdot e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{a}}^{\beta} n_{\mathfrak{b}}^{\beta} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - 2\sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\beta} u_{\mathfrak{a}}} \cdot \vartheta_{\alpha}(u),$$

die *Vermehrung um halbe Perioden* durch die Gleichung:

$$\vartheta_{\alpha}(u + \tfrac{1}{2}\varpi^{\beta}) = e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{a}}^{\beta} n_{\mathfrak{b}}^{\beta} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\beta}(m_{\mathfrak{a}}^{\alpha} + m_{\mathfrak{a}}^{\beta}) - \sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{\beta} u_{\mathfrak{a}}} \cdot \vartheta_{\alpha\beta}(u).$$

Hierbei ist

$$\varpi_{\mathfrak{a}}^{\beta} = m_{\mathfrak{a}}^{\beta} \pi i + \sum_{\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{b}}^{\beta} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

und auch die Zahlen $m_{\mathfrak{a}}^{\beta}$, $n_{\mathfrak{a}}^{\beta}$ sind nicht auf 0 oder 1 (mod. 2) reducirt angenommen.

Was die *Nullwerthe der ϑ-Functionen* betrifft, so verschwinden die ungeraden ϑ-Functionen für die Argumente 0, die ursprüngliche ϑ-

Function also für solche Systeme halber Perioden, welche eine ungerade Charakteristik haben. Nach der Bezeichnung des Satzes XVIII., § 6. ist

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}\varpi^{\alpha}) = 0,$$

sobald (α) eine der Charakteristiken

$$(\alpha_\varrho),\ (q q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau),\ (q \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma) \cdot (\varrho, \sigma, \tau \text{ von } 1, \ldots, 8).$$

Aus dem Obigen folgt weiter, dass

$$\vartheta_\alpha(\tfrac{1}{2}\varpi^{\beta}) = 0,$$

sobald die Charakteristik $(\alpha\beta)$ ungerade ist. Nimmt man also für den Index (α) hier die Gruppenbezeichnung des Satzes XIX. (§ 6.) an, so ergeben sich die 120 Grössen (β), (von Vielfachen von 2 abgesehen), durch Zerlegung der Gruppe $[\alpha]$ in zwei ungerade oder in eine gerade und eine ungerade Charakteristik, und zwar in der Form XVIII. (§ 6.).

Z. B. für $(\alpha) = (q q')$ folgt für (β) eine der Charakteristiken

$$(q \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (q q' \alpha_\varrho),\ (\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau).$$

Würde umgekehrt (α) in der Bezeichnung XVIII. genommen werden, so ergäbe sich (β) in der Gruppenbezeichnung XIX., wenn man noch (0) hinzunimmt; z. B. für $(\alpha) = (\alpha_1)$ folgt für (β) eine der Charakteristiken:

$$(0),\ (q\alpha_\varrho),\ (q'\alpha_\varrho),\ (\alpha_1\alpha_\varrho),\ (q q' \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (q \alpha_1 \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (q' \alpha_1 \alpha_\varrho \alpha_\sigma),\ (\alpha_\varrho \alpha_\sigma \alpha_\tau \alpha_\zeta),$$
$$(\varrho, \sigma, \tau, \zeta \text{ von } 2, \ldots, 8).$$

In Bezug auf das *Additionstheorem der ϑ-Functionen* setze ich hier einen aus der Theorie der ϑ-Functionen mit vielfachen Moduln bekannten Satz voraus:

dass zwischen je $2^4 + 1 = 17$ Producten der Form

$$\vartheta_\alpha(u + v') \cdot \vartheta_\alpha(u + v''),$$

welche gleiche Argumente $u_1, \ldots u_4$, und gleiche Summen

$$v_1' + v_1'',\quad v_2' + v_2'',\quad v_3' + v_3'',\quad v_4' + v_4''$$

haben, eine homogene lineare Relation stattfindet, deren Coefficienten von den u unabhängig sind.

§ 11.

Das Additionstheorem der ϑ-Functionen.

Nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen kann man das Product

$$\vartheta(u + v + w) \cdot \vartheta(u - v)$$

linear und homogen durch 16 Producte der Form

$$\vartheta_\alpha(u + w) \cdot \vartheta_\alpha(u)$$

darstellen, wenn man hier 16 verschiedene Indices α derart wählt, dass zwischen den 16 Producten selbst keine identische lineare Relation besteht. Wir benützen nun für die (α) die in §§ 5., 6. entwickelten 7- oder 8-Systeme und wollen zeigen, wie sich hieraus eine einfache Bestimmung der von den u unabhängigen Coefficienten einer solchen Relation ergiebt.

Sei ein den geraden Charakteristiken (q) und (q') zugeordnetes vollständiges 8-System ungerader Charakteristiken:

$$(q q') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8).$$

Aus demselben bilden wir das 16-System (P):

$$(P)\begin{cases} (\alpha_1), & (\alpha_2), \; \ldots, \quad (\alpha_8) \\ (q q' \alpha_1), & (q q' \alpha_2), \; \ldots, \; (q q' \alpha_8). \end{cases}$$

Solcher 16-Systeme (P) giebt es genau ebensoviele als vollständige 8-Systeme. Dem 16 System P ordnen wir ein 16-System (P') zu:

$$(P')\begin{cases} (q\,\alpha_1), \; (q\,\alpha_2), \; \ldots, \; (q\,\alpha_8) \\ (q'\alpha_1), \; (q'\alpha_2), \; \ldots, \; (q'\alpha_8), \end{cases}$$

das zu (P) die Beziehung hat:

Addirt man irgend eine Charakteristik von (P') *zu jeder der Charakteristiken von* (P), *so sind von den* 16 *Summen zwei gerade, die übrigen ungerade. Und dasselbe gilt, wenn man eine Charakteristik von* (P) *zu jeder der* 16 *Charakteristiken von* (P') *addirt.*

Nach dem in dem vorigen Paragraphen über die Nullwerthe der Thetafunctionen Bemerkten ist es demnach vortheilhaft, für die 16 Indices α der hier herzustellenden Relation die 16 durch ein System (P) oder (P') gegebenen einzuführen und zur Constantenbestimmung für die Argumente u halbe Periodensysteme zu setzen, die sich auf das zugehörige Charakteristikensystem (P'), resp. (P) beziehen. Wir nehmen also die Relation an:

$$(1) \qquad \vartheta(u+v+w)\cdot\vartheta(u-v) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} a_\varrho \cdot \vartheta_{\alpha_\varrho}(u+w)\,\vartheta_{\alpha_\varrho}(u)$$
$$+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} b_\varrho \cdot \vartheta_{q q' \alpha_\varrho}(u+w)\,\vartheta_{q q' \alpha_\varrho}(u),$$

worin die a_ϱ, b_ϱ nur von den v und w abhängen. Setzt man für die u einmal

$$u_{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\varpi_{\mathfrak{a}}^{q\alpha_\varrho} = \tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{a}}^{q\alpha_\varrho}\cdot\pi i + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{b}}^{q\alpha_\varrho} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

sodann

$$u_{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\varpi_{\mathfrak{a}}^{q'\alpha_\varrho},$$

so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}+v+w\right)\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}-v\right)=a_\varrho\vartheta_{\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}+w\right)\vartheta_{\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}\right)$$
$$+b_\varrho\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}+w\right)\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}\right),$$

$$\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}+v+w\right)\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}-v\right)=a_\varrho\vartheta_{\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}+w\right)\vartheta_{\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}\right)$$
$$+b_\varrho\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}+w\right)\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q'\alpha_\varrho}\right).$$

Aber man hat nach § 10:

$$\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}+v+w\right)\vartheta\left(\tfrac{1}{2}\varpi^{q\alpha_\varrho}-v\right)$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} n_{\mathfrak{a}}^{q\alpha_\varrho} m_{\mathfrak{b}}^{q\alpha_\varrho} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-\sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^{q\alpha_\varrho} w_{\mathfrak{a}}}\cdot\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v+w)\,\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v),$$

etc. etc., wo

$$\vartheta_q(0)=\vartheta_q,$$

gesetzt ist, und die beiden Gleichungen werden:

$$\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v+w)\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)$$
$$=a_\varrho\cdot(-1)^{\sum n^{\alpha_\varrho}m^q}\vartheta_q\vartheta_q(w)+b_\varrho(-1)^{\sum n^{q\alpha_\varrho}m^{q'}}\vartheta_{q'}\vartheta_{q'}(w),$$

$$\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v+w)\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)$$
$$=a_\varrho\cdot(-1)^{\sum n^{\alpha_\varrho}m^{q'}}\vartheta_{q'}\vartheta_{q'}(w)+b_\varrho(-1)^{\sum n^{q'\alpha_\varrho}m^q}\vartheta_q\vartheta_q(w),$$

woraus

$$(1')\begin{cases}a_\varrho=\dfrac{(-1)^{\sum n^{q'\alpha_\varrho}m^q}\vartheta_q\vartheta_q(w)\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v+w)-(-1)^{\sum n^{q\alpha_\varrho}m^{q'}}\vartheta_{q'}\vartheta_{q'}(w)\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v+w)}{(-1)^{\sum n^{q'}m^q}\vartheta_q^2\vartheta_q^2(w)-(-1)^{\sum n^q m^{q'}}\vartheta_{q'}^2\vartheta_{q'}^2(w)},\\[2ex] b_\varrho=\dfrac{(-1)^{\sum n^{\alpha_\varrho}m^q}\vartheta_q\vartheta_q(w)\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)\vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v+w)-(-1)^{\sum n^{\alpha_\varrho}m^{q'}}\vartheta_{q'}\vartheta_{q'}(w)\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)\vartheta_{q\alpha_\varrho}(v+w)}{(-1)^{\sum n^{q'}m^q}\vartheta_q^2\vartheta_q^2(w)-(-1)^{\sum n^q m^{q'}}\vartheta_{q'}^2\vartheta_{q'}^2(w)}.\end{cases}$$

$$(\varrho=1,\,2,\,\ldots,\,8);$$

wo wieder $\sum n^\alpha m^\beta$ für $\sum\limits_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^\alpha m_{\mathfrak{a}}^\beta$ gesetzt ist.

Der Nenner dieser Ausdrücke kann im Allgemeinen nicht $=0$ sein, da $\vartheta_q(u)$ und $\vartheta_{q'}(u)$ zwei von einander verschiedene *gerade* Functionen der $u_{\mathfrak{a}}$ sind. Daher existirt zwischen den zu Grunde gelegten 16 ϑ-Producten keine lineare Relation und die Darstellung (1), (1′) ist zulässig. In dieser Darstellung (1), (1′) ist das *allgemeine Additionstheorem der ϑ-Functionen von vier Argumenten* enthalten.

Wenn man an Stelle von (1) das Product zur linken Seite durch solche 16 Producte ausdrückt, deren Indices die von (P') sind, so ergiebt sich nur wieder die Darstellung (1), (1′) mit Vertauschung von

u und v. Auch andere *nicht* in (P) enthaltene 16-Systeme von Charakteristiken geben keine neuen Formeln für das Additionstheorem, vielmehr immer nur solche, welche aus (1), (1′) durch Vermehrung der u und v um halbe Perioden ableitbar sind. Indessen ist die Ableitung solcher 16-Systeme aus den 7-Systemen ungerader Charakteristiken § 5., und damit der directe Uebergang von diesen 7-Systemen zum Additionstheorem beachtenswerth.

Sei

$$(p) = (\beta_1) + (\beta_2) + \cdots + (\beta_7)$$

ein 7-System, dessen Charakteristiken in den beiden Gruppen $[r]$ und $[s]$ enthalten sind; zwei weitere 7-Systeme sind dann

$$(q) = (pr) = (r\beta_1) + (r\beta_2) + \cdots + (r\beta_7),$$
$$(q') = (ps) = (s\beta_1) + (s\beta_2) + \cdots + (s\beta_7).$$

Wir bilden aus diesen beiden 7-Systemen das 16-System, in dem zur Abkürzung

$$(p) = (\beta_8)$$

gesetzt ist:

$$(Q) \begin{cases} (r\beta_1), \; (r\beta_2), \; \ldots, \; (r\beta_8), \\ (s\beta_1), \; (s\beta_2), \; \ldots, \; (s\beta_8), \end{cases}$$

und ordnen demselben ein zweites 16-System zu:

$$(Q') \begin{cases} (p\beta_1), \quad (p\beta_2), \; \ldots, (p\beta_8), \\ (prs\beta_1), \; (prs\beta_2), \; \ldots, (prs\beta_8), \end{cases}$$

wo (Q) und (Q') in derselben Beziehung zu einander stehen, wie (P) und (P'). Unter Zugrundelegung dieser Indices erhält man dann das Additionstheorem in der Form:

$$(2) \qquad \vartheta(u+v+w)\,\vartheta(u-v) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} c_\varrho \vartheta_{r\beta_\varrho}(u)\,\vartheta_{r\beta_\varrho}(u+w)$$
$$+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} d_\varrho \vartheta_{s\beta_\varrho}(u)\,\vartheta_{s\beta}\,(u+w),$$

wo

$$(2') \begin{cases} c_\varrho = \dfrac{(-1)^{\Sigma n^{s\beta_\varrho} m^{pr}} \vartheta_{pr}\vartheta_{pr}(w)\vartheta_{p\beta_\varrho}(v)\vartheta_{p\beta_\varrho}(v+w) - (-1)^{\Sigma n^{s\beta_\varrho} m^{ps}} \vartheta_{ps}\vartheta_{ps}(w)\,\vartheta_{prs\beta_\varrho}(v)\vartheta_{prs\beta_\varrho}(v+w)}{(-1)^{\Sigma n^{ps} m^{pr}} \vartheta^2_{pr}\,\vartheta^2_{pr}(w) - (-1)^{\Sigma n^{pr} m^{ps}} \vartheta^2_{ps}\,\vartheta^2_{ps}(w)} \\[2ex] d_\varrho = \dfrac{(-1)^{\Sigma n^{r\beta_\varrho} m^{pr}} \vartheta_{pr}\vartheta_{pr}(w)\vartheta_{prs\beta}(v)\;\vartheta_{prs\beta_\varrho}(v+w) - (-1)^{\Sigma n^{r\beta} m^{ps}} \vartheta_{ps}\vartheta_{ps}(w)\,\vartheta_{p\beta_\varrho}(v)\,\vartheta_{p\beta_\varrho}(v+w)}{(-1)^{\Sigma n^{ps} m^{pr}} \vartheta^2_{pr}\vartheta^2_{pr}(v+w) - (-1)^{\Sigma n^{pr} m^{ps}} \vartheta^2_{ps}\vartheta^2_{ps}(w)}. \end{cases}$$

Diese Formel geht aus (1) und (1') dadurch hervor, dass man dort

$$(\alpha_1) = (\beta_1), \ldots, (\alpha_7) = (\beta_7), \quad (q q' \alpha_8) = (p) = (\beta_8),$$
$$(q) = (pr), \quad (q') = (ps)$$

setzt und hierauf sowohl die u_a, als die v_a um das halbe Periodensystem

$$\tfrac{1}{2}\varpi^r_a$$

vermehrt.

§ 12.

Speciellere Formeln. Additionstheorem der achtfach periodischen Functionen.

Die Ausdrücke des Additionstheorems im vorigen Paragraphen haben noch die Eigenthümlichkeit, dass der Coefficient jedes der 16 Glieder der rechten Seite zweigliedrig ist. Man kann aber durch Specialisirung von w_a es erreichen, dass diese Coefficienten *eingliedrig* werden.

Es genügt zu diesem Zwecke, wie (2) zeigt, die w_a so anzunehmen, dass

$$\vartheta_{q'}(w) = 0$$

wird, ohne dass zugleich

$$\vartheta_q(w)$$

verschwindet; d. h. man hat in (1), (2) für die w_a ein halbes Periodensystem einzusetzen, dessen Charakteristik eine der 24 folgenden

$$(q'\alpha_\varrho), \quad (q\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$$

ist, die wir mit (r) bezeichnen wollen. Man kann auch umgekehrt für (r) jede beliebige gerade oder ungerade Charakteristik nehmen, (0) ausgenommen, für (q) sodann jede gerade Charakteristik, für die (qr) gerade, was noch auf 2 . 36 Arten geht, für (q') jede gerade Charakteristik, für die $(q'r)$ ungerade, was auf 64 Arten geht. (1) und (1') liefert nun, indem man

$$w_a = \tfrac{1}{2}\varpi^r_a$$

einsetzt:

$$\text{(3)} \qquad \vartheta_r(u+v)\,\vartheta(u-v) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} a'_\varrho\,\vartheta_{\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{r\alpha_\varrho}(u) + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} b'_\varrho\,\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{qq'r\alpha_\varrho}(u),$$

wo:

$$
(3') \qquad \left\{
\begin{aligned}
a'_\varrho &= \frac{(-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\varrho} m^q + n^r m^{\alpha_\varrho})} \cdot \vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{qr\alpha_\varrho}(v)}{\vartheta_q\,\vartheta_{qr}} \\
b'_\varrho &= \frac{(-1)^{\Sigma(n^{q'\alpha_\varrho} m^q + n^r m^{\alpha_\varrho})} \cdot \vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{q'r\alpha_\varrho}(v)}{\vartheta_q\,\vartheta_{qr}},
\end{aligned}
\right.
$$

und wo (r) beliebig, nur nicht $\equiv (0)$, (q), (q'), (qr) gerade, $(q'r)$ ungerade sein müssen, die $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_8)$ irgend ein (q) und (q') zugeordnetes vollständiges 8-System ungerader Charakteristiken vorstellen.

Giebt man nun in dieser Darstellung den Grössen (r), (q), (q'), (α_ϱ) besondere zusammengehörige Werthe (r_0), (q_0), (q'_0), (α^0_ϱ), und dividirt (3) durch die so entstehende specielle Gleichung (3_0), so erhält man

$$\frac{\vartheta_r(u+v)}{\vartheta_{r_0}(u+v)}$$

rational ausgedrückt durch Functionen der Form:

$$\frac{\vartheta_\alpha(u)}{\vartheta_{r_0}(u)}, \quad \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_{r_0}(v)},$$

also *einen Ausdruck des Additionstheorems dieser achtfach periodischen Functionen.* Dabei kann (r) jeden beliebigen Werth, ausser (0), annehmen; man erhält also in dem bezeichneten Ausdrucke, dessen Zähler sowohl als Nenner aus einer Summe von je 16 eingliedrigen Producten besteht, sobald man (r_0) und den Nenner unverändert lässt, aber (r), also den Zähler variirt, nicht *alle* 256 Quotienten

$$\frac{\vartheta_r(u+v)}{\vartheta_{r_0}(u+v)},$$

sondern deren nur 255. Eine allgemeinere Formel, die aus der vorigen durch Vermehrung der u_a um ein beliebiges halbes Periodensystem

$$\tfrac{1}{2}\varpi^g$$

entsteht, ist:

$$
(4) \qquad \frac{\vartheta_q\,\vartheta_{qr}}{\vartheta_{q_0}\,\vartheta_{q_0 r_0}} \cdot \frac{\vartheta_{gr}(u+v)}{\vartheta_{gr_0}(u+v)} = \frac{L_r}{L_{r_0}},
$$

für

$$
\begin{aligned}
L_r = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} \Big\{ & (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_r} m^q + n^{gr} m^{\alpha_r})}\, \vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{qr\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{g\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{gr\alpha_\varrho}(u) \\
& + (-1)^{\Sigma(n^{gq'\alpha_\varrho} m^q + n^{gr} m^{q'\alpha_\varrho}}\, \vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{q'r\alpha_\varrho}(v)\,\vartheta_{gqq'\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{gqq'r\alpha_\varrho}(u) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{r_0} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=8} \Big\{ & (-1)^{\Sigma(n^{\alpha^0_r} m^{q_0} + n^{gr_0} m^{\alpha^0_r})}\, \vartheta_{q_0\alpha^0_\varrho}(v)\,\vartheta_{q_0 r_0\alpha^0_\varrho}(v)\,\vartheta_{g\alpha^0_\varrho}(u)\,\vartheta_{gr_0\alpha^0_\varrho}(u) \\
& + (-1)^{\Sigma(n^{gq_0'\alpha^0_\varrho} m^{q_0} + n^{gr_0} m^{q_0'\alpha^0_\varrho})}\, \vartheta_{q_0'\alpha^0_\varrho}(v)\,\vartheta_{q_0' r_0\alpha^0_\varrho}(v)\,\vartheta_{gq_0q_0'\alpha^0_\varrho}(u)\,\vartheta_{gq_0q_0'r_0\alpha^0_\varrho}(u) \Big\}
\end{aligned}
$$

wo nun die Charakteristik $(g r_0)$ des Nenners *ganz* beliebig sein darf, während (r), (r_0) etc. den im Vorhergehenden gegebenen Bedingungen genügen; aber auch diese Formel gilt *nicht* für alle 256 Quotienten, welche entstehen, indem man (gr) alle Werthe giebt, vielmehr ist der Fall $(gr) \equiv (g)$ ausgeschlossen.

Sollen also die Ausdrücke für die obigen 256 Quotienten *alle* denselben Nenner haben, so muss man darauf verzichten, dass in *sämmtlichen* Producten des Zählers und Nenners der rechten Seite die Coefficienten eingliedrige Ausdrücke werden. Will man es erreichen, dass etwa nur die Coefficienten des gemeinsamen Nenners zweigliedrig, die aller Zähler eingliedrig sind, so bleibt wieder *ein* Quotient ausgenommen, derjenige, welcher den Werth 1 hat; denn setzt man zu diesem Zwecke in (1)

$$w_a = 0,$$

und dividirt dann (3) durch (1), so erhält man:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_q \vartheta_{qr}}{(-1)^{\Sigma n^{q_0'} m^{q_0}} \vartheta^4_{q_0} - (-1)^{\Sigma n^{q_0} m^{q_0'}} \vartheta^4_{q_0'}} \cdot \frac{\vartheta_r(u+v)}{\vartheta(u+v)} = \frac{M_r}{N},$$

wo:

$$M_r = \sum_\varrho \Big\{ (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\varrho} m^q + n^r m^{\alpha_\varrho}} \vartheta_{q\alpha_\varrho}(v)\, \vartheta_{qr\alpha_\varrho}(v)\, \vartheta_{\alpha_\varrho}(u)\, \vartheta_{r\alpha_\varrho}(u)$$
$$+ (-1)^{\Sigma(n^{q'\alpha_\varrho} m^q + n^r m^{q'\alpha_\varrho})} \vartheta_{q'\alpha_\varrho}(v)\, \vartheta_{q'r\alpha_\varrho}(v)\, \vartheta_{qq'\alpha_\varrho}(u)\, \vartheta_{qq'r\alpha_\varrho}(u) \Big\},$$

$$N = \sum_\varrho \Big\{ \Big[(-1)^{\Sigma n^{q_0'\alpha^0_\varrho} m^{q_0}} \vartheta^2_{q_0} \vartheta^2_{q_0\alpha^0_\varrho}(v) - (-1)^{\Sigma n^{q_0\alpha^0_\varrho} m^{q_0'}} \vartheta^2_{q_0'} \vartheta^2_{q_0'\alpha^0_\varrho}(v)\Big] \vartheta^2_{\alpha^0_\varrho}(u)$$
$$+ \Big[(-1)^{\Sigma n^{\alpha^0_\varrho} m^{q_0}} \vartheta^2_{q_0} \vartheta^2_{q_0'\alpha^0_\varrho}(v) - (-1)^{\Sigma n^{\alpha^0_\varrho} m^{q_0'}} \vartheta^2_{q_0'} \vartheta^2_{q_0\alpha^0_\varrho}(v)\Big] \vartheta^2_{q_0 q_0'\alpha^0_\varrho}(u) \Big\},$$

((r) von (0) verschieden, (q), (q'), (qr) gerade, $(q'r)$ ungerade, die (α_ϱ) ein 8-System $S_{q,q'}$; ferner (q_0), (q_0') gerade, die (α^0_ϱ) ein 8-System $S_{q_0, q_0'}$), als Ausdruck aller Quotienten $\frac{\vartheta_r(u+v)}{\vartheta(u+v)}$, ausgenommen $\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u+v)} = 1$.

Man kann daher für alle 256 Quotienten Ausdrücke mit gemeinsamem Nenner nur dadurch erhalten, dass man in (1) für die w_a *alle* halben Periodensysteme setzt und die so erhaltenen Formeln alle durch irgend eine dividirt, welche ebenfalls aus (1) durch Einsetzen eines halben Periodensystems statt der w_a und irgend eine specielle Annahme von (q), (q') abgeleitet ist.

§ 13.

Beziehungen zwischen 6 Thetaproducten und zwischen Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente.

Durch Specialisirung der $v_\mathfrak{a}$ ergeben sich aus der Formel (3) des vorigen Paragraphen solche Formeln, in denen nur 6 Producte der Art

$$\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\beta(u),$$

in denen (β) von (α) *verschieden* sein muss, linear und homogen auftreten.

Sei in (3) etwa:

$$\begin{aligned} (qq') &= (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8) = (p\alpha_8), \\ (p) &= (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_7), \\ (q) &= (pr), \quad (q') = (ps). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$v_\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\varpi_\mathfrak{a}^{qq'\alpha_6\alpha_7\alpha_8},$$

und erhalten dann

$$a_6' = a_7' = a_8' = 0, \quad b_1' = b_2' = \cdots = b_8' = 0,$$

also eine Beziehung von der Form:

$$\vartheta_{q\alpha_6\alpha_7}(u)\,\vartheta_{qr\alpha_6\alpha_7}(u) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=5} a_\varrho''\,\vartheta_{\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{r\alpha_\varrho}(u).$$

Betrachtet man aber die Indices der ersten Factoren der hier auftretenden 6 ϑ-Producte:

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ \ldots,\ (\alpha_5),\ (q\alpha_6\alpha_7),$$

und vergleicht dieselben mit dem in den ersten Sätzen des § 7. Gesagten, so erkennt man, dass diese 6 Indices Charakteristiken sind, die in 4 verschiedenen 7-Systemen oder in 2 verschiedenen vollständigen 8-Systemen vorkommen; dass man also, da das betreffende 8-System (q), (q'), (α_ϱ) ein ganz beliebiges war, für diese 6 Indices *irgend* 6 *Charakteristiken eines beliebigen* 8-*Systems* wählen kann, oder, was hier dasselbe ist, 6 *Charakteristiken eines beliebigen* 7-*Systems*. Seien dieselben

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ \ldots,\ (\alpha_6),$$

und sei

$$-(t) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_6),$$

wo (t) alle Werthe, (0) ausgenommen, haben kann. Die obige Formel zeigt dann weiter, dass die Indices der 6 zweiten Factoren bezüglich folgende sind:

$$(t\alpha_1),\ (t\alpha_2),\ \ldots,\ (t\alpha_6)$$

so dass die Relation wird:

$$(6) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} l_\varrho\, \vartheta_{\alpha_\varrho}(u)\, \vartheta_{t\alpha_\varrho}(u) = 0 .$$

Zur directen Bestimmung der Constanten l_ϱ setze man, wenn

$$S_{q,q'} = (qq') = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_6) + (\alpha_7) + (\alpha_8),$$

ein die $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_6)$ enthaltendes, vollständiges 8-System ist, für die u_a die halben Perioden

$$u_a = \tfrac{1}{2}\varpi_a^{qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma} \quad (\varrho, \sigma \text{ von } 1, \ldots, 6),$$

was die obige Gleichung überführt in:

$$l_\varrho \vartheta_{\alpha_\varrho}(\tfrac{1}{2}\varpi^{qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma}) \cdot \vartheta_{t\alpha_\varrho}(\tfrac{1}{2}\varpi^{qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma}) + l_\sigma \vartheta_{\alpha_\sigma}(\tfrac{1}{2}\varpi^{qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma}) \vartheta_{t\alpha_\sigma}(\tfrac{1}{2}\varpi^{qq'\alpha_\varrho\alpha_\sigma}) = 0,$$

d. h.

$$l_\varrho \cdot (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\sigma} m^q + n^{q't} m^{\alpha_\sigma})} \vartheta_{qq'\alpha_\sigma} \cdot \vartheta_{qq't\alpha_\sigma} - l_\sigma (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\varrho} m^q + n^{q't} m^{\alpha_\varrho})} \vartheta_{qq'\alpha_\varrho} \vartheta_{qq't\alpha_\varrho} = 0.$$

und hieraus, da es nur auf die Verhältnisse der Constanten l_ϱ ankommt:

$$(6') \qquad l_\varrho = (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\varrho} m^q + n^{q't} m^{\alpha_\varrho})} \vartheta_{qq'\alpha_\varrho} \cdot \vartheta_{qq't\alpha_\varrho},$$

$$(\varrho = 1, \ldots, 6, \text{ und } (qq't) = (\alpha_7\alpha_8)).$$

Die Relation (6), (6') zwischen 6 Thetaproducten ist sehr allgemein, insofern q, q' irgend zwei gerade Charakteristiken sein können und die $(\alpha_1) \ldots (\alpha_6)$ irgend 6 Charakteristiken eines (q), (q') zugeordneten 8-Systems.

Wir leiten jetzt, indem wir auch noch die u_a durch halbe Periodensysteme ersetzen, einige Beziehungen zwischen den Thetafunctionen, deren Argumente $= 0$ sind, ab. Setzt man zunächst in (6):

$$u_a = \tfrac{1}{2}\varpi_a^{qq'},$$

so findet man eine Beziehung zwischen 6 *Quadraten* von Thetaproducten für die Nullwerthe der Argumente:

$$(7) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_\varrho} m^q + n^{qt} m^{\alpha_\varrho})} \vartheta^2_{qq'\alpha_\varrho} \cdot \vartheta^2_{qq'\alpha_\varrho} = 0.$$

Die Substitution eines halben Periodensystems

$$u_a = \tfrac{1}{2}\varpi_a^{\alpha_5\alpha_6}$$

ergiebt weiter eine Beziehung zwischen nur *vier* constanten Thetaproducten:

$$(8)\qquad (-1)^{\Sigma n^{q'\alpha_2\alpha_3\alpha_4} m^{q\alpha_1}} \cdot \vartheta_{qq'\alpha_1}\vartheta_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\vartheta_{\alpha_1\alpha_5\alpha_6}\vartheta_{\alpha_1\alpha_7\alpha_8}$$
$$+(-1)^{\Sigma n^{q'\alpha_1\alpha_3\alpha_4} m^{q\alpha_2}} \cdot \vartheta_{qq'\alpha_2}\vartheta_{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}\vartheta_{\alpha_2\alpha_5\alpha_6}\vartheta_{\alpha_2\alpha_7\alpha_8}$$
$$+(-1)^{\Sigma n^{q'\alpha_1\alpha_2\alpha_4} m^{q\alpha_3}} \cdot \vartheta_{qq'\alpha_3}\vartheta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}\vartheta_{\alpha_3\alpha_5\alpha_6}\vartheta_{\alpha_3\alpha_7\alpha_8}$$
$$+(-1)^{\Sigma n^{q'\alpha_1\alpha_2\alpha_3} m^{q\alpha_4}} \cdot \vartheta_{qq'\alpha_4}\vartheta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\vartheta_{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}\vartheta_{\alpha_4\alpha_7\alpha_8} = 0.$$

Von bemerkenswerthen speciellen Formeln, die unsere Theorie liefert, erwähnen wir noch solche zwischen 9 Thetaproducten der Form

$$\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\beta(u)$$

wo (α) von (β) verschieden. Man erhält dieselben direct aus (1), § 11., indem man daselbst etwa:

$$u = 0, \qquad w = \tfrac{1}{2}\varpi^{\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}$$

setzt, in der Form:

$$(9)\quad N.\vartheta(u)\vartheta_{\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}(u) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=4}\left[k_\varrho\vartheta_{q\alpha_\varrho}(u)\,\vartheta_{q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_\varrho}(u) - k'_\varrho\vartheta_{q'\alpha}(u)\vartheta_{q'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_\varrho}(u)\right],$$

wo:

$$N = (-1)^{\Sigma n^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} m^{q'}}\vartheta_{q'}^2\cdot\vartheta_{q'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}^2 - (-1)^{\Sigma n^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} m^{q}}\vartheta_q^2\,\vartheta_{q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}^2,$$

$$k_\varrho = (-1)^{\Sigma n^{\alpha_\varrho} m^{q'}}\vartheta_{q'}\,\vartheta_{q'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}\,\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\,\vartheta_{qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_\varrho},$$

$$k'_\varrho = (-1)^{\Sigma n^{\alpha_\varrho} m^{q}}\vartheta_q\,\vartheta_{q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8}\,\vartheta_{qq'\alpha_\varrho}\,\vartheta_{qq'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_\varrho}.$$

§ 14.

Die hyperelliptischen Thetafunctionen.

Die Beziehungen zwischen 4 Thetaproducten, welche wir in Formel (8) des vorigen Paragraphen entwickelt haben, setzen uns in Stand, die *nothwendigen und hinreichenden Bedingungen* für die Thetamoduln aufzustellen, unter denen die allgemeinen Thetafunctionen von vier Argumenten zu *hyperelliptischen* werden. Bisher ist nur bekannt,*) dass das Verschwinden eines gewissen Systems von 10 geraden Thetafunctionen für die Nullargumente zu dieser Specialisirung genügend ist. Ich werde nun nachweisen, dass die in diesen 10 Gleichungen enthaltenen *drei* Bedingungen für die Moduln explicite durch das Ver-

*) Weierstrass (vgl. Königsberger's o. c. Abh. in Borchardt's Journal, 64); Pringsheim, Math. Annalen Bd. XII, p. 435.

schwinden von nur drei geraden Thetafunctionen für die Nullargumente dargestellt werden können, indem dasselbe das Verschwinden von 7 weiteren geraden ϑ-Functionen von selbst mit sich bringt.

Zu dem Zwecke untersuche ich die Beziehungen zwischen denjenigen Charakteristiken, welche in Formel (8) des vorigen Paragraphen als Indices der ϑ-Functionen auftreten. Die wesentlichen Eigenschaften derselben, welche bei irgend einer Substitution (vgl. § 8.) erhalten bleiben, sind die: die Summe dreier Charakteristiken, die Indices von Thetafunctionen aus *drei verschiedenen* Gliedern von (8) sind, ist *ungerade;* die Summe solcher drei aber, die aus nur *zwei* Gliedern oder *einem* Gliede genommen sind, ist *gerade.* Wenn also die ersten drei Glieder von (8) Thetafunctionen mit den Charakteristiken

$$(qq'\alpha_1),\ (qq'\alpha_2),\ (qq'\alpha_3),$$

die drei beliebige gerade Charakteristiken mit ungerader Summe vorstellen, enthalten, so kann das vierte Glied nur 4 solche aus denjenigen 28 Charakteristiken

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases}(q),\ (q'),\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3),\ (qq'\alpha_4)\ \ldots,\ (qq'\alpha_8),\ (\alpha_4\alpha_5\alpha_6),\ \ldots,\ (\alpha_6\alpha_7\alpha_8)\\ (q\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7),\ \ldots,\ (q\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8),\ (q'\alpha_4\alpha_5\alpha_8\alpha_7),\ \ldots,\ (q'\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8)\end{cases}$$

enthalten, welche, zu 7 geordnet, mit den drei gegebenen auch zu einem der 8 verschiedenen 10-*Systeme gerader Charakteristiken* sich vereinigen können, wie sie in § 9. besprochen sind. Sei ein solches 10-System:

$$(\Sigma)\quad (qq'\alpha_1),\ (qq'\alpha_2),\ (qq'\alpha_3),\ (qq'\alpha_4),\ \ldots,\ (qq'\alpha_8),\ (q),\ (q').$$

Von den 4 Charakteristiken $(\beta_1)\ldots(\beta_4)$ des 4ten Gliedes von (8) muss dann nothwendig wenigstens *eine* mit einer aus der Reihe (Σ) übereinstimmen; denn ist etwa, den oben angegebenen Eigenschaften entsprechend:

$$(\beta_1)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3),\ (\beta_2)=(\alpha_4\alpha_5\alpha_6),\ (\beta_3)=(\alpha_6\alpha_7\alpha_8),$$

so folgt

$$(\beta_4)=(\beta_1)+(\beta_2)+(\beta_3)=(qq'\alpha_6);$$

und so für alle Combinationen von (β_1), (β_2), (β_3) aus den 28 Charakteristiken (A).

Was hier von den 3 ersten Charakteristiken von (Σ) bewiesen ist, gilt für irgend drei derselben gleichmässig; nämlich: *dass jede Relation* (8), *welche* 3 *Indices aus* (Σ) *in* 3 *verschiedenen Gliedern enthält, im vierten Gliede ebenfalls einen Index aus* (Σ) *enthalten muss.* Dieser Satz gilt für jedes der in § 9. angegebenen 10-Systeme; dagegen *nicht für ein System von weniger als* 10 *geraden Charakteristiken.* Von solchen existiren nach demselben Paragraphen noch Systeme von 8, von der Art:

$$(q),\ (q'),\ (qq'\alpha_1),\ \ldots,\ (qq'\alpha_5),\ (\alpha_6\alpha_7\alpha_8);$$

wenn nun die 3 ersten Glieder von (8) wieder etwa $(qq'\alpha_1)$, $(qq'\alpha_2)$,

$(q q' \alpha_3)$ enthalten, so können die vier Indices des vierten Gliedes folgende sein:

$$(q q' \alpha_7),\ (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3),\ (\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7),\ (\alpha_4 \alpha_7 \alpha_8),$$

von denen also keine in dem Systeme von 8 Charakteristiken vorkommt.

Aus diesem Satze folgt sogleich, *dass das Verschwinden von drei geraden ϑ-Functionen mit Argumenten* 0, *für welche die Summe der Charakteristiken ungerade ist, das Verschwinden von noch* 7 *weiteren ϑ-Functionen mit* 0-*Argumenten, deren Charakteristiken mit den drei erstangenommenen zusammen ein* 10-*System bilden, nach sich zieht.* Indessen sind diese 7 ϑ-Functionen durch die 3 gegebenen nicht *eindeutig* bestimmt, sondern auf 8 verschiedene Weisen. Hat man *vier* verschwindende gerade ϑ-Functionen eines 10-Systems herausgewählt, so sind die 6 übrigen auf *zwei* Weisen wählbar; durch *fünf* eines Systems ist aber dasselbe vollständig bestimmt.

Die Theorie der 10-Systeme des § 9. und die Auszeichnung eines solchen Systems gerader ϑ-Functionen bildet also den naturgemässen Uebergang von den allgemeinen zu den hyperelliptischen ϑ-Functionen. Auch ergeben sich die in der Theorie der letzteren bekannten Relationen unmittelbar durch diesen Uebergang, so aus (7) § 13. die Beziehungen zwischen je 3 Quadraten von Functionen mit Nullargumenten.

Das 10-System gerader Charakteristiken, welches bei der von H. Weierstrass vorgenommenen Normirung ausgezeichnet ist*):

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

ergiebt sich, wenn man etwa die beiden ersten Charakteristiken mit (q) und (q') bezeichnet, aus dem vollständigen 8-System ungerader Charakteristiken:

$$(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ (\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ (\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ (\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$(\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ (\alpha_6)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ (\alpha_7)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ (\alpha_8)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

in der Form:

$$(q),\ (q'),\ (q q' \alpha_1),\ (q q' \alpha_2),\ \ldots,\ (q q' \alpha_8).$$

---

*) Ich entnehme diese Zahlen der von Hrn. Pringsheim berechneten Tabelle, Math. Annalen Bd. XII, p. 449.

Erlangen, Juni 1878.

Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connexe zweiter Ordnung und erster Classe entspricht.

Von Robert Krause in Chemnitz.

Im 17. Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hat Clebsch*) gezeigt, dass das Studium einer quaternären Form, welche beliebig viele Reihen von Veränderlichen jeder Classe**) und zwar die einer jeden homogen und zu beliebig hohem Grade enthält, zurückgeführt werden kann auf das Studium eines simultanen Systems von Formen, welche aus jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten. Von diesen Formen sind aber bis jetzt erst die drei einfachsten Arten untersucht worden, nämlich diejenigen, in welchen die Veränderlichen nur einer Classe vorkommen und die gleich Null gesetzt Flächen in Punkt- oder Ebenencoordinaten oder Liniencomplexe darstellen. Indem Clebsch durch diesen Umstand die relative Unvollkommenheit der Theorie der quaternären Formen erklärt, stellt er es zugleich als eine Forderung der *Algebra* hin, auch solche Formen als Grundformen zu betrachten, welche gleichzeitig zwei der drei Classen, oder alle drei derselben enthalten. Der *Geometrie* ihrerseits fällt alsdann, vermöge der zwischen ihr und der Algebra bestehenden Beziehungen, die Aufgabe zu, die durch Nullsetzen dieser Formen gegebenen Gebilde in den Kreis ihrer Untersuchungen zu ziehen.

Im Folgenden wird der Versuch gemacht, einige Eigenschaften eines dieser Gebilde abzuleiten und zwar desjenigen, welches durch Nullsetzung einer Form erhalten wird, die die Coordinaten eines Punktes homogen zum zweiten und die einer Ebene homogen zum ersten Grade enthält. Vorher mögen aber noch einige allgemeine Bemerkungen Platz finden.

---

*) Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. Vergl. auch Clebsch, Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Mathematische Annalen, V. Band, S. 427 f.

**) Sind die Veränderlichen einer quaternären Form Coordinaten von Punkten, so sind die Veränderlichen der verschiedenen Classen Punkt-, Ebenen- und Liniencoordinaten.

Bezeichnet man die Coordinaten eines Punktes x durch x_1, x_2, x_3, x_4, die einer Ebene u durch u_1, u_2, u_3, u_4, enthält ferner die Gleichung

$$(1) \qquad f(\overset{m}{x}, \overset{n}{u}) = 0 \text{ oder kürzer } f = 0$$

x_1, x_2, x_3, x_4 homogen zum m^{ten} und u_1, u_2, u_3, u_4 homogen zum n^{ten} Grade, so wird durch die Gesammtheit aller Punkte und Ebenen, deren Coordinaten die Gleichung (1) befriedigen, ein Gebilde constituirt, das im Folgenden, nach Analogie des entsprechenden von Clebsch*) als Connex bezeichneten Gebildes der analytischen Geometrie der Ebene, der Kürze wegen *Raumconnex* m^{ter} *Ordnung und* n^{ter} *Classe* oder *Raumconnex* (m, n) genannt werden soll.

Betrachtet man eine Ebene u des Connexes als gegeben, so stellt die Gleichung (1), indem man u_1, u_2, u_3, u_4 als constant, x_1, x_2, x_3, x_4 aber als veränderlich ansieht, eine Fläche der m^{ten} Ordnung dar, deren Punkte dem Connexe angehören. Betrachtet man dagegen einen Punkt x des Connexes als gegeben, so stellt die Gleichung (1), indem man x_1, x_2, x_3, x_4 als constant, u_1, u_2, u_3, u_4 aber als veränderlich annimmt, eine Fläche der n^{ten} Classe dar, deren Tangentialebenen zugleich Ebenen des Connexes sind.

Durch *jede* Ebene u des Connexes sind daher doppelt unendlich viele Punkte, durch *jeden* Punkt x doppelt unendlich viele Ebenen desselben bestimmt. Erstere bilden eine Fläche F_m der m^{ten} Ordnung, letztere umhüllen eine Fläche U_n der n^{ten} Classe. F_m soll *die der Ebene u entsprechende Fläche des Connexes* oder kürzer *die Connexfläche von u*, U_n *die dem Punkte x entsprechende Fläche* oder *die Connexfläche von x* genannt werden.

Punkt und Ebene treten also immer zusammen auf. Aus diesem Grunde soll weder der Punkt, noch die Ebene für sich, sondern erst *jede Combination eines Punktes mit einer Ebene als Raumelement* betrachtet werden. Man erhält demnach die Gesammtheit der Elemente des Raumes, wenn man jeden der dreifach unendlich vielen Punkte mit jeder der dreifach unendlich vielen Ebenen combinirt. *Sie bilden ein sechsfach unendliches System* oder *eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen* und aus dieser scheidet die Gleichung eines Connexes die *fünffach* unendliche Schaar der Elemente aus, deren Coordinaten ihr genügen.

---

*) Clebsch, Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene, Mathematische Annalen, VI. Band, S. 203 f. — Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Lindemann, Leipzig 1876, ersten Bandes zweite Abtheilung, S. 924 f. Diese Abhandlungen sind auch für das Folgende zu vergleichen, dazu noch: Godt, Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Classe, Göttingen 1873.

Wie durch die gemeinsamen Punkte zweier Flächen Curven, durch die gemeinsamen Linien zweier, bezüglich dreier Complexe Congruenzen und Strahlenflächen gebildet werden, so werden auch durch die gemeinsamen Elemente zweier oder mehrerer Raumconnexe neue Gebilde erzeugt.

Zwei Connexe (m_1, n_1) und (m_2, n_2) haben vierfach unendlich viele Elemente gemein. Die Gesammtheit derselben bezeichnen wir als *Raumcoincidenz*. In dieser entspricht jeder Ebene u eine Curve von der Ordnung $m_1 m_2$, die Durchschnittslinie der beiden Connexflächen von u, die wir *die Coincidenzcurve der Ebene* u nennen wollen. Jedem Punkte x entspricht eine entwickelbare Fläche von der Classe $n_1 n_2$, *die Coincidenzfläche von* x; sie wird von den gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Connexflächen des Punktes x umhüllt. Mit anderen Worten: Die Punkte, welche sich mit einer gegebenen Ebene zu Elementen einer Coincidenz vereinigen, bilden eine Curve, die Ebenen, welche mit einem gegebenen Punkte Elemente einer Coincidenz sind, umhüllen eine entwickelbare Fläche.

Die zusammenfallenden Elemente *dreier* Connexe (m_1, n_1), (m_2, n_2) (m_3, n_3) bilden eine *dreifache Mannigfaltigkeit*. In derselben entsprechen jeder Ebene u offenbar $m_1 m_2 m_3$ Punkte, die Durchschnittspunkte der drei Connexflächen von u, und jedem Punkte x $n_1 n_2 n_3$ Ebenen, die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der drei Flächen, welche x in den gegebenen Connexen entsprechen. Es giebt daher in diesem Gebilde im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Punkten, welche sich mit einer gegebenen Ebene zu Elementen vereinigen, und ebenso nur eine endliche Anzahl von Ebenen, welche mit einem gegebenen Punkte zu Elementen zusammentreten können.

Vier Connexe (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) und (m_4, n_4) können nur doppelt unendlich viele Elemente gemein haben. Die Gesammtheit dieser Elemente bildet ein *Flächenpaar*. Die eine Fläche wird von den Punkten der Elemente des Paares erfüllt, die andere von den Ebenen derselben umhüllt. Die Gleichungen dieser Flächen erhält man, wenn man aus den Gleichungen der vier Connexe zuerst u_1, u_2, u_3, u_4 und dann x_1, x_2, x_3, x_4 eliminirt. Die *Ordnung* der ersteren Fläche ist:

$$m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3$$

und die *Classe* der letzteren:

$$n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3 .$$

Die einfach unendlich vielen Elemente, welche *fünf* Connexen von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 und den Classen n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 gemeinsam sind, bilden in ihrer Gesammtheit *eine Curve und eine entwickelbare Fläche*, also *ein aus einer Curve und einer Fläche bestehendes Paar*. Die Curve wird in ähnlicher Weise wie im vorher-

gehenden Falle von den Punkten der Elemente des Paares gebildet, die Fläche von den Ebenen derselben umhüllt. Die *Ordnung* der Curve ist:

$$m_1 m_2 n_3 n_4 n_5 + m_1 m_3 n_2 n_4 n_5 + \cdots + m_4 m_5 n_1 n_2 n_3$$

und die *Classe* der entwickelbaren Fläche:

$$n_1 n_2 m_3 m_4 m_5 + n_1 n_3 m_2 m_4 m_5 + \cdots + n_4 n_5 m_1 m_2 m_3.$$

Sechs Connexe können, da die Elemente des Raumes eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bilden, nur eine *endliche* Anzahl von Elementen gemein haben. *Dieselbe* ist, wenn $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ die Ordnungen und $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ die Classen der Connexe sind, gleich

$$m_1 m_2 m_3 n_4 n_5 n_6 + m_1 m_2 m_4 n_3 n_5 n_6 + \cdots + m_4 m_5 m_6 n_1 n_2 n_3.$$

Ist z. B. $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 1$, so sind die sechs Connexe, wenn man in ihren Gleichungen u_1, u_2, u_3, u_4 als Parameter auffasst, nicht verschieden von sechs linearen projectivischen Systemen von den Ordnungen $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$. Die eben gefundene Zahl muss daher, wenn man die angegebene Substitution ausführt, in die Zahl der Punkte übergehen, durch welche je sechs entsprechende Flächen von sechs linearen projectivischen Systemen hindurchgehen, deren Ordnungszahlen bezüglich $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ sind, was in der That der Fall ist*). Aehnliches gilt von den vorher betrachteten Gebilden. —

Im Connexe (2, 1), mit dessen Untersuchung wir uns nun beschäftigen werden, ist die Fläche, welche einem beliebigen Puncte x entspricht, von der ersten Classe, also ein Ebenenbündel, dessen Mittelpunkt der zu x gehörige Punkt genannt wird. Die Bestimmung der Anzahl der Punkte, welche mit ihren zugehörigen Punkten zusammenfallen, und die der Orte der Punkte, welche zu den Punkten einer Geraden bezüglich einer Ebene gehören, bildet den Gegenstand des ersten Paragraphen. Im zweiten wird die Frage nach den Enveloppen der Ebenen, deren Connexflächen eine Gerade bezüglich eine Ebene berühren, beantwortet und gezeigt, dass diese Enveloppen mit den in § 1. erhaltenen Gebilden identisch sind; daran schliesst sich die Herleitung der Enveloppe der Ebenen, deren Connexflächen Doppelpunkte besitzen und die des Ortes dieser Doppelpunkte. Im dritten Paragraphen werden, nachdem nachgewiesen worden ist, dass die zu den Ebenen des Raumes gehörigen Flächen Steiner'sche Flächen sind, einige Eigenschaften des eben erwähnten Flächenpaares entwickelt. Der vierte Paragraph ist zunächst der Untersuchung eines covarianten Ge-

---

*) Vergl. Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, deutsch von Curtze, Berlin 1870, S. 142.

bildes gewidmet, das mit einer doppelt binären Form zusammenhängt und dessen Gleichung zwei Reihen von Liniencoordinaten enthält. Daran schliesst sich die Einführung des conjugirten Connexes, eines Gebildes, welches dem ursprünglichen Connexe in derselben Weise gegenübersteht, wie eine als Punktgebilde betrachtete Fläche derselben Fläche betrachtet als Ebenengebilde. Ferner wird der Zusammenhang des conjugirten Connexes mit einer doppelt ternären Form hervorgehoben und angegeben, wie man die Gleichung desselben aufstellen kann. Endlich werden im fünften und letzten Paragraphen noch einige Untersuchungen über eine Coincidenz angestellt, welche durch den Connex (2, 1) und den besonderen Connex $u_x = 0$ gegeben ist. Sie betreffen die Enveloppe der Ebenen, deren Coincidenzcurven Doppelpunkte besitzen, den Ort dieser Doppelpunkte, den Ort der Coincidenzcurven der Ebenen, welche durch eine Gerade gehen und die Enveloppe der Coincidenzkegel, deren Spitzen auf einer Geraden liegen.

§ 1.

Betrachtung der Flächen, welche den Punkten x entsprechen.

Der Raumconnex zweiter Ordnung und erster Classe wird durch eine Gleichung von der Form:

(1) $$f(x, u) = \Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ik,l} x_i x_k u_l = a_x^2 u_\alpha = b_x^2 u_\beta = \cdots = 0$$

gegeben, in welcher $a_{ik,l} = a_{ki,l}$ ist*). Bedient man sich der Abkürzungen

$$f_{ik} = a_{ik,1} u_1 + a_{ik,2} u_2 + a_{ik,3} u_3 + a_{ik,4} u_4$$

und

$$X^{(i)} = a_{11,i} x_1^2 + a_{22,i} x_2^2 + \cdots + 2 a_{34,i} x_3 x_4,$$

so geht sie über in

(2) $$f = \Sigma\Sigma f_{ik} x_i x_k = \Sigma X^{(i)} u_i = 0.$$

Die Fläche U_1, welche einem Punkte x entspricht, ist, wie sich aus (1) ergiebt, von der ersten Classe, also ein *Punkt*, der Träger oder Mittelpunkt des Ebenenbündels, dessen Ebenen mit x Elemente des Connexes (2, 1) bilden. Einem Punkte x entspricht demnach wieder ein Punkt. Derselbe werde *der zu x gehörige Punkt* genannt und mit ξ bezeichnet.

Wir wenden uns nun zuerst zur Beantwortung der Frage, ob ein Punkt x mit seinem zugehörigen Punkte ξ zusammenfallen kann. Zu diesem Zwecke gehen wir von der zuletzt angegebenen Form der Gleichung (2)

---

*) In diesem, sowie in ähnlichen späterhin auftretenden Ausdrücken sind, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, für die Indices die Werthe 1, 2, 3, 4 zu setzen.

$$f = X^{(1)}u_1 + X^{(2)}u_2 + X^{(3)}u_3 + X^{(4)}u_4 = 0$$

aus, in welcher die $X^{(i)}$, multiplicirt mit einem Proportionalitätsfactor ϱ, die Coordinaten des Punktes ξ bedeuten. Zwei Punkte fallen immer und nur dann zusammen, wenn ihre Coordinaten gleich sind. Die Bedingungen für das Zusammenfallen der Punkte x und ξ sind demnach:

$$\varrho X^{(1)} = x_1, \quad \varrho X^{(2)} = x_2, \quad \varrho X^{(3)} = x_3, \quad \varrho X^{(4)} = x_4.$$

Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit den folgenden sechs Gleichungen, welche man durch Elimination von ϱ erhält:

$$(4)\quad \begin{array}{lll} X^{(1)}x_2 - X^{(2)}x_1 = 0, & X^{(1)}x_3 - X^{(3)}x_1 = 0, & X^{(1)}x_4 - X^{(4)}x_1 = 0, \\ X^{(2)}x_3 - X^{(3)}x_2 = 0, & X^{(2)}x_4 - X^{(4)}x_2 = 0, & X^{(3)}x_4 - X^{(4)}x_3 = 0. \end{array}$$

Die Anzahl der Punkte x, welche mit ihren zugehörigen Punkten ξ zusammenfallen, ist also gleich der Anzahl der Punkte, welche die sechs durch die Gleichungen (4) repräsentirten Flächen dritter Ordnung gemein haben. Schreibt man diese Gleichungen in der Form*)

$$\frac{X^{(1)}}{x_1} = \frac{X^{(2)}}{x_2} = \frac{X^{(3)}}{x_3} = \frac{X^{(4)}}{x_4},$$

so sieht man sofort, dass diejenigen Werthe der Variablen, welche drei von ihnen befriedigen, auch den übrigen im Allgemeinen genügen müssen, ausser in den Fällen, wo entweder $X^{(1)}$, x_1 oder $X^{(2)}$, x_2 oder $X^{(3)}$, x_3 oder endlich $X^{(4)}$, x_4 gleichzeitig Null sind, denn dann sind nur drei der Gleichungen erfüllt, die übrigen aber nicht. Wir haben also nur die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte von irgend drei der durch die Gleichungen (4) repräsentirten Flächen, z. B. der drei ersten zu bestimmen und dabei diejenigen auszuschliessen, welche den Flächen $X^{(1)} = 0$ und $x_1 = 0$ gemeinsam sind. Nun ist die Durchschnittslinie der beiden ersten Flächen eine Curve der neunten Ordnung, welche aus dem Kegelschnitte $X^{(1)} = 0$, $x_1 = 0$ oder C_2 und einer Curve siebenter Ordnung C_7 besteht. Letztere trifft die dritte Fläche in $7 \cdot 3 = 21$ Punkten. Von diesen sind noch die Durchschnittspunkte von C_2 und C_7 abzuziehen. Um die Anzahl derselben zu bestimmen, beachten wir, dass die Punkte, deren Coordinaten den Gleichungen

$$X^{(1)}x_2 - X^{(2)}x_1 = 0 \text{ und } X^{(1)}x_3 - X^{(3)}x_1 = 0$$

zugleich genügen, ohne die Gleichungen

$$X^{(1)} = 0 \text{ und } x_1 = 0$$

zu befriedigen, die Gleichung

*) Vergl. Salmon, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearbeitet von Fiedler, Leipzig 1877, S. 363 f.

$$\begin{vmatrix} x_2 & X^{(2)} \\ x_3 & X^{(3)} \end{vmatrix} = 0$$

erfüllen müssen, welche eine Fläche dritter Ordnung darstellt. Die Punkte, in denen sich diese Fläche und C_2 schneiden, sind nun offenbar dieselben, in welchen sich C_7 und C_2 treffen; ihre Anzahl ist gleich $3 \cdot 2 = 6$. Die durch die drei ersten der Gleichungen (4) dargestellten Flächen schneiden sich daher, ausser in der Curve C_2, in $21 - 6 = 15$ Punkten. Wir haben somit den Satz:

Es giebt 15 *Punkte, die mit ihren zugehörigen Punkten zusammenfallen, die also mit allen durch sie hindurchgehenden Ebenen Elemente des Connexes bilden.*

Diese Punkte sollen *Grundpunkte* des Connexes genannt werden.

Obgleich die 15 Grundpunkte durch den Connex bestimmt sind, so können doch nicht umgekehrt 15 beliebig im Raume gelegene Punkte Grundpunkte eines Connexes zweiter Ordnung und erster Classe sein; es dürfen vielmehr nur 13 willkürlich gewählt werden, weil man sonst 45 lineare Bedingungsgleichungen für die 40 homogenen Constanten der Gleichung desselben erhalten würde, wie man ohne Weiteres sieht, wenn man die Gleichung (2) in der Form

$$f = \Sigma X^{(i)} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})_i = 0$$

schreibt und beachtet, dass für einen Grundpunkt x die Gleichungen

$$\Sigma X^{(i)} (x\mathfrak{y}\mathfrak{z})_i = 0, \qquad \Sigma X^{(i)} (x\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')_i = 0, \qquad \Sigma X^{(i)} (x\mathfrak{y}''\mathfrak{z}'') = 0$$

bestehen müssen.

Auf die Beziehungen, welche hiernach zwischen den Grundpunkten eines Connexes (2, 1) bestehen, soll im Folgenden nicht eingegangen werden, wohl aber auf die Frage nach den Punkten ξ, welche zu den Punkten x einer beliebigen Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, sowie nach denjenigen, welche zu den Punkten einer beliebigen Ebene $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ gehören.

Um die erste Frage zu beantworten, beachten wir, dass ein beliebiger Punkt x der Verbindungslinie von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten

$$\varkappa_1 \mathfrak{x}_i + \varkappa_2 \mathfrak{y}_i$$

hat. Der zu x gehörige Punkt ξ ist demnach gegeben durch die Gleichung

$$(5) \qquad (\varkappa_1 a_{\mathfrak{x}} + \varkappa_2 a_{\mathfrak{y}})^2 u_\alpha = 0.$$

Beschreibt x die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, so erzeugt ξ eine gewisse Curve. Da zu zwei aufeinander folgenden Punkten x' und x'' von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ zwei aufeinander folgende Punkte ξ' und ξ'' der eben erwähnten Curve gehören, welche Mittelpunkte von Ebenenbündeln sind, letztere aber ein Ebenenbüschel gemein haben, dessen Axe durch ξ' und ξ'' geht, so ist diese Axe Tangente der Curve und die Ebenen des Büschels sind Tangentialebenen in ξ'. Die Gleichung der Curve wird erhalten, wenn man die

linke Seite von (5) als Function von $\varkappa_1 : \varkappa_2$ betrachtet und die Discriminante dieser Function gleich Null setzt. Man hat also $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ aus den Gleichungen

$$\varkappa_1 a_{\mathfrak{x}}^2 u_\alpha + \varkappa_2 a_{\mathfrak{x}} a_{\mathfrak{y}} u_\alpha = 0,$$
$$\varkappa_1 a_{\mathfrak{x}} a_{\mathfrak{y}} u_\alpha + \varkappa_2 a_{\mathfrak{y}}^2 u_\alpha = 0$$

zu eliminiren. Ersetzt man in der zweiten Gleichung die Symbole $a\alpha$ durch die gleichwerthigen Symbole $b\beta$, so erhält man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{\mathfrak{x}}^2 u_\alpha & a_{\mathfrak{x}} a_{\mathfrak{y}} u_\alpha \\ b_{\mathfrak{x}} b_{\mathfrak{y}} u_\beta & b_{\mathfrak{y}}^2 u_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\mathfrak{x}} & a_{\mathfrak{y}} \\ b_{\mathfrak{x}} & b_{\mathfrak{y}} \end{vmatrix} a_{\mathfrak{x}} b_{\mathfrak{y}} u_\alpha u_\beta = (a b v w) a_{\mathfrak{x}} b_{\mathfrak{y}} u_\alpha u_\beta = 0,$$

wenn v und w zwei durch $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ gehende Ebenen sind. Vertauscht man endlich $a\alpha$ mit $b\beta$ und nimmt die halbe Summe der Ausdrücke, so ergiebt sich die Gleichung

$$(6) \qquad (a b v w)^2 u_\alpha u_\beta = 0,$$

d. i. eine Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten. Eine solche stellt im Allgemeinen eine Fläche zweiter Classe dar, die aber in besonderen Fällen in eine Grenzfläche*) ausarten kann, also in eine Fläche zweiter Ordnung, die ihrer ganzen Ausdehnung nach in eine Ebene fällt und in dieser Ebene von einem Kegelschnitte begrenzt wird. Da nun das durch die Gleichung (6) dargestellte Gebilde eine Curve sein muss, diese Gleichung aber nur dann eine Curve darstellen kann, wenn die Fläche, die sie repräsentirt, in eine Grenzfläche ausartet, so folgt, dass die von dem Punkte ξ erzeugte Curve mit dem Kegelschnitte K identisch sein muss, welcher die Grenzfläche begrenzt. Man hat daher den Satz:

Durchläuft ein Punkt x eine Gerade vw, so beschreibt sein zugehöriger Punkt ξ einen Kegelschnitt K.

Wir wollen diesen Kegelschnitt *den zu der Geraden vw gehörigen Kegelschnitt* nennen.

Da die Punkte von vw offenbar eindeutig auf die Punkte von K bezogen sind, so folgt noch, dass beide Gebilde projectivisch sind.

Es seien ferner $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ drei nicht in gerader Linie liegende Punkte einer Ebene v. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes x von v sind dann, wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ veränderliche Parameter bedeuten:

$$\varkappa_1 \mathfrak{x}_i + \varkappa_2 \mathfrak{y}_i + \varkappa_3 \mathfrak{z}_i,$$

und der zu x gehörige Punkt ξ hat die Gleichung:

$$(7) \qquad (\varkappa_1 a_{\mathfrak{x}} + \varkappa_2 a_{\mathfrak{y}} + \varkappa_3 a_{\mathfrak{z}})^2 u_\alpha = 0.$$

Die Punkte ξ, welche zu den Punkten x von v gehören, erfüllen eine

*) Vergl. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1876, S. 173 f.

gewisse Fläche, deren Gleichung in Ebenencoordinaten in ähnlicher Weise gefunden wird, wie die Gleichung (6). Sie ist:

$$\begin{vmatrix} a_\mathfrak{x}^2 u_\alpha & a_\mathfrak{x} a_\mathfrak{y} u_\alpha & a_\mathfrak{x} a_\mathfrak{z} u_\alpha \\ b_\mathfrak{x} b_\mathfrak{y} u_\beta & b_\mathfrak{y}^2 u_\beta & b_\mathfrak{y} b_\mathfrak{z} u_\beta \\ c_\mathfrak{x} c_\mathfrak{z} u_\gamma & c_\mathfrak{y} c_\mathfrak{z} u_\gamma & c_\mathfrak{z}^2 u_\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\mathfrak{x} & a_\mathfrak{y} & a_\mathfrak{z} \\ b_\mathfrak{x} & b_\mathfrak{y} & b_\mathfrak{z} \\ c_\mathfrak{x} & c_\mathfrak{y} & c_\mathfrak{z} \end{vmatrix} a_\mathfrak{x} b_\mathfrak{y} c_\mathfrak{z} u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

oder wenn man die Symbole $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ auf alle Arten vertauscht, $\frac{1}{6}$ der Summe nimmt, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})_i = v_i$ setzt und berücksichtigt, dass $\Sigma \pm a_\mathfrak{x} b_\mathfrak{y} c_\mathfrak{z} = (abcv)$ ist:

(8) $$(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0;$$

daher der Satz:

Alle Punkte $\mathfrak{x}$, welche zu den Punkten x einer Ebene v gehören, bilden eine Fläche dritter Classe.

Dieselbe soll mit Φ bezeichnet und *die zur Ebene v gehörige Fläche* genannt werden. Ihre Punkte entsprechen eindeutig den Punkten der Ebene v.

Wir werden im Folgenden noch einmal auf die Gleichungen (6) und (8) geführt werden und dann die durch sie dargestellten Gebilde genauer untersuchen. Bevor wir weiter gehen, bemerken wir aber noch, dass, wenn x, x', x'' drei benachbarte, nicht in einer Geraden liegende Punkte von v sind, die durch ihre zugehörigen Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ gehende Ebene Tangentialebene der Fläche Φ im Punkte $\mathfrak{x}$ ist.

§ 2.

Betrachtung der Flächen, welche den Ebenen u entsprechen.

Alle Punkte, welche sich mit einer Ebene u zu Elementen des Connexes vereinigen, bilden, wie sich sofort aus der Gleichung

(1) $$f = \Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ik,l} x_i x_k u_l = \Sigma\Sigma f_{ik} x_i x_k = a_x^2 u_\alpha = 0$$

ergiebt, eine Fläche zweiter Ordnung F_2, die Connexfläche von u.

Die den Ebenen des Raumes entsprechenden Connexflächen sind also Flächen zweiter Ordnung. Man wird daher Eigenschaften des Connexes erhalten, wenn man von den bekannten Eigenschaften dieser Flächen ausgeht, was im Folgenden geschehen soll. Der Anfang soll mit der Aufstellung der Gleichung der Fläche F_2 in Liniencoordinaten gemacht werden.

Die Bedingung dafür, dass die Durchschnittslinie der Ebenen

$$v_x = 0, \quad w_x = 0$$

die Fläche berührt, oder die *Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten*, ist bekanntlich, wenn vw und yz dieselbe Gerade bedeuten:

$$0 = 2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & v_1 & w_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v_2 & w_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & v_3 & w_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & v_4 & w_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (abvw)^2 u_\alpha u_\beta .$$

Die Coordinaten einer Geraden vw, welche die Connexfläche der Ebene u berührt, befriedigen also die Gleichung:

$$(2) \qquad (abvw)^2 u_\alpha u_\beta = 0 .$$

Nimmt man die Gerade vw als fest, die Ebene u aber als veränderlich an, so folgt aus (2) der Satz:

Alle Ebenen u, deren Connexflächen eine gegebene Gerade berühren, umhüllen eine Fläche zweiter Classe.

Die Gleichung (2) ist identisch mit der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen. Die durch sie dargestellte Fläche ist daher eine Grenzfläche zweiter Ordnung, deren Tangentialebenen zugleich Tangentialebenen des Kegelschnitts K sind, von welchem sie begrenzt wird. *Mithin berühren die Connexflächen derjenigen Ebenen, welche durch dieselbe Tangente von K gehen, also ein Büschel bilden, die Gerade vw in demselben Punkte x, und der Berührungspunkt ξ der Tangente ist der zu x gehörige Punkt des Connexes.*

Um ferner die Enveloppe der Ebenen u zu bestimmen, deren Connexflächen eine gegebene Ebene v berühren, stelle man die *Gleichung der Fläche F_2 in Ebenencoordinaten* oder die Bedingung dafür auf, dass die Ebene $v_x = 0$ die Fläche berührt. Sie ist, wenn x, y und z drei beliebige Punkte von v sind:

$$0 = -6 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & v_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = (abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma .$$

Man hat daher den Satz:

Jede Ebene v, deren Coordinaten die Gleichung

$$(3) \qquad (abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$$

befriedigen, berührt die Connexfläche der Ebene u.

Betrachtet man in der Gleichung (3) die v_i als constant, die u_i aber als veränderlich, so folgt weiter:

Alle Ebenen u, deren Connexflächen eine gegebene Ebene v berühren, umhüllen eine Fläche dritter Classe.

Dieselbe ist identisch mit der zur Ebene v gehörigen Fläche Φ, wie sich durch Vergleichung von (3) mit (8) des vorigen Paragraphen ergiebt. Man ist daher auch berechtigt folgenden Satz auszusprechen:

Wird eine Ebene v von der Connexfläche einer anderen Ebene u in einem Punkte x berührt, so fällt der zu x gehörige Punkt mit dem Berührungspunkte von u und der zu v gehörigen Fläche Φ zusammen.

Wir kommen auf die Flächen Φ zurück, nachdem wir noch die Frage nach den Ebenen, deren Connexflächen in Kegel ausarten, sowie die nach den Spitzen dieser Kegel beantwortet haben.

Soll die Connexfläche F_2 der Ebene u ein Kegel sein, so muss die Hesse'sche Determinante ihrer Gleichung verschwinden, also die Gleichung bestehen:

$$(4)\qquad 0 = 24 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = (abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta,$$

was sich in Worten so aussprechen lässt:

Alle Ebenen, deren Connexflächen Kegel sind, umhüllen eine Fläche vierter Classe.

Wir wollen sie die *Determinantenfläche* des Connexes nennen und mit Δ bezeichnen.

Ist der Punkt x die Spitze des Kegels, der einer Tangentialebene u der Fläche (4) entspricht, so müssen seine Coordinaten den Gleichungen

$$(5)\qquad a_1 a_x u_\alpha = 0, \quad a_2 a_x u_\alpha = 0, \quad a_3 a_x u_\alpha = 0, \quad a_4 a_x u_\alpha = 0$$

gleichzeitig genügen. Eliminirt man aus denselben die u_i, so ergiebt sich, indem man die Symbole in den verschiedenen Zeilen beziehungsweise durch $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und $d\delta$ bezeichnet, die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 a_x & a_1\alpha_2 a_x & a_1\alpha_3 a_x & a_1\alpha_4 a_x \\ b_2\beta_1 b_x & b_2\beta_2 b_x & b_2\beta_3 b_x & b_2\beta_4 b_x \\ c_3\gamma_1 c_x & c_3\gamma_2 c_x & c_3\gamma_3 c_x & c_3\gamma_4 c_x \\ d_4\delta_1 d_x & d_4\delta_2 d_x & d_4\delta_3 d_x & d_4\delta_4 d_x \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4 (\alpha\beta\gamma\delta) a_x b_x c_x d_x,$$

wofür man, wenn man in derselben die Symbole auf alle Weise vertauscht, die so entstehenden Gleichungen summirt und den Factor $\frac{1}{24}$ vernachlässigt, setzen kann:

$$(6)\qquad (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) a_x b_x c_x d_x = 0.$$

Man hat also den Satz:

Die Spitzen aller Kegel, welche den Tangentialebenen der Determinantenfläche entsprechen, liegen auf einer Fläche vierter Ordnung.

Dieser Fläche geben wir den Namen *Kernfläche* des Connexes und bezeichnen sie mit K. Wir nennen ferner eine Tangentialebene von Δ und die Spitze ihres Connexkegels einander *zugeordnet*, so dass also jeder Tangentialebene von Δ ein Punkt von K, und umgekehrt jedem Punkte von K eine Tangentialebene von Δ zugeordnet ist. Diese Zuordnung wird offenbar durch die Gleichungen (5) vermittelt.

§ 3.

Die Flächen Φ, Δ und K.

Die im ersten Paragraphen angestellten Erörterungen führten zu dem Resultate, dass im Allgemeinen zu jedem Punkte ein Punkt, zu jeder Geraden ein Kegelschnitt und zu jeder Ebene eine Fläche dritter Classe gehört und dass zwischen den Coordinaten eines Punktes x und seines zugehörigen Punktes ξ folgende Gleichungen bestehen:

$$(1)\quad \begin{aligned} \varrho\xi_1 &= X^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik,1}x_ix_k,\\ \varrho\xi_2 &= X^{(2)} = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik,2}x_ix_k,\\ \varrho\xi_3 &= X^{(3)} = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik,3}x_ix_k,\\ \varrho\xi_4 &= X^{(4)} = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik,4}x_ix_k. \end{aligned}$$

Fügt man noch die Gleichung $v_x = 0$ hinzu und beachtet, dass die den Ebenen des Raumes entsprechenden Connexflächen von der Ebene v in einem dreifach unendlichen System von Curven zweiter Ordnung geschnitten werden, welches durch die simultanen Gleichungen

$$(2)\quad X^{(1)}u_1 + X^{(2)}u_2 + X^{(3)}u_3 + X^{(4)}u_4 = 0 \text{ und } v_x = 0$$

gegeben ist, so sieht man ohne Weiteres, dass die Eigenschaften der zu v gehörigen Fläche Φ aus den Eigenschaften des genannten Systems abgeleitet werden können. Jede beliebige Ebene v kann nun aber zu einer Ebene des Coordinatentetraeders, z. B. zu der durch die Gleichung $x_4 = 0$ repräsentirten gemacht werden. Dann nehmen die Gleichungen (1) und (2) die einfachere Gestalt

$$(3)\quad \begin{aligned} \sigma\xi_1 &= f_1 = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik,1}x_ix_k,\\ \sigma\xi_2 &= f_2 = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik,2}x_ix_k, \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \sigma\xi_3 &= f_3 = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik,3}x_i x_k, \\ \sigma\xi_4 &= f_4 = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik,4}x_i x_k, \end{aligned}$$

und

$$(4)\quad u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 + u_4 f_4 = 0$$

an. Die Gleichungen (3) sind identisch mit den von Clebsch in seiner Abhandlung „Ueber die Steiner'sche Fläche"*) aufgestellten Gleichungen (4). Letztere stellen die Beziehungen dar, welche zwischen den Coordinaten eines Punktes der Steiner'schen Fläche und denen eines Punktes einer Ebene bestehen. Wir sehen somit, dass die zu den Ebenen des Raumes gehörigen Flächen dritter Classe *Steiner'sche Flächen* sind. Die Eigenschaften derselben hat Clebsch unter Zugrundelegung der Gleichungen (3) in Verbindung mit der Gleichung (4) entwickelt. Geometrisch sind die Steiner'schen Flächen von Reye**) untersucht worden, welcher von einem Flächengebüsch zweiter Ordnung ausgeht und jeder Fläche des Gebüsches eine Ebene zuordnet. Da offenbar die Gesammtheit der Flächen des Gebüsches und ihrer zugeordneten Ebenen mit den Ebenen des Raumes und ihren Connexflächen identisch ist, so bietet weder die analytische noch die geometrische Untersuchung neue Ausgangspunkte dar. Deshalb sehen wir von einer Erörterung der Flächen Φ ab und wenden uns sofort zu den Flächen Δ und K. —

Wir haben oben gesehen, dass diejenigen Ebenen, deren Connexflächen Doppelpunkte besitzen, also in Kegel ausarten, eine Fläche

$$\Delta = (abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta = 0$$

vierter Classe umhüllen und dass die Doppelpunkte aller dieser Flächen auf einer zweiten Fläche

$$K = (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)\, a_x b_x c_x d_x = 0$$

liegen, welche von der vierten Ordnung ist. Wir gelangten zu diesem Resultate, indem wir von der Gleichung der Connexfläche einer Ebene in Punktcoordinaten ausgingen und die bekannten Bedingungen aufstellten, unter welchen die Fläche einen Doppelpunkt besitzt. Dann stellt aber ihre Gleichung in Ebenencoordinaten nur noch das Quadrat der Gleichung $v_x = 0$ des Doppelpunktes dar. Mithin ist der Werth des Ausdrucks

$$\frac{(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma}{v_x^2}\ ^{***)}$$

*) Crelle's Journal, Band 67, S. 1 f.

**) Reye, Die Geometrie der Lage, Hannover 1866, zweite Abtheilung, S. 246 f.

***) Vergl. Gordan, Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Mathematische Annalen, V. Band, S. 341 f.

unabhängig von den veränderlichen Grössen v_i, und es muss, wenn v und w ganz beliebige Ebenen bedeuten, die Gleichung

$$\frac{(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma}{v_x^2} = \frac{(abcw)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma}{w_x^2}$$

oder

$$(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \cdot w_x^2 = (abcw)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \cdot v_x^2$$

bestehen. Liegt nun x auf v, aber nicht zugleich auf w, so wird $v_x = 0$; demnach muss die linke Seite verschwinden, und da w_x von Null verschieden ist, so muss

$$(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$$

sein. Man hat daher den Satz:

Geht eine Ebene v durch einen Punkt x der Kernfläche des Connexes, so berührt ihre Steiner'sche Fläche die dem Punkte zugeordnete Ebene.

Um den Punkt zu bestimmen, in welchem die zuletzt genannte Ebene die Determinantenfläche berührt, nehmen wir an, $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4$ seien die Coordinaten einer veränderlichen Ebene. Differentiiren wir dann die Gleichung

$$(abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta = 0$$

nach den u_i, addiren die mit den $\mathfrak{u}_i$ multiplicirten Differentialquotienten und setzen die erhaltene Summe gleich Null, so ist

$$(abcd)^2 \left\{u_\alpha u_\beta u_\gamma \mathfrak{u}_\delta + u_\alpha u_\beta u_\delta \mathfrak{u}_\gamma + u_\alpha u_\gamma u_\delta \mathfrak{u}_\beta + u_\beta u_\gamma u_\delta \mathfrak{u}_\alpha\right\} = 0$$

die Gleichung des Berührungspunktes von Δ und u. Sie kann, da die einzelnen Glieder des Klammerausdrucks denselben Werth besitzen, durch die einfachere Gleichung

$$(abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \mathfrak{u}_\delta = 0$$

ersetzt werden. Multipliciren wir ferner die linke Seite derselben mit v_x^2, so erhalten wir, mit Benutzung einer bekannten Identität:

$$(abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \mathfrak{u}_\delta \cdot v_x^2$$
$$= \left\{(abcv)d_x - (abdv)c_x + (acdv)b_x - (bcdv)a_x\right\}^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \mathfrak{u}_\delta.$$

Die Glieder auf der rechten Seite sind, mit Ausnahme des ersten, von der Form:

$$(abdv)^2 u_\alpha u_\beta \mathfrak{u}_\delta \cdot c_x^2 u_\gamma$$

oder

$$(abcv)\,(abdv)\,c_x d_x u_\alpha u_\beta u_\gamma \mathfrak{u}_\delta = (abdv)\,d_x u_\alpha u_\beta \mathfrak{u}_\delta \cdot \Sigma\,(abv)_i c_i c_x u_\gamma.$$

Da nun x ein Punkt der Kernfläche sein soll, so ist nicht nur

$$a_x^2 u_\alpha = b_x^2 u_\beta = \cdots = 0,$$

sondern auch

$$a_i a_x u_\alpha = b_i b_x u_\beta = \cdots = 0.$$

Es wird daher

$$(abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta \cdot v_x^2 = (abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \cdot d_x^2 u_\delta,$$

und da $d_x^2 u_\delta = 0$ die Gleichung des zu x gehörigen Punktes ist, so können wir den Satz aussprechen:

Der zu einem Punkte x der Kernfläche gehörige Punkt fällt mit dem Punkte zusammen, in welchem die Determinantenfläche von der zugeordneten Ebene von x berührt wird.

Alle Steiner'schen Flächen, welche zu Ebenen gehören, die durch einen Punkt der Kernfläche gehen, besitzen also erstens eine gemeinsame Tangentialebene, zweitens einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt, den zugehörigen Punkt jenes Punktes; mit anderen Worten:

Die einem Punkte x der Kernfläche zugeordnete Ebene berührt nicht nur die Determinantenfläche, sondern auch die Steiner'schen Flächen aller durch x gehenden Ebenen in dem zu x gehörigen Punkte.

Die erhaltenen Resultate setzen uns nun in den Stand, auf einfache Weise die naheliegende Frage zu beantworten, ob es solche Ebenen giebt, deren Connexflächen mehr als einen Doppelpunkt besitzen. Zu dem Ende bemerken wir zunächst, dass jede Fläche zweiter Ordnung, welche mehr als einen Doppelpunkt besitzt, in *ein Ebenenpaar* zerfällt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für dieses Zerfallen ist aber das simultane Verschwinden der Determinante und der ersten Unterdeterminanten der Fläche. Soll demnach die durch

$$f = a_x^2 u_\alpha = \Sigma\Sigma f_{ik} x_i x_k = 0$$

dargestellte Connexfläche der Ebene u ein Ebenenpaar sein, so müssen die Gleichungen

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\Delta_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial f_{ik}} = 0$$

gleichzeitig bestehen*). Die Coordinaten einer jeden solchen Ebene befriedigen daher auch die vier Gleichungen:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u_l} = \Sigma\Sigma\Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial f_{ik}} \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_l} = 0.$$

Diese Gleichungen sind aber die Bedingung dafür, dass die erwähnten

*) Vergl., ausser der zuletzt citirten Abhandlung, Clebsch, Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung, Crelle's Journal, 59. Band, S. 193 f.

Ebenen Doppeltangentialebenen der Fläche Δ sind. Man hat daher den Satz:

Jede Ebene, deren Connexfläche in ein Ebenenpaar ausartet, ist eine Doppeltangentialebene der Determinantenfläche des Connexes.

Die Grössen Δ_{ik} sind die Coefficienten der Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & v_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

sie verschwinden für jede Doppeltangentialebene der Determinantenfläche, also verschwindet auch die soeben geschriebene Gleichung für jede solche Ebene unabhängig von den Werthen der v_i. Da dieselbe für constante v_i die zu v gehörige Steiner'sche Fläche darstellt, so kann man den Satz aussprechen:

Alle zu den Ebenen des Raumes gehörigen Steiner'schen Flächen haben die Doppeltangentialebenen der Determinantenfläche zu gemeinsamen Tangentialebenen.

Wir brauchen demnach, um die Anzahl dieser Doppeltangentialebenen zu bestimmen, nur die gemeinschaftlichen Tangentialebenen von drei Steiner'schen Flächen, welche zu irgend drei Ebenen gehören, näher zu untersuchen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an:

$$\lambda_1 \mathfrak{v}_x + \lambda_2 \mathfrak{w}_x = 0 \tag{1}$$

sei die Gleichung einer Ebene v, welche durch die Durchschnittslinie der beliebigen Ebenen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ hindurchgeht, und y und z seien zwei Punkte auf dieser Linie. Für veränderliche $\lambda_1 : \lambda_2$ bilden die durch (1) dargestellten Ebenen ein Büschel, während durch die zugehörigen Steiner'schen Flächen die Flächenschaar

$$\begin{aligned} &\{\lambda_1 (abc\mathfrak{v}) + \lambda_2 (abc\mathfrak{w})\}^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma \\ &= \lambda_1^2 (abc\mathfrak{v})^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma + 2\lambda_1 \lambda_2 (abc\mathfrak{v})(abc\mathfrak{w}) u_\alpha u_\beta u_\gamma \\ &\qquad + \lambda_2^2 (abc\mathfrak{w})^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

constituirt wird. Die gesuchten Doppeltangentialebenen der Determinantenfläche befinden sich nun unter den gemeinsamen Tangentialebenen der durch die Gleichung (2) dargestellten Flächen. Diese Ebenen sind aber identisch mit den gemeinsamen Tangentialebenen der drei Flächen

$$\begin{aligned} (abc\mathfrak{v})^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma &= 0, \\ (abc\mathfrak{v})(abc\mathfrak{w}) u_\alpha u_\beta u_\gamma &= 0, \\ (abc\mathfrak{w})^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma &= 0, \end{aligned}$$

und da dieselben Flächen dritter Classe sind, so haben sie 27 Tangentialebenen gemein, welche in drei Gruppen zerfallen, je nachdem ihre Connexflächen keinen, einen oder mehr als einen Doppelpunkt besitzen. Man erhält daher die gesuchten Ebenen, wenn man von den gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen (3) die den beiden ersten Gruppen angehörigen subtrahirt.

Es sei nun u eine der 27 Ebenen, deren Connexfläche keinen Doppelpunkt besitzt. Da jede Ebene v von den Connexflächen der Tangentialebenen der zu ihr gehörigen Steiner'schen Fläche berührt wird, so muss die Connexfläche von u, da diese Ebene Tangentialebene jeder Fläche der Schaar (2) ist, jede Ebene des Büschels (1) berühren. Dies ist aber nur möglich, wenn die Axe des Büschels auf der zuletzt genannten Connexfläche liegt. Eine gegebene Gerade kann aber nur auf einer einzigen Connexfläche liegen, also giebt es unter den 27 Ebenen nur eine, deren Connexfläche keinen Doppelpunkt hat.

Man erhält dasselbe Resultat, wenn man beachtet, dass die Gleichung der Connexfläche von u für jeden Punkt der Geraden yz bestehen, dass also gleichzeitig

$$a_y^2 u_\alpha = 0, \quad a_y a_z u_\alpha = 0, \quad a_z^2 u_\alpha = 0$$

sein muss; denn diese Gleichungen sind für die u_i linear, bestimmen also nur eine Ebene.

Gehört die Ebene u der zweiten Gruppe an, so ist ihre Connexfläche ein Kegel. Da u jede Fläche der Schaar (2) berührt, so muss die Spitze des Kegels auf jeder Ebene des Büschels (1), also auf der Axe desselben liegen. Letztere hat als willkürlich gewählte Gerade 4 Punkte mit der Kernfläche gemein, und jede einem solchen Punkte zugeordnete Ebene berührt die drei Flächen (3) in demselben Punkte, mithin ist sie unter den gemeinsamen Tangentialebenen derselben vierfach zu zählen.

Da sich nun unter den 27 gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen (3) eine befindet, deren Connexfläche keinen Doppelpunkt besitzt, ferner vier vierfach zu zählende, deren Connexflächen einen Doppelpunkt haben, also Kegel sind, so bleiben noch $27 - 1 - 4 \cdot 4 = 10$ Ebenen, deren Connexflächen mehr als einen Doppelpunkt besitzen, also in Ebenenpaare zerfallen. Wir können daher den Satz aussprechen:

Die Determinantenfläche des Connexes (2, 1) *hat* 10 *Doppeltangentialebenen.*

Beachtet man, dass die Doppelpunkte der Connexflächen auf der Kernfläche liegen, dass ferner die Punkte der Durchschnittslinien der

eben erwähnten Ebenenpaare als Doppelpunkte zu betrachten sind, so ergiebt sich noch der Satz:

Auf der Kernfläche des Connexes (2, 1) *liegen wenigstens* 10 *gerade Linien.*

§ 4.

Betrachtung eines eigenthümlichen covarianten Gebildes. Der conjugirte Connex.

Die gleichzeitige Betrachtung der Punkte einer Reihe und der Ebenen eines Büschels einerseits, sowie die der Punkte eines Feldes und der Ebenen eines Bündels andererseits führt auf neue Eigenschaften des Connexes, von welchen wir jedoch nur zwei hervorheben wollen.

Ist nämlich $\varkappa_1 \mathfrak{y} + \varkappa_2 \mathfrak{z}$ oder x irgend ein Punkt der Reihe, deren Träger die Gerade $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ist und $\lambda_1 \mathfrak{v} + \lambda_2 \mathfrak{w}$ oder u irgend eine Ebene des Büschels, welches die Gerade $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ zur Axe hat, so ist x, u ein Element, welches dem gegebenen Connexe, er sei von der m^{ten} Ordnung und n^{ten} Classe, im Allgemeinen nicht angehört. Soll jedoch x, u Element dieses Connexes sein, so wird jedem Punkte der Reihe eine Gruppe Γ_n von n Ebenen des Büschels, jeder Ebene des Büschels eine Gruppe G_m von m Punkten der Reihe zugeordnet. Die n Ebenen sind die durch $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ gehenden Tangentialebenen an die dem Punkte x entsprechende Fläche U_n, die m Punkte die Durchschnittspunkte der Geraden $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ und der Connexfläche F_m der Ebene u. Wenn nun die dem Punkte x entsprechende Fläche U_n von der Geraden $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ berührt wird, so fallen von den n Tangentialebenen, welche sich durch diese Gerade an die Fläche legen lassen, zwei zusammen. Ebenso vereinigen sich, wenn $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ die der Ebene u entsprechende Fläche F_m berührt, zwei von den m auf $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ liegenden Schnittpunkten im Berührungspunkte.

Um die Gleichung aufzustellen, welcher die Coordinaten zweier solcher zusammengehörigen Geraden genügen müssen, hat man nur die Bedingung dafür anzugeben, dass die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi = (\varkappa_1 a_{\mathfrak{y}} + \varkappa_2 a_{\mathfrak{z}})^m (\lambda_1 \mathfrak{v}_\alpha + \lambda_2 \mathfrak{w}_\alpha)^n = 0$$

eine Doppelwurzel $\varkappa_1 : \varkappa_2$ und gleichzeitig eine Doppelwurzel $\lambda_1 : \lambda_2$ habe. Diese Bedingung erhält man, wenn man die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2$ und λ_1, λ_2 aus den vier Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0$$

eliminirt; wegen der doppelten Homogeneität von φ vertreten diese Gleichungen nur die Stelle von dreien, sie können daher nur auf eine Resultirende R führen.

In unserem Falle, in welchem m gleich 2 und n gleich 1 ist,

kann man nicht mehr von einer Doppelwurzel $\lambda_1 : \lambda_2$ sprechen. Gleichwohl verliert das eben angegebene Verfahren seine Giltigkeit nicht.

Setzt man nämlich symbolisch

$$a_\mathfrak{y} = A_1, \quad a_\mathfrak{z} = A_2, \quad \mathfrak{v}_\alpha = \mathsf{A}_1, \quad \mathfrak{w}_\alpha = \mathsf{A}_2,$$

so nimmt die Gleichung (1) die Form

$$(3) \qquad \varphi = (A_1 x_1 + A_2 x_2)^2 (\mathsf{A}_1 \lambda_1 + \mathsf{A}_2 \lambda_2) = A_x{}^2 \mathsf{A}_\lambda = \Phi_1 \lambda_1 + \Phi_2 \lambda_2 = 0$$

an, und an Stelle von (2) treten die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \lambda_2 = 0. \\ \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0. \end{gathered}$$

Die Elimination von λ_1, λ_2 aus den beiden ersten führt auf das Verschwinden der Jacobi'schen Determinante von Φ_1 und Φ_2, was bekanntlich eine Folge der beiden letzten ist. *Demnach ist die oben erwähnte Function R im vorliegenden Falle identisch mit der Resultante von Φ_1 und Φ_2 oder $A_x{}^2 \mathsf{A}_1$ und $A_x{}^2 \mathsf{A}_2$.* Um dieselbe zu bilden, erinnern wir daran, dass

$$(ab)^2 (a'b')^2 - (aa')^2 (bb')^2$$

die symbolische Form der Resultante der beiden Formen $a_x{}^2$ und $a'_x{}^2$ ist.*) Benutzt man also die Symbole $AB\mathsf{AB}$ und $CD\Gamma\Delta$, so erhält man:

$$\begin{aligned} &(AB)^2 (CD)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_1 \Gamma_2 \Delta_2 - (AB)^2 (CD)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 \Gamma_1 \Delta_2 \\ &= (AB)^2 (CD)^2 \mathsf{A}_1 \Delta_2 (\mathsf{B}\Gamma) = \tfrac{1}{2} (AB)^2 (CD)^2 (\mathsf{A}\Delta)(\mathsf{B}\Gamma). \end{aligned}$$

Sind nun $(vw)_{ik}$ die Axencoordinaten von $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ und $(yz)_{ik}$ die Strahlencoordinaten von $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$, so ist

$$\begin{aligned} (AB) &= \Sigma \pm a_\mathfrak{y} b_\mathfrak{z} = (abvw), \quad & (CD) &= \Sigma \pm c_\mathfrak{y} d_\mathfrak{z} = (cdvw), \\ (\mathsf{A}\Delta) &= \Sigma \pm \mathfrak{v}_\alpha \mathfrak{w}_\delta = (\alpha\delta yz), \quad & (\mathsf{B}\Gamma) &= \Sigma \pm \mathfrak{v}_\beta \mathfrak{w}_\gamma = (\beta\gamma yz). \end{aligned}$$

Demnach befriedigen die Coordinaten der Geraden $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ die Gleichung

$$(5) \qquad (abvw)^2 (cdvw)^2 (\alpha\delta yz)(\beta\gamma yz) = 0.$$

Bei der Aufstellung derselben sind wir von den Gleichungen (2) ausgegangen, welche die Bedingung ausdrücken, dass die Gleichung (1) ein Paar zusammengehörige Doppelwurzeln besitzt. Da nun die Gleichung (3) in λ_1, λ_2 linear ist, von einer Doppelwurzel $\lambda_1 : \lambda_2$ also nicht die Rede sein kann, so entsteht die Frage nach der Bedeutung der Gleichung (5).

Um dieselbe zu beantworten, bemerken wir, dass die beiden letzten

---

*) Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, S. 88.

Gleichungen (4) die Bedingung angeben, unter welcher jeder beliebige Werth von $\lambda_1 : \lambda_2$ der Gleichung (3) genügt. Wird also die Gleichung (5) von den Coordinaten zweier Geraden $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ oder vw und $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ oder yz befriedigt, so muss irgend ein auf vw liegender Punkt x mit jeder durch yz gehenden Ebene u ein Element des gegebenen Connexes bilden. Dies wird offenbar nur dann geschehen können, wenn das Ebenenbüschel, welches yz zur Axe hat, in dem zum Punkte x gehörigen Ebenenbündel enthalten ist, wenn also die Gerade yz durch den zu x gehörigen Punkt $\mathfrak{x}$ geht. Da nun zu den Punkten einer Geraden die Punkte eines Kegelschnitts gehören und die Gleichung (5) für constante $(vw)_{ik}$ einen Liniencomplex zweiten Grades darstellt, so hat man, wenn man noch zwei Gerade, die wie vw und yz zusammengehören, als *conjugirt* bezeichnet, den Satz:

Beschreibt ein Punkt x eine Gerade vw, so durchläuft die conjugirte Gerade yz der letzteren einen speciellen Complex zweiten Grades, dessen sämmtliche Strahlen durch die Punkte eines Kegelschnitts gehen.

Beachtet man ferner, dass jede durch yz gehende Ebene u mit allen Punkten ihrer Connexfläche zu Elementen des Connexes zusammentritt und dass die Flächen, welche den durch die Gerade yz gehenden Ebenen entsprechen, ein Büschel zweiter Ordnung bilden, so lässt sich die Bedingung, dass irgend ein auf vw liegendes x mit allen durch yz gehenden Ebenen Elemente des Connexes bilde, ersetzen durch die andere, dass alle diesen Ebenen entsprechenden Flächen durch den Punkt x gehen. Nun giebt es aber unzählig viele Punkte, welche dieser Bedingung genügen, nämlich die Punkte der Basiscurve des Büschels, und da x gleichzeitig auf der Geraden vw liegt, so ergiebt sich, wenn man in (5) die $(yz)_{ik}$ constant, die $(vw)_{ik}$ aber veränderlich nimmt, der Satz:

Dreht sich eine Ebene um eine Gerade yz, so beschreibt die conjugirte Gerade vw einen speciellen Complex vierten Grades, dessen sämmtliche Axen eine Curve vierter Ordnung schneiden. —

Sei ferner ein beliebiger Punkt y der Durchschnittspunkt dreier Ebenen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und eine beliebige Ebene v die Verbindungsebene dreier nicht in gerader Linie liegenden Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Der Punkt y und die Ebene v bilden dann zusammen ein Element, welches dem Connexe, er sei wiederum von der m^{ten} Ordnung und der n^{ten} Classe, im Allgemeinen nicht angehört. y ist Mittelpunkt eines Bündels von Ebenen u, v Träger eines Feldes von Punkten x. Verlangt man, dass x, u ein Element des gegebenen Connexes sein soll, so werden jedem x einfach unendlich viele Ebenen zugeordnet, welche einen Kegel der n^{ten} Classe K_n mit der Spitze y umhüllen und jedem u einfach unendlich viele Punkte, welche eine auf v liegende Curve m^{ter} Ordnung C_m

bilden, und zwar ist der Kegel Tangentialkegel von y an die dem Punkte x entsprechende Fläche U_n, die Curve Durchschnittslinie von v und der Connexfläche F_m der Ebene u.

Bezeichnet man demnach einen Punkt x des Feldes mit

$$\varkappa_1 \mathfrak{x} + \varkappa_2 \mathfrak{y} + \varkappa_3 \mathfrak{z}$$

und eine Ebene u des Bündels mit

$$\lambda_1 \mathfrak{u} + \lambda_2 \mathfrak{v} + \lambda_3 \mathfrak{w},$$

so müssen die Coordinaten der Punkte der Curve und die der Tangentialebenen des Kegels die Gleichung

$$\varphi = (\varkappa_1 a_{\mathfrak{x}} + \varkappa_2 a_{\mathfrak{y}} + \varkappa_3 a_{\mathfrak{z}})^m (\lambda_1 \mathfrak{u}_\alpha + \lambda_2 \mathfrak{v}_\alpha + \lambda_3 \mathfrak{w}_\alpha)^n = 0$$

befriedigen. Setzt man symbolisch

$$a_{\mathfrak{x}} = A_1, \quad a_{\mathfrak{y}} = A_2, \quad a_{\mathfrak{z}} = A_3,$$
$$\mathfrak{u}_\alpha = \mathsf{A}_1, \quad \mathfrak{v}_\alpha = \mathsf{A}_2, \quad \mathfrak{w}_\alpha = \mathsf{A}_3,$$

so geht dieselbe über in

$$(6) \quad \varphi = (A_1 \varkappa_1 + A_2 \varkappa_2 + A_3 \varkappa_3)^m (\mathsf{A}_1 \lambda_1 + \mathsf{A}_2 \lambda_2 + \mathsf{A}_3 \lambda_3)^n = A_\varkappa^m \mathsf{A}_\lambda^n = 0.$$

Stellt man nun die Forderung, dass die der Ebene u entsprechende Curve C_m einen Doppelpunkt und der dem Punkte x entsprechende Kegel K_n eine Doppeltangentialebene besitze, so darf y, v nicht mehr willkürlich gewählt werden, sondern muss einem Connexe angehören, welcher der *conjugirte Connex* des ursprünglichen Connexes genannt werden soll.

Die genannte Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_3} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_3} = 0 \end{array}$$

gleichzeitig bestehen. *Eliminirt man aus denselben die Grössen* $\varkappa_i$ *und* λ_i $(i = 1, 2, 3)$, *so kommen in dem Resultate nur Factoren von den Formen* (ABC) *und* $(\mathsf{AB\Gamma})$ *vor. Ersetzt man endlich jeden Factor* $(ABC) = \Sigma \pm a_{\mathfrak{x}} b_{\mathfrak{y}} c_{\mathfrak{z}}$ *durch* $(abcv)$ *und jeden Factor* $(\mathsf{AB\Gamma}) = \Sigma \pm \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{v}_\beta \mathfrak{w}_\gamma$ *durch* $(\alpha\beta\gamma y)$, *so erhält man die Gleichung des conjugirten Connexes.*

Man kann dieselbe auch noch auf andere Weise ermitteln. Jede Tangentialebene einer Fläche F_m schneidet dieselbe bekanntlich in einer Curve mit Doppelpunkt und der Berührungspunkt der ersteren ist der Doppelpunkt der letzteren; ferner besitzt jeder einer Fläche U_n umschriebene Kegel, dessen Scheitel auf U_n liegt, eine Doppeltangentialebene, welche zugleich die Fläche U_n im Scheitel des Kegels berührt. Ist nun x, u ein Element des gegebenen Connexes, so ist x ein Punkt der Connexfläche F_m von u, u eine Tangentialebene der Connexfläche U_n von x. Ist ferner v Tangentialebene in x an

F_m, y Berührungspunkt von u und U_n, so ist offenbar y, v ein Element des conjugirten Connexes.

In dieser Weise gehört zu jedem Elemente x, u des gegebenen Connexes ein Element y, v des conjugirten und *die Gleichung des letzteren erhält man auch, wenn man aus den Gleichungen*

$$\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0$$

die x_i und die u_i eliminirt, wobei unter $f = 0$ die Gleichung des gegebenen Connexes zu verstehen ist. —

Für den Connex (2, 1), zu welchem wir jetzt übergehen, tritt an die Stelle der Gleichung (6) die Gleichung

$$\varphi = A_x^2 \mathsf{A}_\lambda = \Phi_1 \lambda_1 + \Phi_2 \lambda_2 + \Phi_3 \lambda_3 = 0, \tag{8}$$

wo also $\Phi_1 = A_x^2 \mathsf{A}_1$, $\Phi_2 = A_x^2 \mathsf{A}_2$, $\Phi_3 = A_x^2 \mathsf{A}_3$ gesetzt worden ist, und die Gleichungen (7) nehmen folgende Gestalt an:

$$\tag{9} \begin{gathered} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \lambda_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \lambda_3 = 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \lambda_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} \lambda_3 = 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \lambda_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \lambda_3 = 0, \\ \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0. \end{gathered}$$

Die Elimination der Grössen λ_1, λ_2, λ_3 aus den drei ersten Gleichungen führt auf die Jacobi'sche Determinante der Functionen Φ_1, Φ_2 und Φ_3. Da deren Verschwinden eine Folge der drei letzten Gleichungen ist, so ist das Resultat der Elimination der x_i und $\lambda_i (i = 1,2,3)$ aus den sechs Gleichungen (9) identisch mit der Resultante der drei letzten derselben. *Die Aufgabe, die Gleichung des conjugirten Connexes aufzustellen, ist daher zurückgeführt auf die andere, die Resultante dreier ternären quadratischen Formen symbolisch zu bilden.* Diese Aufgabe ist von Gundelfinger im 80. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik gelöst worden. In dem dort gegebenen Ausdrucke hat man die Symbole a_i, b_i, c_i u. s. w. durch die Symbole $A_i \mathsf{A}_1$, $A_i \mathsf{A}_2$, $A_i \mathsf{A}_3$ u. s. w. zu ersetzen ($i = 1, 2, 3$), die gleichwerthigen Symbole so zu vertauschen, dass die Glieder der Summe, welche sich durch Addition der erhaltenen Ausdrücke ergiebt, einen gleichen Factor besitzen und die Summe der ungleichen Factoren eine Determinante von der Form $(\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma)$ ist. Dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis alle Producte der Form $\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 \Gamma_3$ durch Determinanten der Form $(\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma)$ ersetzt sind. In dem so erhaltenen Resultate hat man noch, wie oben bereits angegeben wurde, jeden Factor (ABC) durch $(abcv)$ und jeden Factor $(\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma)$ durch $(\alpha\beta\gamma y)$ zu ersetzen. *Man erhält dann eine Gleichung*

(10) $$F(y, v) = 0,$$

welche in den y_i vom vierten und in den v_i vom achten Grade ist. Dieselbe ist die Gleichung des conjugirten Connexes.

Von der wirklichen Ausführung der angegebenen Operationen soll hier abgesehen werden, da dieselbe einen zu grossen Raum einnehmen würde und das Resultat für das Folgende ohne Belang ist.

Wir kehren zur Gleichung (8) zurück. Da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ linear in derselben vorkommen, von einem doppelten Werthsystem $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ also keine Rede sein kann, so hat die allgemeine Definition des conjugirten Connexes im vorliegenden Falle keinen Sinn. Gleichwohl werden die drei letzten Gleichungen (9) nicht völlig bedeutungslos, sondern sie geben die Bedingung an, unter welcher jedes Werthsystem $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ die Gleichung (8) befriedigt. Genügen demnach die Coordinaten eines Elementes y, v der Gleichung (10), so muss ein gewisser auf v liegender Punkt x mit allen durch y gehenden Ebenen u Elemente des ursprünglichen Connexes bilden. Dies ist aber nur dann möglich, wenn y mit dem zu x gehörigen Punkte ξ zusammenfällt. Nimmt man daher in der Gleichung (10) die v_i constant, die y_i aber als veränderlich an, so folgt, *dass dieselbe nicht verschieden sein kann von der Gleichung der zur Ebene v gehörigen Steiner'schen Fläche in Punktcoordinaten.* Wir sind somit auch zu dem bekannten Resultate gelangt, dass die zu einer Ebene gehörige Steiner'sche Fläche Φ von der vierten Ordnung ist.

Der Punkt x muss auf der Connexfläche der Ebene u liegen, wenn x, u ein Element des gegebenen Connexes sein soll. Mithin ist die Bedingung, dass x mit allen durch y gehenden Ebenen u Elemente des Connexes bilde, identisch damit, dass alle Flächen, welche diesen Ebenen entsprechen, durch den Punkt x gehen. Nimmt man demnach in der Gleichung (10) die y_i constant, die v_i aber veränderlich, *so stellt sie das Product der Gleichungen der gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte jener Flächen in Ebenencoordinaten dar.* Die Connexflächen der durch y gehenden Ebenen bilden aber ein Netz, haben also acht Punkte gemein; daraus folgt, dass die Gleichung (10) in den v_i vom achten Grade sein muss, ein Resultat, das mit dem oben auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt.

§ 5.

Die Hauptcoincidenz.

Wir bringen endlich den gegebenen Connex mit einem anderen in Verbindung, welcher sich durch besondere Eigenthümlichkeiten vor allen übrigen Connexen auszeichnet. Derselbe wird durch die Gleichung $u_x = 0$ oder

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

gegeben und soll als *identischer Connex* bezeichnet werden. Elemente desselben bilden jeder Punkt mit jeder durch ihn gehenden Ebene, jede Ebene mit jedem auf ihr liegenden Punkte. Die einem Punkte x entsprechende Fläche U_1 ist also der Punkt selbst als Mittelpunkt eines Ebenenbündels betrachtet und die einer Ebene u entsprechende Fläche ist die Ebene selbst, betrachtet als Träger eines Punktfeldes.

Durch die Gesammtheit der Elemente, welche einem gegebenen Connexe (m, n) und dem identischen gemeinsam sind, wird eine Coincidenz gebildet, welche für das Studium des Connexes dieselbe Wichtigkeit besitzt, wie das von einer Curve auf einer Geraden, oder das von einer Fläche auf einer Ebene gebildete Punktsystem für das Studium der Curve bezüglich der Fläche. Wir nennen sie die *Hauptcoincidenz des Connexes.* Elemente derselben bilden jeder Punkt x mit allen durch ihn an die entsprechende Fläche U_n gehenden Tangentialebenen, jede Ebene u mit allen auf ihr liegenden Punkten der entsprechenden Fläche F_m. Mit andern Worten: Jedem Punkte x entspricht ein Kegel K_n der n^{ten} Classe, die Enveloppe der durch x gehenden Tangentialebenen von U_n, jeder Ebene u eine Curve C_m der m^{ten} Ordnung, die Durchschnittslinie von u und F_m.

In unserem Falle entspricht jedem Punkte x ein Kegel erster Classe K_1, d. i. ein Ebenenbüschel, dessen Axe durch die Punkte x und ξ geht, jeder Ebene u ein auf ihr liegender Kegelschnitt, die Durchschnittslinie von u und F_2.

Eine Ausnahme machen die Grundpunkte des Connexes, denn *jeder solche Punkt bildet mit allen durch ihn gehenden Ebenen Elemente der Hauptcoincidenz.*

Eine Ebene u kann dagegen nur dann mit allen auf ihr liegenden Punkten Elemente der Hauptcoincidenz bilden, wenn sie erstens eine Doppeltangentialebene der Determinantenfläche des Connexes ist und zweitens mit einer Ebene des ihr entsprechenden Ebenenpaares zusammenfällt. Dies kann aber nur in sehr speciellen Fällen geschehen.

Es giebt jedoch unzählig viele Ebenen, deren Hauptcoincidenzcurven Doppelpunkte besitzen, also in Geradenpaare zerfallen. Dies tritt stets ein, wenn eine Ebene u die ihr entsprechende Fläche F_2 berührt. Um die Bedingung dafür anzugeben, gehen wir auf die Gleichung von F_2 in Ebenencoordinaten zurück; sie ist:

$$(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0.$$

Die durch sie dargestellte Fläche wird von der Ebene u berührt, wenn u mit v zusammenfällt. Die gesuchte Bedingung wird daher durch die Gleichung

$$(1) \qquad (abcu)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$$

ausgedrückt, welche ein Fläche 5ter Classe darstellt. Wir können somit den Satz aussprechen:

Alle Ebenen, deren Hauptcoincidenzcurven in Geradenpaare zerfallen, umhüllen eine Fläche 5ter Classe.

Jede Tangentialebene u dieser Fläche berührt, wie bereits bemerkt wurde, ihre Connexfläche $f = a_x^2 u_\alpha = 0$. Bezeichnet man den Berührungspunkt mit x, so müssen die Coordinaten von u die Gleichung

$$\Sigma y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \Sigma y_i \left\{ u_1 \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_i} + u_3 \frac{\partial X^{(3)}}{\partial x_i} + u_4 \frac{\partial X^{(4)}}{\partial x_i} \right\}$$
$$= \Sigma \Sigma y_i u_k \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_i} = 0$$

befriedigen. Dies ist aber nur möglich, wenn die vier Gleichungen

$$\Sigma u_k X_1^{(k)} = \varrho u_1, \quad \Sigma u_k X_2^{(k)} = \varrho u_2, \quad \Sigma u_k X_3^{(k)} = \varrho u_3, \quad \Sigma u_k X_4^{(k)} = \varrho u_4$$

gleichzeitig bestehen, unter $X_i^{(k)}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_i}$ verstanden. Dieselben lassen sich ersetzen durch

$$\Sigma(X_1^{(k)} u_k u_2 - X_2^{(k)} u_k u_1) = 0, \quad \Sigma(X_2^{(k)} u_k u_3 - X_3^{(k)} u_k u_2) = 0,$$
$$\Sigma(X_1^{(k)} u_k u_3 - X_3^{(k)} u_k u_1) = 0, \quad \Sigma(X_2^{(k)} u_k u_4 - X_4^{(k)} u_k u_2) = 0,$$
$$\Sigma(X_1^{(k)} u_k u_4 - X_4^{(k)} u_k u_1) = 0, \quad \Sigma(X_3^{(k)} u_k u_4 - X_4^{(k)} u_k u_3) = 0.$$

Neben diesen Gleichungen besteht offenbar noch die Gleichung $u_x = 0$. Multiplicirt man sie der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3, u_4, so erhält man ein System von 10 Gleichungen, in welchen die 10 Grössen

$$u_1^2, \; u_2^2, \; u_3^2, \; u_4^2, \; u_1 u_2, \; u_1 u_3, \; u_1 u_4, \; u_2 u_3, \; u_2 u_4, \; u_3 u_4$$

linear vorkommen. Man kann dieselben also ohne Weiteres eliminiren. Die Coordinaten des Berührungspunktes von u und f genügen daher, wenn die Determinante des Systems mit D bezeichnet wird, der Gleichung:

$$D = 0.$$

Die linke Seite derselben enthält die x_i im zehnten, die Coefficienten der Connexgleichung im sechsten Grade, also in symbolischer Gestalt nur Glieder von der Form

$$aabbccddeeff\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi xxxxxxxxxx.$$

Da nun in ihr nur symbolische Factoren von der Form

$$(abcd), \; (\alpha\beta\gamma\delta), \; a_\alpha, \; a_\beta, \; a_x, \; (\alpha\beta\gamma x)$$

vorkommen können, so folgt, dass entweder alle x, oder wenigstens 9 oder 8 mit lateinischen Buchstaben zusammentreten müssen. Die verschiedenen Formen, welche in den beiden ersten Fällen möglich sind, verschwinden identisch, da sie bei Vertauschung der Symbole ihr Vorzeichen ändern. Im letzten Falle sind nur die Formen

$$(abcd)\,(\alpha\beta\varepsilon x)\,(\gamma\delta\varphi x)\,a_x b_x c_x d_x e_x^2 f_x^2$$

und

$$(abcd)\,(\alpha\beta\gamma x)\,(\delta\varepsilon\varphi x)\,a_x b_x c_x d_x e_x^2 f_x^2$$

möglich, von denen die zweite identisch Null ist. Demnach kann die erste, abgesehen von einem numerischen Factor, nicht verschieden sein von der linken Seite der Gleichung (2). Wir haben somit den Satz:

Die Doppelpunkte der Hauptcoincidenzcurven, d. h. die Punkte, in welchen die Tangentialebenen der Fläche (1) *ihre Connexflächen berühren, bilden eine Fläche zehnter Ordnung, deren Gleichung ist:*

$$(3)\qquad P = (abcd)\,(\alpha\beta\varepsilon x)\,(\gamma\delta\varphi x)\,a_x b_x c_x d_x e_x^2 f_x^2 = 0.$$

Sondert man von der linken Seite derselben den Factor $(\alpha\beta\varepsilon x)e_x^2$ ab, ersetzt ihn durch $\Sigma(\alpha\beta)_{ik}(\varepsilon x)_{lm}e_x^2$ oder

$$e_x^2(\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1)(\alpha\beta)_{34} + e_x^2(\varepsilon_1 x_3 - \varepsilon_3 x_1)(\alpha\beta)_{42} + e_x^2(\varepsilon_1 x_4 - \varepsilon_4 x_1)(\alpha\beta)_{23}$$
$$+ e_x^2(\varepsilon_2 x_3 - \varepsilon_3 x_2)(\alpha\beta)_{14} + e_x^2(\varepsilon_2 x_4 - \varepsilon_4 x_2)(\alpha\beta)_{31} + e_x^2(\varepsilon_3 x_4 - \varepsilon_4 x_3)(\alpha\beta)_{12}$$

und berücksichtigt die Gleichungen (4) des ersten Paragraphen, in welchen $e_x^2\varepsilon_i = X^{(i)}$ gesetzt war, so sieht man, dass die Gleichung (3) für die Coordinaten jedes der 15 Grundpunkte identisch verschwindet, dass also *die durch* (3) *dargestellte Fläche P durch die* 15 *Grundpunkte des Connexes geht.*

Beachtet man weiter, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_i} &= (abcd)a_x b_x c_x d_x e_x^2 f_x^2 \left\{(\alpha\beta\varepsilon x)(\gamma\delta\varphi)_i + (\gamma\delta\varphi x)\,(\alpha\beta\varepsilon)_i\right\}\\ &\quad + (abcd)(\alpha\beta\varepsilon x)\,(\gamma\delta\varphi x)\left\{b_x c_x d_x e_x^2 f_x^2 a_i + a_x c_x d_x e_x^2 f_x^2 b_i\right.\\ &\quad + a_x b_x d_x e_x^2 f_x^2 c_i + a_x b_x c_x e_x^2 f_x^2 d_i + 2\,a_x b_x c_x d_x e_x f_x^2 e_i\\ &\quad \left. + 2 a_x b_x c_x d_x e_x^2 f_x f_i\right\}\end{aligned}$$

ist und dass alle Glieder auf der rechten Seite verschwinden, wenn man für die x_i die Coordinaten der Grundpunkte setzt — jedes hat nämlich entweder den Factor $e_x^2(\alpha\beta\varepsilon x)$ oder $f_x^2(\gamma\delta\varphi x)$ —, so ergiebt sich noch der Satz:

Die 15 *Grundpunkte des Connexes* (2, 1) *sind Doppelpunkte der Fläche P.*

An die vorhergehenden Erörterungen knüpfen wir noch die Frage nach dem Orte der Coincidenzcurven derjenigen Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, und die nach der Enveloppe der Coincidenzkegel, deren Spitzen auf einer Geraden liegen.

Um die Gleichung des eben genannten Ortes aufzustellen, beachten wir, dass die Hauptcoincidenzcurve einer Ebene u durch die Gleichungen

$$(4)\qquad a_x^2 u_\alpha = 0 \text{ und } u_x = 0$$

gegeben ist. Soll u durch eine Gerade, welche zwei beliebige Punkte

y und z verbindet, hindurchgehen, so müssen die Coordinaten von u gleichzeitig die Gleichungen

(5) $$u_y = 0 \text{ und } u_z = 0$$

befriedigen. Aus den drei letzten Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich nun, wenn man den Proportionalitätsfactor vernachlässigt:

$$u_i = (xyz)_i,$$

und wenn man diese Werthe in die erste Gleichung substituirt:

(6) $$a_x^2(\alpha xyz) = 0.$$

Wir sind sonach zu dem Resultate gelangt:

Wenn sich eine Ebene um eine in ihr liegende feste Gerade dreht, so beschreibt ihre Hauptcoincidenzcurve eine Fläche dritter Ordnung. Wir wollen sie mit X_{yz} bezeichnen.

Um ferner die Gleichung der Enveloppe der Coincidenzkegel abzuleiten, deren Spitzen auf einer Geraden liegen, beachten wir, dass die Gleichungen (4) nicht nur die Coincidenzcurve der Ebene u, sondern auch den Coincidenzkegel des Punktes x repräsentiren. Stellen wir demnach die Gerade als Durchschnittslinie zweier Ebenen v und w dar, so müssen die Coordinaten von x gleichzeitig den Gleichungen

$$v_x = 0 \text{ und } w_x = 0$$

genügen. Aus denselben und der zweiten der Gleichungen (4) erhalten wir, mit Vernachlässigung des Proportionalitätsfactors,

$$x_i = (uvw)_i,$$

mithin, da diese Werthe auch der ersten der Gleichungen (4) genügen müssen, als Gleichung der gesuchten Enveloppe:

(7) $$(auvw)^2 u_\alpha = 0,$$

ein Resultat, das sich folgendermassen aussprechen lässt:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so beschreibt sein Coincidenzkegel eine Fläche dritter Classe U_{vw}.

Was nun zunächst die Fläche X_{yz} betrifft, so folgt aus der Herleitung ihrer Gleichung $a_x^2(\alpha xyz) = 0$ ohne Weiteres, dass eine Ebene des Coincidenzkegels (Ebenenbüschels) eines Punktes x, dessen Coordinaten die Gleichung befriedigen, durch die Gerade yz geht. Mithin muss die Axe des Büschels die eben genannte Gerade schneiden. Umgekehrt muss jede Gerade yz, deren Coordinaten der Gleichung genügen, in einer Ebene des dem Punkte x entsprechenden Büschels liegen, also die Axe desselben treffen. *Für veränderliche $(yz)_{ik}$ ist demnach*

(8) $$a_x^2(\alpha xyz) = 0$$

die Gleichung des Coincidenzkegels des Punktes x in Liniencoordinaten.

Der blosse Anblick der Gleichung (8) lehrt, dass dieselbe identisch erfüllt wird, wenn man für die x_i der Reihe nach y_i, z_i und $\varkappa_1 y_i + \varkappa_2 z_i$ setzt. *Die Fläche X_{yz} enthält demnach nicht nur die Punkte y und z, sondern auch jeden Punkt ihrer Verbindungslinie, mithin die Gerade yz selbst.* Letztere ist daher eine der 27 Geraden der Fläche.

Ersetzt man die linke Seite der Gleichung der Fläche X_{yz} durch einen Ausdruck, welcher dem oben für den Factor $(\alpha\beta\varepsilon x)e_x^2$ gesetzten ähnlich ist, und berücksichtigt das dort Gesagte, so sieht man ferner, dass sie für die Coordinaten jedes der 15 Grundpunkte identisch verschwindet. *Sämmtliche den Geraden des Raumes entsprechenden Flächen X_{yz} gehen also durch die 15 Grundpunkte des Connexes*, und umgekehrt: *Jede Fläche dritter Ordnung, welche durch diese Punkte geht, ist mit einer Fläche X_{yz} identisch.* Denn sie ist im Allgemeinen durch vier beliebige Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ bestimmt, wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass jede Fläche dritter Ordnung durch 19 Punkte bestimmt ist und dass sich die Parameter $(yz)_{ik}$ aus den Gleichungen

$$(9) \qquad a^2_{x^{(1)}}(\alpha x^{(1)} y z) = 0, \quad a^2_{x^{(2)}}(\alpha x^{(2)} y z) = 0, \quad a^2_{x^{(3)}}(\alpha x^{(3)} y z) = 0,$$
$$a^2_{x^{(4)}}(\alpha x^{(4)} y z) = 0$$

in Verbindung mit der bekannten Relation

$$(yz)_{12}(yz)_{34} + (yz)_{13}(yz)_{42} + (yz)_{14}(yz)_{23} = 0$$

berechnen lassen. Da die letzte Gleichung quadratisch ist, so erhält man für die Verhältnisse der $(yz)_{ik}$ zwei Werthsysteme, also auch zwei Gerade yz und mit ihnen zwei Flächen X_{yz}. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch auf folgende Weise: Die Gerade yz muss, da ihre Coordinaten den Gleichungen (9) gleichzeitig genügen, die Coincidenzgeraden (Kegel erster Klasse) der vier Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ schneiden. Nun besitzen aber vier Gerade nur zwei gemeinschaftliche Transversalen, also muss yz mit einer derselben zusammenfallen. Der Fall, dass zwei oder mehrere der Gleichungspaare

$$a^2_{x^{(1)}} u_\alpha = 0, \quad u_{x^{(1)}} = 0;$$
$$a^2_{x^{(2)}} u_\alpha = 0, \quad u_{x^{(2)}} = 0;$$
$$a^2_{x^{(3)}} u_\alpha = 0, \quad u_{x^{(3)}} = 0;$$
$$a^2_{x^{(4)}} u_\alpha = 0, \quad u_{x^{(4)}} = 0$$

gleichzeitig bestehen, bildet jedoch eine Ausnahme, denn dann gehören ebensoviele von den vier Punkten $x^{(i)}$ derselben Coincidenzcurve an, ihre entsprechenden Coincidenzgeraden schneiden sich und die entsprechenden Gleichungen (9) stellen nur eine und dieselbe Bedingung dar, reichen also zur Bestimmung von $(yz)_{ik}$ nicht mehr aus.

Die Connexflächen, welche den Ebenen eines Büschels entsprechen, dessen Axe yz ist, bilden ein Flächenbüschel zweiter Ordnung. Beide Büschel sind projectivisch so aufeinander bezogen, dass jeder Ebene ihre Connexfläche entspricht. Der Ort der Durchschnittscurve zweier entsprechenden Elemente der beiden Büschel ist eine Fläche dritter Ordnung*). Dieselbe ist von der Fläche X_{yz}, welche von der Axe des Ebenenbüschels herrührt, nicht verschieden. Denn die Coincidenzcurve einer Ebene des Büschels ist die Durchschnittslinie dieser Ebene mit ihrer Connexfläche. Durch yz gehen fünf Ebenen, welche ihre entsprechenden Flächen berühren, also die Fläche X_{yz} in einem Kegelschnitte mit Doppelpunkt (zwei Gerade ausser yz) schneiden. Jede solche Ebene schneidet daher die Fläche X_{yz} in einer Curve dritter Ordnung mit drei Doppelpunkten, ist mithin eine Tritangentialebene der Fläche (1). Man kann daher den Satz aussprechen:

Die durch die Gleichung (1) *dargestellte Fläche wird von den Tritangentialebenen der Flächen X_{yz} umhüllt.*

Was endlich die Fläche U_{vw} betrifft, so sieht man unmittelbar, dass ihre Gleichung

$$(10) \qquad (auvw)^2 u_a = 0$$

in der zweiten Ordnung verschwindet, wenn man für die u_i nach einander v_i, w_i und $\lambda_1 v_i + \lambda_2 w_i$ setzt. Daraus folgt, *dass nicht nur die Ebenen v und w, sondern auch jede durch die Gerade vw gehende Ebene Doppeltangentialebene, vw demnach Doppelgerade von U_{vw}* ist. Die Gleichung (10) stellt daher ein System von Flächen dritter Classe dar, deren jede die Gerade, von welcher sie herrührt, zur Doppelgeraden hat. U_{vw} wurde erzeugt durch die Coincidenzkegel der Punkte von vw, wird also von den Tangentialebenen dieser Kegel, welche Ebenenbüschel sind, berührt. Mithin müssen die Axen dieser Büschel der Fläche ebenfalls angehören, *dieselbe ist daher eine Regelfläche* und da die Ordnung einer solchen Fläche immer gleich der Classe derselben ist, so ist U_{vw} eine Regelfläche dritter Ordnung.

Beachtet man noch, dass die Gleichung (10) die Bedingung angiebt, die zwischen den Coordinaten der Ebene u und denen der Geraden vw erfüllt sein muss, damit u Ebene eines Büschels sei, dessen Axe vw schneidet, oder was dasselbe ist, dass vw die Coincidenzcurve von u trifft, so ergiebt sich schliesslich, *dass* (10) *für constante u_i und veränderliche $(vw)_{ik}$ einen speciellen Liniencomplex zweiten Grades darstellt, dessen Axen sämmtlich einen Kegelschnitt, die Hauptcoincidenzcurve von u, schneiden.*

*) Vergl. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867, S. 9.

Zur Geometrie von Punktgruppen auf dem Kreise.

Von

S. Kantor in Wien.

1. Zieht man zu den Seiten eines Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ von einem Punkte P seines Umkreises Senkrechte und verlängert dieselben, bis sie den Kreis in G_1, G_2, G_3 treffen, so haben $G_1 A_1$, $G_2 A_2$, $G_3 A_3$ dieselbe Richtung und zwar diejenige der Geraden σ_3 für P und bezüglich des Dreieckes A, wenn mit σ_3 die Gerade der Fusspunkte auf den Dreiecksseiten bezeichnet wird. Die Winkel dieser Richtung mit denjenigen der Seiten sind die Complemente zu den Winkelabständen des P von den Ecken A und der Winkel derselben Richtung mit dem Halbmesser PO ist gleich der Summe dieser Winkelabstände, $PA_1 + PA_2 + PA_3 = \Sigma PA$, während sie gegen die Eckenhalbmesser AO geneigt ist unter $PA_2 + PA_3 - PA_1$, $PA_3 + PA_1 - PA_2$, $PA_1 + PA_2 - PA_3$. Das Doppelverhältniss der vier parallelen Geraden $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, $A_3 G_3$ und σ_3 ist gleich demjenigen der vier Punkte A_1, A_2, A_3 und P_3 auf dem Kreise. σ_3 hat von P die Entfernung $2r \sin PA_1 \sin PA_2 \sin PA_3$ und die von O ist $2r \sin PA_1 \sin PA_2 \sin PA_3 + r \sin(PA_1 + PA_2 + PA_3)$.

Man kann nach jenen Punkten fragen, für welche die σ_3 parallel zu PO ist. In diesem Falle muss ΣPA gleich Null oder 180^0 sein. Ist nun P ein solcher Punkt, so genügen auch die beiden Punkte, welche mit jenem ein gleichseitiges Dreieck bilden, der gestellten Bedingung. Mehr als diese drei Punkte genügen ihr aber nicht. Denn es müssen dies die Doppelpunkte der Punktreihe P und der quadratischen Involution sein, welche von den Endpunktepaaren der zu den σ_3 parallelen Kreisdurchmesser gebildet wird, und solcher Doppelpunkte giebt es bekanntlich drei.*)

Ist $A_1 B_1$ parallel $A_2 A_3$ und $B_1 A_1 = 3 PA_1$, so ist P ein Punkt der verlangten Art. Für ihn ist nämlich $PA_1 + PA_2 + PA_3 = 3 PA_1 + A_1 A_2 + A_1 A_3 = B_1 A_1 + A_1 A_2 + A_1 A_3 = 180^0$. Nennen wir die

*) Man sehe Weyr: Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde I, 7. p. 51.

Richtung von σ_3 die dem Punkte P entsprechende Richtung (III), so gilt daher:

„Sind $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ beziehlich parallel zu $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ und P', P'', P''' die ersten Dritttheilpunkte der Bögen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, so bilden P', P'', P''' ein gleichseitiges Dreieck. Es sind dies diejenigen Punkte, für welche die Richtung (III) mit jener ihres Halbmessers übereinstimmt. Die ihnen zugehörigen σ_3 sind die Rückkehrtangenten der von allen σ_{III} eingehüllten Steiner'schen Curve."*) Wird für jedes der vier aus vier Punkten A zu combinirenden Dreiecke bezüglich des vierten Eckpunktes die Anfangs bezeichnete Construction ausgeführt, so ist das Doppelverhältniss der jedesmaligen drei Geraden AG mit der zugehörigen σ_3 ersichtlich für alle vier Dreiecke dasselbe, nämlich jenes der vier Eckpunkte auf dem Kreise.

2. Wenn man zur Richtung (III) bezüglich des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ durch P eine Senkrechte bis zum Kreise zieht und den Schnittpunkt mit einem Kreispunkte A_4 verbindet, so schliesst die Richtung der Verbindungslinie mit der von PO den Winkel $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 - 90^0$ ein. Die Summe zeigt, dass diese Richtung dieselbe bleibt, welches von den vier Dreiecken aus $A_1 A_2 A_3 A_4$ man auch zu der Construction wählen mag. Mit Benutzung der in Art. 1. enthaltenen Construction der Richtung (III) lässt sich also sagen:

„Wird von einem Punkte P des durch A_1, A_2, A_3, A_4 gehenden Kreises die zu einer Seite $A_{x_1} A_{x_2}$ senkrechte Sehne gezogen, deren Endpunkt mit A_{x_3} verbunden, zu dieser Sehne wieder eine durch P senkrecht, und dann die Verbindungslinie des letzten Endpunktes mit A_{x_4}, so hat diese Verbindungslinie eine von der Wahl der Complexion $x_1 x_2 x_3 x_4$ unabhängige Richtung, die Richtung (IV) für P."

Auch hier kann man nach jenen Punkten von K fragen, für welche ΣPA gleich Null oder 180^0 wird.

Zwei beliebigen Punkten P_1, P_2 entsprechen Richtungen (IV), welche gegen einander unter dem Winkel $2 P_1 P_2$ geneigt sind. Zwei Punkten P, welche die Enden eines Durchmessers sind, also um 90^0 von einander abstehen, kommt mithin dieselbe Richtung (IV) zu. Wird der Durchmesser von der Richtung (IV) gezogen und nun die ganze krumme Punktreihe P betrachtet, so ist dieselbe zwei-zweideutig verwandt mit der Reihe jener Durchmesserendpunkte. Zwei auf demselben Kegelschnitte gelegene quadratische Involutionen haben aber vier Doppelpunkte. Für jeden solchen fällt die Richtung (IV) mit PO zusammen. Ist nun P_1 einer von ihnen, so müssen P_2, P_3, P_4

*) Man vgl. „Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocykloide." Sitzungsber. der k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom 11. Juli 1878.

die drei anderen sein, wenn sie den Gleichheiten $P_2 P_1 = 45^0$, $P_3 P_2 = 45^0$, $P_4 P_3 = 45^0$ entsprechen, wenn also $P_1 P_2 P_3 P_4$ ein dem Kreise eingeschriebenes Quadrat ist. Die Construction dieses Quadrates kann einfach auf folgende Weise bewerkstelligt werden: Man lasse von einem Punkte A eine Sehne AB von jener Richtung (III) ausgehen, welche diesem Punkte bezüglich des gegenüberliegenden Dreieckes A zukommt; der erste Viertheilpunkt des durch die Sehne abgeschnittenen Bogens ist ein Eckpunkt des gesuchten Quadrates.

Werden die Winkel t, u, v, die von den drei Gegenseitenpaaren des Viereckes eingeschlossen werden, halbirt, so sind die zwei rechtwinkligen Halbirungsrichtungen für alle drei Winkel dieselben, was schon von Steiner gefolgert worden ist. *Diesen Halbirungslinien parallel sind auch die Seiten des Quadrates* $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Noch in einer anderen Weise treten diese beiden Richtungen auf. Man weiss nämlich, dass die Centra der den vier Dreiecken A eingeschriebenen (In-)Kreise ein Rechteck bilden. *Die Seiten dieses Rechtecks besitzen die erwähnten Richtungen.* Allgemeiner kann man sagen:

Die Mittelpunkte der 16 Kreise, welche die drei Seiten je eines der vier Dreiecke berühren, liegen zu vieren auf acht Geraden. Diese bilden ein System von vier parallelen und vier anderen dazu senkrechten Geraden. Ihre 16 Schnittpunkte sind eben die Centra jener Kreise. Jede der beiden Parallelschaaren besitzt ein Doppelverhältniss, welches gleich ist dem den vier Halbmessern $A_1 O$, $A_2 O$, $A_3 O$, $A_4 O$ zukommenden. Die beiden Parallelschaaren nun haben auch jene beiden charakteristischen Richtungen des Viereckes zu den ihren.

3. In derselben Weise vorschreitend zu den Fünf-, Sechsecken u. s. w. gelangt man zu den Richtungen (V), (VI) u. s. w., welche einem Kreispunkte P bezüglich jener Punktgruppen zukommen.

Sind nun allgemein n Punkte A und ein Punkt P gegeben, so gelten folgende Angaben:

„Wenn man von P die Sehnen: $PG_{x_1} \perp A_{x_1} A_{x_2}$, $PG_{x_2} \perp A_{x_3} G_{x_1}$, $PG_{x_3} \perp A_{x_4} G_{x_2}$ ausgehen lässt, so ist schliesslich die Richtung von $G_{x_{n-2}} A_{x_n}$ die Richtung (N) für den Punkt P bezüglich des n Eckes A. Stets dieselbe Richtung wird nämlich erhalten, was immer für eine Complexion von $1, 2, 3, 4, \ldots n$ unter $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ verstanden sein möge.“

„Bleiben $n - 1$ von den Eckpunkten A und auch P fest, während sich A_{x_n} auf dem Kreise bewegt, so dreht sich die Richtung (N) in demselben Sinne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie A_{x_n} auf dem Kreise. Bewegen sich k Eckpunkte des n Eckes resp. um $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$, so dreht sich auch die Richtung (N) und zwar um $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$.“

Mit Hülfe dieser Bemerkung kann der Winkel gerechnet werden, den die Richtungen (N) für zwei beliebige n Ecke im Kreise und denselben Punkt P mit einander bilden, indem man nur jeden Punkt des einen n Eckes einem bestimmten, sonst aber beliebigen des andern n Eckes zuzuweisen und die von diesen Punktepaaren begrenzten Winkelabstände auf dem Kreise zu addiren braucht. Sind die beiden n Ecke Gegenecke, so wird $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = 90^0$, daher $\Sigma\varphi_k = n \cdot 90^0$. Die Richtungen (N) für zwei Gegenecke in Bezug auf denselben Punkt P sind also identisch oder zu einander senkrecht, je nachdem die Eckenzahl der Polygone gerade oder ungerade ist.

„Bewegt sich bei fest bleibenden A der Punkt P auf dem Kreise, so dreht sich die Richtung (N) im entgegengesetzten Sinne wie der Halbmesser PO mit der $(n-2)$ fachen Winkelgeschwindigkeit des Punktes P."

„Der Winkel, welchen die Richtung (N) mit irgend einer Seite $A_{x_1}A_{x_2}$ einschliesst, ist gleich der Summe jener Winkelabstände, um welche der Punkt P von den übrigen $n-2$ Ecken A entfernt ist, vermehrt um $(n-2)\cdot 90^0$ oder gleich der Summe aus den Winkelabständen des P von den Gegenecken der übrigen $n-2$ Ecken A."

„Der Winkel, welchen (N) mit PO bildet, ist gleich der Summe aus den Winkelabständen des P von allen Ecken A, vermehrt um $(n-1)\cdot 90^0$ oder der Summe aus den Abständen des P von den Gegenpunkten aller A, vermindert um 90^0."

Aus jedem n Ecke lassen sich n vollständige $(n-1)$ Ecke combiniren. Jeder Eckpunkt A_m besitzt bezüglich des gegenüberliegenden $(n-1)$Eckes eine bestimmte Richtung $(N-1)$, die Summe $\Sigma(N-1)^\wedge A_mO$, auf alle Punkte A erstreckt, ergiebt sich als $n(n-1)\cdot 90^0$.

Für jeden Punkt P giebt es bezüglich der eben erwähnten $(n-1)$ Ecke n verschiedene Richtungen $(N-1)$, und die Summe ihrer Winkel gegen PO, $\Sigma(N-1)^\wedge PO$ ist gleich $(n-1)\ (N)^\wedge PO$.

Allgemeiner gilt, wenn $\Sigma(m)^\wedge PO$ die Summe aus den Winkeln aller Richtungen (M) bezüglich der $\binom{n}{m}$ m Ecke A mit PO bedeutet, die Beziehung

$$(N)^\wedge PO = \frac{\Sigma(M)^\wedge PO}{\binom{n-1}{n-m}}$$

4. Der in Art. 1. angegebene Satz bezüglich des gleichseitigen Dreieckes $P_1P_2P_3$ ist bekannt. Man kann ihn wenigstens, wenn er auch noch nicht direct ausgesprochen sein mag, aus einer von Steiner (Cr. J. Bd. LIII. „Ueber eine besondere Curve dritter Classe und vierter Ordnung") gegebenen Construction herauslesen. Auch die in Art. 2. behandelten charakteristischen Richtungen des Viereckes sind,

wenn auch nicht an jenem Quadrate $P_1 P_2 P_3 P_4$, bekannt. Aber, so viel ich weiss, ist bisher weder der in Art. 3. gegebene allgemeine Satz noch der allgemeinere Satz, von welchem die in Art. 1. und 2. als Specialisirungen erscheinen, und welcher hier folgt, bemerkt worden:

„Es ist das n Eck $A_1 \ldots A_n$ auf dem Kreise gegeben. Hat die Sehne $A_m B_m$ jene Richtung $(N-1)$, welche dem A_m bezüglich des gegenüberliegenden $(n-1)$ Eckes zukommt, so sei $P^{(m)} A_m$ gleich dem n^{ten} Theile des Bogens $B_m A_m$. Die für alle n Punkte A auf diese Weise construirten Punkte $P: P', P'', \ldots P^{(n)}$ bilden dann allemal ein bestimmtes regelmässiges n Eck.“

Nach Art. 3. beträgt der durch $A_m B_m$ abgeschnittene Bogen $(n-3) \cdot 90^0 + \Sigma A_m B_{x_m}$. Wird daher dieser Bogen in n gleiche Theile getheilt, so ist die Distanz des ersten Theilpunktes $P^{(m)}$ von A_m

$$90^0 + \frac{\Sigma A_m A_{x_m} - 3 \cdot 90^0}{n}.$$

Die Distanz des nächsten Theilpunktes $P^{(m+1)}$ von A_{m+1} beträgt

$$90^0 + \frac{\Sigma A_{m+1} A_{x_m} - 3 \cdot 90^0}{n}$$

oder

$$90^0 + A_{m+1} A_m + \frac{2 \cdot 90^0 + \Sigma A_m A_{x_m} - 3 \cdot 90^0}{n},$$

also die Entfernung von A_m

$$3 \cdot 90^0 + \frac{2 \cdot 90^0 + \Sigma A_m A_{x_m} - 3 \cdot 90^0}{n}.$$

Der zwischen beiden Theilpunkten liegende Bogen ist die Differenz der beiden Entfernungen von A_m, nämlich:

$$P^{(m+1)} P^{(m)} = 2 \cdot 90^0 + \frac{2 \cdot 90^0}{n},$$

der kleinere Bogen daher $\frac{180^0}{n}$, w. z. b. w.

Dieses regelmässige n Eck P steht nun in zweifacher Art in Beziehung zu dem ursprünglich gegebenen n Ecke A:

„Die Richtung (N) für einen beliebigen Kreispunkt, construirt in Bezug auf das n Eck A ist identisch mit der Richtung (N) für denselben Punkt in Bezug auf das regelmässige n Eck P.“

„Die Richtung (N) für einen Eckpunkt des regulären n Eckes, genommen bezüglich des n Eckes A stimmt mit der Richtung des Halbmessers überein, der zu jenem Eckpunkte gehört.“

Den ersten Satz betreffend, ist

$$PP^{(m)} = PA_m - P^{(m)}A_m = PA_m - 90^0 + \frac{3\cdot 90^0}{n} + \frac{\Sigma A_m A_{x_m}}{n}$$

und mithin

$$\Sigma PP^{(m)} = \Sigma PA_m - n\cdot 90^0 + 3\cdot 90^0 + \frac{\Sigma\Sigma A_m A_{x_m}}{n},$$

oder

$$\Sigma PP^{(m)} = \Sigma PA_m + (3-n)\cdot 90^0 + (n-1)\cdot 90^0 = \Sigma PA_m + 2\cdot 90^0.$$

Der Unterschied der beiden Richtungen N ist nach Art. 3. gleich $2\cdot 90^0$; w. z. b. w. Ferner ist die Summe der Entfernungen eines Eckpunktes von den übrigen des regulären nEckes $P^{(m)}$ gegeben durch $[1+2+\cdots+(n-1)]\,\frac{180}{n} = (n-1)\cdot 90^0$, und demnach ist gemäss einer Angabe in Art. 3. der Winkel zwischen seiner Richtung (N) bezüglich des nEckes $P^{(m)}$ oder auch, wie eben bewiesen wurde, bezüglich des nEckes A, und seinem Halbmesser gleich

$$(n-1)\cdot 90^0 - (n-1)\,90^0 = 0,$$

wodurch auch die zweite Behauptung erledigt ist.

Dieser letzteren zufolge giebt es also n Punkte, für welche (N) und PO dieselbe Richtung bedeuten. Auch so ist dies einzusehen. Hat ein Punkt P eine bestimmte Richtung (N), so haben die ihn zu einem regulären $(n-2)$Ecke ergänzenden Punkte dieselbe Richtung (N). Jeder Richtung entspricht also ein reguläres $(n-2)$Eck und sämmtlichen regulären $(n-2)$Ecken auf dem Kreise alle verschiedenen Richtungen (N). Ziehen wir nun die Durchmesser von den diesen $(n-2)$Ecken entsprechenden Richtungen (N), so haben wir die von ihren Endpunkten gebildete quadratische Involution auf demselben Kreise liegend und projectivisch verwandt mit der früheren Involution $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades. Die beiden Involutionen haben (wie auf einer Geraden)*) n Punkte entsprechend gemein. In jedem Punkte dieser Art endigt ein Halbmesser PO, der seine Richtung (N) zu der eigenen Richtung hat.

Ist ausser einem gegebenen nEcke A auf dem Kreise auch sein regelmässiges nEck $P^{(m)}$ bekannt, oder auch nur eine Ecke desselben, so kann auch die umgekehrte Aufgabe von Art. 3., wenigstens theoretisch mit Hülfe von Winkeltheilungen, gelöst werden, nämlich zu einer gegebenen Richtung (N) den zugehörigen Ausgangspunkt P zu finden.

Liegt P' so, dass $\Sigma P'A = 0$ ist, dann ist der Winkel, den die Richtung (N) eines Punktes P mit $P'O$ einschliesst, $n\cdot PP'$. Man ziehe also einen Halbmesser in der gegebenen Richtung (N), $O\Pi$,

*) Cremona, Introduzione N. 24. 6.

und theile den Bogen $\Pi P'$ in n gleiche Theile. Der zweite Theilpunkt, von P' aus gezählt, ist dann ein Ausgangspunkt für (N). Die übrigen $n-3$ Punkte, welche der Bedingung entsprechen, setzen mit dem gefundenen ein reguläres $(n-2)$ Eck zusammen.

5. Die Gerade σ_3 enthält die Fusspunkte der von P zu A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 gezogenen Senkrechten. Ist ausser P das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ gegeben, so entstehen vier Gerade σ_3. Dieselben bilden ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken in den sechs Seiten AA liegen und dessen Dreiecke ähnlich sind den entsprechenden A. Die Umkreiscentra der erstern sind die Halbirungspunkte der Sehnen PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 und daher hat der Steiner'sche Mittelpunktskreis PO zum Durchmesser. Die Umkreise selbst gehen alle vier durch P, welcher also der Brennpunkt der die σ_3 berührenden Parabel ist, und die Fusspunkte der von P zu den σ_3 gehenden Senkrechten liegen in einer Geraden, σ_4, der Scheiteltangente dieser Parabel, welche σ_4 von P um $2r \sin PA_1 \sin PA_2 \sin PA_3 \sin PA_4$ absteht.

Die Richtung von σ_4 stimmt mit der Richtung (N) für den Punkt P bezüglich des Viereckes A überein und ihre Winkel mit den σ_3 sind PA_1, PA_2, PA_3, PA_4.

Verbindet σ_4 die Fusspunkte a_1, a_2, a_3, a_4, so sind a_1a_2, $a_2a_3, \ldots$ beziehlich gleich

$$2r \sin A_1A_2 \sin PA_3 \sin PA_4,\ 2r \sin A_2A_3 \sin PA_1 \sin PA_4, \ldots$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte:

$$\frac{a_1a_2}{a_1a_3} : \frac{a_4a_2}{a_4a_3} = \frac{2r \sin A_1A_2 \sin PA_3 \sin PA_4}{2r \sin A_1A_3 \sin PA_4 \sin PA_2} : \frac{2r \sin A_4A_2 \sin PA_1 \sin PA_3}{2r \sin A_4A_3 \sin PA_1 \sin PA_2}$$

ist gleich

$$\frac{\sin A_1A_2}{\sin A_1A_3} : \frac{\sin A_4A_2}{\sin A_4A_3},$$

dem der vier Punkte A auf dem Kreise, für jeden beliebigen Punkt P.

Die zur Entstehung von σ_4 führenden Constructionen können in analoger Weise angewendet werden auf das Fünf-, Sechseck u. s. w. bis zu einem beliebigen n Ecke. Man construirt nämlich für den Punkt P die σ_4 bezüglich der fünf Vierecke des Fünfeckes A und fällt auf sie von P aus Senkrechte. Deren Fusspunkte bestimmen eine Gerade, σ_5. Ist σ_{n-1} die entsprechende Gerade für das $(n-1)$ Eck, so kann unter Voraussetzung der in anderer Weise bewiesenen σ_4 die Giltigkeit des folgenden Satzes für das n Eck nachgewiesen werden:

„Die Senkrechten aus P zu seinen Geraden σ_{n-1} bezüglich der n vollständigen $(n-1)$ Ecke A eines gegebenen n Eckes treffen diese σ_{n-1} in Punkten einer Geraden σ_n d. h. die Geraden σ_{n-1} sind Tangenten einer um P als Brennpunkt beschriebenen Parabel mit der Scheiteltangente σ_n."

Man findet, dass die Winkel der σ_n gegen die σ_{n-1} PA_1, PA_2, ... PA_n sind, dass der Abstand des P von σ_n,

$$2r \sin PA_1 \sin PA_2 \ldots \sin PA_n$$

beträgt und:

„*Die Richtung von σ_n ist identisch mit der Richtung* (N) *für P und das nEck A.*" Die Fusspunkte, durch deren Verbindung die σ_n zu Stande kommt, haben gegenseitige Entfernungen, die sich ausdrücken lassen durch: $2r \sin A_1 A_2 \sin PA_3 \sin PA_4 \ldots \sin PA_n$, und ähnliche.

Wien, den 24. Juli 1878.

Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.

I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

Von

Sophus Lie in Christiania.

Nach den bahnbrechenden Arbeiten von Monge und Lagrange ist die Theorie der Minimalflächen bekanntlich von einer grossen Anzahl von Mathematikern behandelt worden. Indem ich mir erlaube, in der nachstehenden und einigen weiteren Abhandlungen einige neue Beiträge zu dieser interessanten Theorie zu liefern, beschränke ich mich darauf diejenigen früheren Untersuchungen zu nennen, die die nächste Veranlassung zu meinen eigenen Bestrebungen gewesen sind.*)

Die partielle Differentialgleichung 2. O., deren Integralflächen Minimalflächen sind, wurde von Lagrange aufgestellt, und darnach von Monge integrirt. Nach der Natur der Sache war Monge's allgemeines Integral mit Imaginären behaftet, und daher gelang es lange nur, ganz particuläre reelle Minimalflächen zu finden. Erst Bonnet gab eine allgemeine Methode zur Auffindung aller reellen Minimalflächen, und gleichzeitig eine Methode zur Bestimmung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen.

Weierstrass gab später eine erschöpfende und elegante Methode zur Auffindung *aller* reellen *algebraischen* Minimalflächen. Zugleich stellte er die Aufgabe, alle Minimalflächen gegebener Classe zu bestimmen. — Hiermit war also die Aufmerksamkeit insbesondere auf die *algebraischen* Minimalflächen gerichtet worden.

Im Folgenden versuche ich eine allgemeine *projectivische Theorie der algebraischen Minimalflächen* zu entwickeln. Ich gebe bemerkens-

---

*) Eine ausführliche Angabe der hierher gehörigen Litteratur findet man in den folgenden Abhandlungen: Riemann, Abhandlungen der Gesellschaft d. W. zu Göttingen, Bd. 13; Beltrami, Memorie ... di Bologna, Serie 2, Tomo 7, 1868; Schwarz, Crelle-Borchhardts Journal, Bd. 80. Unter den neuesten Arbeiten über diesen Gegenstand erlaube ich mir die Aufmerksamkeit auf einige schöne Sätze von Herrn Henneberg zu lenken. (Vergl. seine Dissertation, Zürich 1875, und Annali di Matematica, Bd. 9.)

werthe Methoden zur Bestimmung von Classe und Ordnung einer beliebigen Minimalfläche. Ich beschäftige mich mit der Bestimmung aller reellen Minimalflächen von gegebener Classe, oder von gegebener Ordnung. Es gelingt mir z. B. die Gleichung einer jeden Minimalfläche, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist, anzugeben. Ich vervollständige Geisers schöne Untersuchungen über die unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche u. s. w.

In meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen entwickele ich einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie aller algebraischen Raumcurven und der Theorie aller algebraischen Minimalflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind.

In meinen beiden ersten wie auch in meinen späteren Arbeiten über Minimalflächen werde ich gelegentlich die Theorie der *Berührungs-Transformationen* für die Theorie der Minimalflächen verwerthen.

Ich hege überhaupt die Hoffnung, dass meine Untersuchungen dazu dienen werden, die Theorie der Minimalflächen im höheren Grade, als früher geschehen war, einer synthetischen Behandlung zugänglich zu machen.*)

Nach Riemanns und Weierstrass Vorgange untersucht man jetzt häufig eine reelle Minimalfläche, indem man ihre reellen Punkte in der bekannten Weise auf die reellen Punkte einer $(x+iy)$ Ebene bezieht. So *schön*, *einfach und fruchtbar* diese Methode auch sein mag, so scheint es mir doch eine Unvollkommenheit derselben zu sein, dass sie *nur die reellen Punkte der reellen Minimalflächen* in Betracht zieht. Obgleich ich daher den bleibenden Werth der Riemann-Weierstrass'chen Methode unbedingt anerkenne, wage ich doch zu glauben, dass es nützlich sein wird, Methoden zu entwickeln, die nicht allein die reellen, sondern auch die imaginären Punkte der Minimalflächen berücksichtigen.

§ 1.

Ueber die Flächen, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können.

Unter den Flächen, die sich folgendermassen darstellen lassen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau), \end{aligned}$$

*) In einer Abhandlung im Bd. 2 der Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab", Christiania, habe ich mich schon mit Untersuchungen über Ordnung und Classe der Minimalflächen beschäftigt. Im Texte wird ein Fehler jener Arbeit corrigirt. (Vergl. den letzten Paragraphen dieser Arbeit.)

finden sich, wie wir später nach Monge zeigen werden, insbesondere alle Minimalflächen, die keine imaginäre Developpablen sind. Ich habe gefunden, dass eine grosse Anzahl Eigenschaften der Minimalflächen überhaupt allen Flächen zukommen, die die Gleichungsform (1) besitzen. Daher finde ich es zweckmässig, zunächst die allgemeine Flächenkategorie zu betrachten, die durch die Gleichungen (1) definirt wird.

1. Ich nehme zwei Curven*) c_0 und $\varkappa_0$, die einen Punkt p_0 gemein haben, und verschiebe c_0 parallel mit sich selbst derart, dass p_0 die Curve $\varkappa_0$ durchläuft. Hierbei beschreibt ein beliebiger auf c_0 gelegener Punkt eine Curve $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ congruent und gleichgestellt ist. In Folge dessen kann die von der beweglichen Curve c erzeugte Fläche zugleich durch Translationsbewegung der Curve $\varkappa$ erzeugt werden. Also:

Satz 1. *Kann eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden, so gestattet sie noch eine solche Erzeugung.*

Es ist leicht zu erkennen, dass die hiermit definirten Flächen sich auch dadurch charakterisiren lassen, dass sie die Gleichungsform (1) besitzen. Es seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen der Curve c_0, und ebenso seien

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen der Curve $\varkappa_0$. Dabei werden wir der Einfachheit wegen annehmen, dass der Coordinatenanfangspunkt der gemeinsame Punkt p_0 unserer beiden Curven ist. Unter diesen Voraussetzungen stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau), \end{aligned}$$

offenbar eine Fläche dar, die durch Translationsbewegung sowohl von c_0 wie von $\varkappa_0$ erzeugt werden kann. Giebt man dem Parameter τ successiv verschiedene constante Werthe, so erhält man auf der Fläche gelegene Curven c, die mit c_0 congruent und gleichgestellt sind. Giebt man andererseits dem Parameter t constante Werthe, so erhält man auf der Fläche gelegene Curven $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ congruent und gleichgestellt sind.

*) Wenn ich von Curven spreche, so verstehe ich darunter den Inbegriff von Werthsystemen xyz, die durch zwei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ bestimmt werden. Dabei nehme ich wie gewöhnlich an, dass f und φ Reihenentwickelungen sind, die innerhalb eines gewissen Bereiches convergiren.

2. Die Flächenfamilie (1) gestattet eine andere einfache geometrische Erzeugung, die allerdings mit der soeben vorgetragenen in genauster Verbindung steht.

Ich betrachte die beiden Curven

$$(2)\qquad x_1 = 2A(t), \quad y_1 = 2B(t), \quad z_1 = 2C(t)$$

und

$$(3)\qquad x_2 = 2A_1(\tau), \quad y_2 = 2B_1(\tau), \quad z_2 = 2C_1(\tau)$$

und verbinde einen *beliebigen* Punkt $x_1 y_1 z_1$ der ersten Curve durch eine Gerade mit einem beliebigen Punkte $x_2 y_2 z_2$ der zweiten Curve. Ich suche den Mittelpunkt

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dieser beiden Punkte. Der Ort dieser Mittelpunkte ist offenbar die Fläche

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau). \end{aligned}$$

Nimmt man einen bestimmten Punkt $x_1 y_1 z_1$, und lässt dagegen den Punkt $x_2 y_2 z_2$ die Curve (3) durchlaufen, so beschreibt der Mittelpunkt eine Curve $\varkappa$.

Diese zweite geometrische Erzeugung wird in dieser ersten Abhandlung keine Rolle spielen, während sie den Ausgangspunkt meiner nächsten Arbeit über Minimalflächen bilden soll.

3. Construirt man in einem beliebigen Punkte einer Fläche, die die Gleichungsform (1) besitzt, die Tangente zu der hindurchgehenden Curve c und zugleich die Tangente zu der hindurchgehenden Curve $\varkappa$, so liegen diese beiden Geraden, wie jetzt gezeigt werden soll, *harmonisch* hinsichtlich der beiden Haupttangenten.

Man nehme in der That zwei benachbarte Curven c und zugleich zwei benachbarte Curven $\varkappa$. Diese vier Curven bestimmen nach unseren früheren Entwickelungen ein infinitesimales auf der Fläche gelegenes *Parallelogramm*, dessen Seiten infinitesimale Strecken der vier Curven sind. Hieraus folgt, dass je zwei zusammenstossende Seiten des Parallelogramms im Dupin'schen Sinne conjugirte Gerade sind. Also:

Satz 2. *In jedem Punkte unserer Fläche bestimmen die hindurchgehenden Curven c und $\varkappa$ zwei Richtungen, die zu den zugehörigen Haupttangenten harmonisch liegen.*

Einen analytischen Beweis dieses fundamentalen Satzes erhält man folgendermassen.

In jedem nicht singulären Punkte unserer Fläche bilden die Fortschreitungsrichtungen dx, dy, dz einen ebenen Büschel

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
dx &= A'(t)\,dt + A_1'(\tau)\,d\tau, \\
dy &= B'(t)\,dt + B_1'(\tau)\,d\tau, \\
dz &= C'(t)\,dt + C_1'(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

der in der Tangentenebene gelegen ist. Durch Elimination von dt und $d\tau$ kommt die Gleichung

$$
\begin{vmatrix} dx & A'(t) & A_1'(\tau) \\ dy & B'(t) & B_1'(\tau) \\ dz & C'(t) & C_1'(\tau) \end{vmatrix} = 0,
$$

die als Gleichung der Tangentenebene aufgefasst werden kann. Dementsprechend ist

$$
\begin{vmatrix} dx & A' + A''dt & A_1' + A_1''d\tau \\ dy & B' + B''dt & B_1' + B_1''d\tau \\ dz & C' + C''dt & C_1' + C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0,
$$

die Gleichung der Tangentenebene in einem benachbarten Punkte. Ich verlange, dass die Verbindungsgerade unserer beiden benachbarten Punkte eine Haupttangente sein soll, das heisst, dass diese Verbindungsgerade die Schnittlinie der beiden benachbarten Tangentenebenen ist. Unsere Forderung kommt darauf hinaus, dass die beiden letzten Gleichungen durch dasselbe Werthsystem dx, dy, dz befriedigt werden, und findet daher ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung

$$
\begin{vmatrix} dx & A''dt & A_1' \\ dy & B''dt & B_1' \\ dz & C''dt & C_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx & A' & A_1''d\tau \\ dy & B' & B_1''d\tau \\ dz & C' & C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0,
$$

wenn man in derselben dx, dy, dz durch ihre Werthe (4) ersetzt. In dieser Weise ergiebt sich als Differentialgleichung der Haupttangentencurven die Gleichung

$$
\begin{vmatrix} A' & A'' & A_1' \\ B' & B'' & B_1' \\ C' & C'' & C_1' \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A_1' & A' & A_1'' \\ B_1' & B' & B_1'' \\ C_1' & C' & C_1'' \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,
$$

welche die Differentialen dt und $d\tau$ nur als Quadrate dt^2, $d\tau^2$, dagegen nicht in der Combination $dt\,d\tau$ enthält.

Diese Form der Differentialgleichung zeigt, dass in jedem Punkte der Fläche die beiden Haupttangenten harmonische Lage hinsichtlich der Richtungen der Curven $t = \text{Const.}$ und $\tau = \text{Const.}$ besitzen.

4. Jetzt construiren wir in jedem Punkte einer Curve c die Tangente zu der durch denselben Punkt hindurchgehenden Curve $\varkappa$. Nach der Definition unserer Fläche müssen alle diese Tangenten parallel sein, so dass ihr Inbegriff eine um die Fläche umgeschriebene Cylinderfläche bildet. Also:

Satz 3. *Die Developpable, die unsere Fläche längs einer Curve der einen Schaar berührt, ist eine Cylinderfläche.*

Dieser Satz giebt, wie ich beiläufig bemerke, ohne Schwierigkeit einen dritten Beweis des Satzes 2.

---

5. Ich lasse jetzt eine *erste* Beschränkung eintreten. Ich setze nämlich voraus, dass die Tangenten der Curven c_0 und $\varkappa_0$ sich paarweise als *parallel* zusammenordnen lassen, anders ausgesprochen, dass diese beiden Curven eine gemeinsame irreductible Differentialgleichung der Form

$$f(dx\, dy\, dz) = 0$$

befriedigen. Alsdann müssen *sämmtliche* Curven c und $\varkappa$ die Gleichung $f = 0$ erfüllen.

Ich werde zeigen, dass in diesem Falle sowohl die Curven c wie die Curven $\varkappa$ eine Umhüllungscurve, und zwar *eine gemeinsame Umhüllungscurve* besitzen.

Die durch die Punkte einer Curve c_0 hindurchgehenden Curven $\varkappa$ besitzen nämlich in diesen Punkten eine gemeinsame Tangentenrichtung. Und nach unserer Voraussetzung hat auch die Curve c_0 dieselbe Richtung in einem gewissen Punkte π. In diesem Punkte berührt daher c_0 die durch denselben Punkt hindurchgehende Curve $\varkappa$. Erinnert man nun, dass c_0 in die benachbarte Curve c_0' übergeht durch eine infinitesimale Translation, deren Richtung die besprochene gemeinsame Tangentenrichtung ist, so erkennt man einerseits, dass c_0 und c_0' sich im Punkte π schneiden, so dass alle c eine Umhüllungscurve Σ bestimmen, andererseits dass c_0 diese Umhüllungscurve im Punkte π berührt. Und da c_0 zugleich eine Curve $\varkappa$ in diesem Punkte berührt, so folgt, dass Σ auch von allen $\varkappa$ berührt wird. Also:

Satz 4. *Wenn die auf unserer Fläche gelegenen Curven c und $\varkappa$ eine Relation der Form*

$$f(dx\, dy\, dz) = 0$$

befriedigen, so haben sowohl die Curven c wie die Curven $\varkappa$ eine Umhüllungscurve, und zwar haben beide Curvenschaaren dieselbe Umhüllungscurve.

Hieraus folgt, dass unsere Fläche zwei weitere Erzeugungsweisen gestattet. Entweder kann man die Curve c in Translationsbewegung führen, derart, dass sie längs Σ gleitet; oder auch man kann die Curve $\varkappa$ in Translationsbewegung führen, derart, dass sie längs Σ gleitet.

Man wähle andererseits eine beliebige Curve c, und eine beliebige Curve Σ, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind. Gleitet nun c in Translationsbewegung längs Σ, so beschreiben die Punkte von c congruente und gleichgestellte Curven $\varkappa$, deren

Tangenten jedesmal mit einer Tangente der Curve c parallel sind. Dies giebt:

Satz 5. *Gleitet eine Curve c in Translationsbewegung längs einer Curve Σ, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind, so kann die erzeugte Fläche auch dadurch beschrieben werden, dass eine gewisse andere Curve $\varkappa$ in Translationsbewegung längs Σ gleitet.*

§ 2.

Geometrische Interpretation von Monge's allgemeinem Integral der Differentialgleichung der Minimalflächen.

Durch eine zweckmässige Specialisation gehen die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Flächen in Minimalflächen über, und zwar erhält man in dieser Weise alle Minimalflächen, die in Monge's allgemeinem Integral der betreffenden Differentialgleichung enthalten sind. Dies soll jetzt gezeigt werden.

6. Ich setze voraus, dass die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Curven c_0 und $\varkappa_0$ der Differentialgleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{1}$$

genügen; anders ausgesprochen, dass sie Curven von der Länge Null sind. Um die Sprache zu erleichtern, erlaube ich mir vorzuschlagen, Curven, deren Länge gleich Null ist, mit dem Namen *Minimalcurven* zu bezeichnen. Dieser Name scheint mir u. a. auch deswegen naturgemäss, weil diese Curven, wie später gezeigt werden soll, als Ebenengebilde aufgefasst, Minimalflächen sind.

Die Voraussetzung, dass c_0 und $\varkappa_0$ Minimalcurven sind, zieht nach sich, dass auch die allgemeinen Curven c und $\varkappa$ solche Curven sind. In Folge dessen liegen in jedem Punkte der erzeugten Fläche die beiden Haupttangenten harmonisch hinsichtlich der beiden Tangenten, deren Länge Null ist. Das heisst, dass die beiden Haupttangenten senkrecht auf einander stehen, und dass in Folge dessen die beiden Hauptkrümmungsradien gleich gross, und dabei entgegengesetzt gerichtet sind. Die Fläche ist daher eine Minimalfläche.

Indem man die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen berücksichtigt, erhält man somit die folgenden Sätze:

Satz 6. *Führt man eine Minimalcurve c in Translationsbewegung derart, dass ein Punkt der Curve eine andere Minimalcurve durchläuft, so beschreibt c immer eine Minimalfläche.*

Satz 7. *Nimmt man zwei beliebige Minimalcurven c und $\varkappa$, verbindet einen arbiträren Punkt der ersten Curve mit einem arbiträren Punkte der zweiten Curve, und bestimmt den Mittelpunkt dieser beiden Punkte, so ist der Ort dieser Mittelpunkte eine Minimalfläche.*

Satz 8. *Gleitet eine Minimalcurve c in Translationsbewegung längs einer festen Minimalcurve, so beschreibt c eine Minimalfläche.*

7. Es ist leicht nachzuweisen, dass die soeben angegebenen Constructionen *sämmtliche* Minimalflächen liefern, auf denen durch jeden Punkt allgemeiner Lage *zwei* verschiedene Minimalcurven hindurchgehen.

Wählt man nämlich auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalcurve c allgemeiner Lage, und construirt für jeden Punkt dieser Curve die Tangente zu der zweiten durch diesen Punkt hindurchgehenden Minimalcurve, so bilden alle diese Tangenten eine *Developpable*, indem jede unter diesen Tangenten zu der entsprechenden Tangente der Curve c conjugirt ist.

Hieraus folgt, entweder dass die Developpable, die unsere Minimalfläche längs einer Minimalcurve allgemeiner Lage berührt, den Kugelkreis enthält, oder auch dass diese Developpable ein Kegel ist, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist. Und da es nur *eine* Developpable giebt, die gleichzeitig um die vorgelegte Minimalfläche und den Kugelkreis umgeschrieben ist, so erkennen wir, dass der erste Fall jedenfalls nur für solche Minimalflächen eintreten kann, die selbst imaginäre Developpable sind, welche um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 9. *Wählt man auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalcurve allgemeiner Lage und zieht darnach durch alle Punkte dieser Curve die Tangente an die zweite durch den betreffenden Punkt hindurchgehende Minimalcurve, so treffen die construirten Tangenten sämmtlich den Kugelkreis in demselben Punkte.*

Führt man daher die gewählte Minimalcurve eine infinitesimale Strecke in Translationsbewegung gegen den im vorangehenden Satze besprochenen Punkt des Kugelkreises, so liegt die hiernach erhaltene benachbarte Minimalcurve fortwährend auf der Fläche, vorausgesetzt, dass man von infinitesimalen Grössen *zweiter* Ordnung absieht.

Und also kann die vorgelegte Minimalfläche in der Weise beschrieben werden, dass man die gewählte Minimalcurve in Translationsbewegung führt derart, dass ihre Punkte die Minimalcurven der zweiten Schaar durchlaufen.

Hiermit ist die Richtigkeit von der im Anfange dieser Nummer aufgestellten Behauptung nachgewiesen, sodass wir den folgenden Satz aussprechen können:

Satz 10. *Die Operationen der vorangehenden Nummer liefern alle Minimalflächen, auf denen durch jeden Punkt allgemeiner Lage zwei verschiedene Minimalcurven hindurchgehen.*

8. Jetzt brauchen wir nur die Ergebnisse der beiden letzten Nummern analytisch zu formuliren um Monge's allgemeine Bestimmung aller Minimalflächen wiederzufinden.

Seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen zweier beliebiger Minimalcurven, so dass die beiden Gleichungen

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

bestehen. Alsdann bestimmen die Gleichungen

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

eine Fläche, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Minimalcurve erzeugt werden kann. Unsere Fläche ist daher (Nr. 6.) eine Minimalfläche, und andererseits besitzen (Nr. 7.) alle Minimalflächen diese Gleichungsform, vorausgesetzt dass man von den imaginären Developpabeln absieht, die um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 11. *Sieht man von den imaginären um den Kugelkreis umgeschriebenen Developpabeln ab, so besitzt jede Minimalfläche die Gleichungsform*

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

wo

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2$$

ist. Und andererseits bestimmen diese Gleichungen immer eine Minimalfläche.

9. Hiernach reducirt sich die Bestimmung aller Minimalflächen auf die Auffindung aller Minimalcurven. Lagrange hat zuerst gelehrt, beliebig viele Minimalcurven zu bestimmen. Für eine synthetische Auffassung scheint mir die folgende von Darboux*) herrührende Bestimmung aller Minimalcurven die einfachste zu sein.

---

*) Um überhaupt beliebig viele Curven zu finden, die eine vorgelegte Relation

$$f(xyz\,dx\,dy\,dz) = 0$$

erfüllen, sucht man nach Monge und Pfaff eine vollständige Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung

$$F(xyzpq) = 0,$$

deren Charakteristiken $f = 0$ befriedigen. Durch Variation der Constanten findet man beliebig viele Integralflächen, die im Allgemeinen eine Rückkehrkante besitzen, welche der Gleichung $f = 0$ genügt.

Man unterwirft die allgemeine Ebene

$$tx + uy + vz - 1 = 0,$$

die Bedingungsgleichung

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

welche ausdrückt, dass die betreffende Ebene den Kugelkreis berührt; fügt sodann eine beliebige Relation

$$f(tuv) = 0$$

hinzu. Die hiermit bestimmten Ebenen bilden eine Developpable, die um den Kugelkreis geschrieben ist. Die Rückkehrkante derselben ist eine Minimalcurve, und auf diese Weise können offenbar sämmtliche Minimalcurven erhalten werden.*) Ist insbesondere f eine algebraische Function, so ist die erhaltene Minimalcurve algebraisch, und umgekehrt ist klar, dass alle algebraische Minimalcurven in dieser Weise erhalten werden. Also:

Satz 12. *Die allgemeinste algebraische Minimalcurve wird dargestellt in Ebenencoordinaten durch die Gleichungen*

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$
$$f(tuv) = 0,$$

wo f eine arbiträre algebraische Function von t, u, v bezeichnet.

10. Unter den verschiedenen *expliciten* Formeln für alle Minimalcurven, insbesondere für alle algebraische Minimalcurven sind die nachstehenden von Weierstrass herrührenden besonders bemerkenswerth:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= (1-s^2)\,F''(s) + 2s\,F'(s) - 2F(s), \\ y &= i(1+s^2)\,F''(s) - 2is\,F'(s) + 2i\,F(s), \\ z &= 2sF''(s) - 2F'(s) \end{aligned}$$

woraus durch Differentiation

$$(2)\qquad \begin{aligned} dx &= (1-s^2)\,F'''(s), \\ dy &= i(1+s^2)\,F'''(s), \\ dz &= 2sF'''(s). \end{aligned}$$

Dass diese beiden äquivalenten Gleichungssysteme eine Minimalcurve bestimmen, folgt daraus, dass sie die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

identisch erfüllen. Dass sie *alle* Minimalcurven liefern, liegt darin, dass die Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz eine arbiträre Function der Hülfsvariable s enthalten. Also:

---

*) Besonders interessant für die Theorie der Minimalflächen ist der Fall, dass die Gleichung $f(tuv) = 0$ eine reelle Raumcurve in Ebenencoordinaten darstellt. Diesen Fall betrachte ich in meiner nächsten Abhandlung.

Satz 13. *Die Formeln* (1) *liefern alle Minimalcurven.*

Lässt man in den Weierstrass'schen Formeln $F(s)$ eine beliebige algebraische Function von s bezeichnen, so erhält man offenbar eine algebraische Minimalcurve. Dass man umgekehrt in dieser Weise sämmtliche algebraische Minimalcurven findet, kann man folgendermassen erkennen.

Lass mich voraussetzen, dass eine algebraische Minimalcurve durch die Formeln (1) dargestellt wird. Alsdann können x, y, z immer als *algebraische* Functionen einer gewissen Hülfsgrösse t ausgedrückt werden. Und da wegen (2)

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$$

ist, so folgt, dass auch s eine algebraische Function von t, und ebenso dass t eine algebraische Function von s ist. Folglich sind auch x, y, z algebraische Functionen von s. Und da die Gleichungen (1) geben

$$F(s) = -\tfrac{1}{2}\left\{(1-s^2)x + i(1+s^2)y + 2sz\right\},$$

ergiebt sich, dass $F(s)$ selbst eine *algebraische* Function von s ist. Hiermit ist der folgende Satz, der sich nicht *in dieser Form* bei Weierstrass findet, erwiesen:

Satz 14. *Man erhält die allgemeinste algebraische Minimalcurve, indem man in den Formeln* (1) $F(s)$ *als eine beliebige algebraische Function von s wählt.*

§ 3.

Reelle Minimalflächen. Algebraische Minimalflächen.

11. Es ist nun nach Bonnet's Vorgange sehr leicht, beliebig viele und sogar *alle* reellen Minimalflächen zu finden. Hierzu stelle ich zunächst den folgenden, sozusagen evidenten Satz auf:

Satz 15. *Die zu einer beliebigen vorgelegten Minimalcurve gehörige imaginär-conjugirte Curve ist selbst eine Minimalcurve.*

Denn die neue Curve wird erhalten, wenn man in den Gleichungen der vorgelegten Minimalcurve $+i$ mit $-i$ vertauscht.

Seien

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalcurve, und seien

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau),$$

wo $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ die conjugirten Functionen der neuen Hülfsgrössen τ bezeichnen, die Gleichungen der conjugirten Minimalcurve. Ich betrachte die Minimalfläche

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau).$$

Setze ich in diesen Gleichungen, indem ich mit t_1 und t_2 beliebige *reelle* Grössen bezeichne,

$$t = t_1 + it_2,$$
$$\tau = t_1 - it_2,$$

so ist der entsprechende Punkt unserer Minimalfläche offenbar *reell*. Und indem man t_1 und t_2 successiv alle möglichen reellen Werthe giebt, erhält man ∞^2 reelle auf der Fläche gelegene Punkte, so dass die construirte Minimalfläche reell ist. Also:

Satz 16. *Lässt man in den allgemeinen Formeln einer Minimalfläche*

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau),$$

wo

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

ist, die Grössen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ die zu $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ conjugirten Functionen von τ bezeichnen, so ist die betreffende Minimalfläche immer reell.

12. Wir werden zeigen, dass die soeben entwickelte Methode *alle* reellen Minimalflächen liefert. Hierzu machen wir die folgenden Ueberlegungen.

Ich wähle eine beliebige *reelle* Fläche, die keine Minimalfläche zu sein braucht. Alle imaginären Punkte dieser Fläche ordnen sich paarweise als imaginär-conjugirt zusammen. Und dementsprechend ordnen sich auch alle auf der Fläche gelegenen Minimalcurven paarweise als conjugirt zusammen. Dies vorausgesetzt, werde ich die beiden durch einen *reellen* Punkt p der Fläche hindurchgehenden Minimalcurven betrachten. Vertausche ich die conjugirten Punkte der Fläche unter sich, so bleibt p ungeändert, und daher sind nur die beiden folgenden Fälle denkbar. Entweder bleiben die durch p gehenden Minimalcurven alle beide ungeändert, indem sie sich in sich transformiren, oder auch es vertauschen sich diese Curven unter einander. Ich werde zeigen, dass nur der letzte Fall eintreten kann. Wenn insbesondere die beiden durch p gehenden Minimalcurven Zweige einer *irreductiblen* Curve sind, so vertauschen sich, werde ich nachweisen, die beiden Zweige unter sich.

Lass uns in der That voraussetzen, dass ein solcher Zweig in sich selbst transformirt würde. Und seien xyz die Coordinaten des Punktes p, $x + dx + id\xi$, $y + dy + id\eta$, $z + dz + id\zeta$ Coordinaten eines benachbarten Punktes des betreffenden Zweiges. Nach unserer Voraussetzung wären dann $x + dx - id\xi$, $y + dy - id\eta$, $z + dz - id\zeta$

die Coordinaten eines gewissen Punktes desselben Zweiges. Es beständen daher drei Relationen der Form

$$dx + id\xi = (a + \alpha i)\,(dx - id\xi),$$
$$dy + id\eta = (a + \alpha i)\,(dy - id\eta),$$
$$dz + id\zeta = (a + \alpha i)\,(dz - id\zeta).$$

Setzte man hier

$$dx + id\xi = re^{fi},$$
$$dy + id\eta = \varrho e^{\varphi i},$$
$$dz + id\zeta = Re^{Fi},$$
$$a + i\alpha = Ae^{Bi},$$

so käme

$$re^{fi} = Ar\, e^{(B-f)i},$$
$$\varrho e^{\varphi i} = A\varrho\, e^{(B-\varphi)i},$$
$$Re^{Fi} = ARe^{(B-F)i},$$

woraus

$$A = 1,\quad f = B - f,$$
$$\varphi = B - \varphi,$$
$$F = B - F,$$

und also

$$f = \varphi = F = \tfrac{1}{2}B.$$

Also käme

$$dx + id\xi = re^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dy + id\eta = \varrho e^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dz + id\zeta = Re^{\frac{1}{2}Bi}$$

woraus

$$\frac{dx + id\xi}{r} = \frac{dy + id\eta}{\varrho} = \frac{dz + id\zeta}{R}$$

folgen würde. Nun aber ist

$$(dx + id\xi)^2 + (dy + id\eta)^2 + (dz + id\zeta)^2 = 0,$$

also käme

$$r^2 + \varrho^2 + R^2 = 0,$$

welche Gleichung jedoch *contradictorisch* ist, indem r, ϱ, R reelle Grössen sind, die nicht sämmtlich verschwinden dürfen. Hieraus folgt nun zunächst der Satz:

Satz 17. *Unter den imaginären Richtungen, die durch einen reellen Punkt hindurchgehen, und welche dabei den Kugelkreis treffen, giebt es keine, die sich selbst conjugirt ist.*

Hieraus fliesst unmittelbar

Satz 18. *Vertauscht man die conjugirten Punkte einer reellen Fläche unter sich, so vertauschen sich die beiden durch einen reellen Punkt der Fläche hindurchgehenden Minimalcurven.*

Wenden wir nun diesen Satz auf eine beliebige reelle Minimalfläche an, so ergiebt sich, dass die beiden durch einen reellen Punkt allgemeiner Lage hindurchgehenden Minimalcurven, die auf der Fläche gelegen sind, einander conjugirt sind. Und also ergiebt sich der Satz:

Satz 19. *Man erhält die allgemeinste reelle Minimalfläche, indem man, wie in Satz* 16. *geschehen, eine beliebige Minimalcurve*

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

mit der conjugirten Minimalcurve

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

verbindet und darnach die Minimalfläche

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau). \end{aligned}$$

bildet.

---

13. In der citirten Arbeit giebt Bonnet zugleich Methoden zur Auffindung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen. Dagegen behandelt er nicht die Frage nach der Bestimmung *aller* reellen algebraischen Minimalflächen. Erst Weierstrass hat eine erschöpfende Methode zur Bestimmung aller reellen algebraischen Minimalflächen gegeben.

Indem ich im Folgenden eine neue Behandlung des von Weierstrass erledigten Problems entwickele, erlaube ich mir die Aufmerksamkeit darauf zu richten, dass bei meiner Behandlung das betreffende Problem in mehrere Unterprobleme *zerlegt* wird. Zugleich hebe ich schon hier hervor, dass ich in entsprechender Weise dasselbe Problem für einige andere interessante partielle Differentialgleichungen 2. O. erledigt habe.

Ich bemerke zunächst, dass die (reelle oder imaginäre) Minimalfläche

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau) \end{aligned}$$

immer algebraisch ist, wenn die beiden Minimalcurven

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

algebraisch sind. Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass diese hinreichende Bedingung auch nothwendig ist. Denn sei überhaupt eine algebraische Minimalfläche vorgelegt. Ich construire den Tangentenkegel, dessen Spitze in einem beliebigen Punkte des Kugelkreises gelegen ist. Dieser Kegel ist algebraisch und folglich ist auch seine

Berührungscurve mit der vorgelegten Fläche algebraisch. Aber diese Berührungscurve zerfällt in Minimalcurven (die auf der Fläche gelegen sind), und zwar findet sich unter ihnen jedenfalls *eine* Minimalcurve jeder Schaar. Also schliessen wir, dass die auf einer algebraischen Minimalfläche gelegenen Minimalcurven sämmtlich algebraisch sind. Also ergiebt sich:

Satz 20. *Man erhält alle algebraischen Minimalflächen, indem man in der früher (Satz 6. und 7.) auseinandergesetzten Weise zwei beliebige algebraische Minimalcurven verbindet.*

Hiermit ist das vorliegende Problem darauf zurückgeführt, sämmtliche algebraische Minimalcurven aufzufinden. Und da dieses Hülfsproblem schon in Nummer 10., und dies sogar in zwei verschiedenen Weisen erledigt wurde, so ist die Frage nach allen algebraischen Minimalflächen erledigt.

Fragt man mit Weierstrass insbesondere nach allen *reellen* algebraischen Minimalflächen, so erhält man, indem man die Sätze 19. und 20. verbindet, unmittelbar die Anwort in der folgenden Form:

Satz 21. *Man erhält die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche, indem man eine beliebige algebraische Minimalcurve mit der conjugirten Minimalcurve in der früher (Satz 6. und 7.) auseinandergesetzten Weise verbindet.*

Wünscht man endlich die Bestimmung aller *reellen* algebraischen Minimalflächen eben in der von Weierstrass gegebenen Form zu erhalten, so braucht man nur Satz 14. mit dem vorangehenden Satze zu verbinden. Bezeichnet man dabei überhaupt den reellen Theil einer Function f mit $R(f)$, so ergiebt sich der folgende von Weierstrass herrührende Satz:

Satz 22. *Die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche wird dargestellt durch die Formeln*

$$x = R[(1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s)],$$
$$y = R[i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s)],$$
$$z = R[2sF''(s) - 2F'(s)],$$

in denen $F(s)$ eine beliebige algebraische Function von s bezeichmet.

Die vereinigten Sätze 20. und 21. leisten insofern mehr als Satz 22., weil sie *alle* algebraischen Minimalflächen, und nicht allein die *reellen* algebraischen Minimalflächen liefern.

§ 4.

Minimalflächen, deren Minimalcurven eine irreductible Schaar bilden.

Durch jeden Punkt einer Minimalfläche, die keine imaginäre Developpable ist, gehen *zwei* Minimalcurven, die im Allgemeinen zwei

verschiedenen Schaaren angehören. Ausnahmsweise kann es jedoch eintreten, dass sämmtliche Minimalcurven einer Minimalfläche eine irreductible Schaar bilden, welche dabei die Fläche zweifach bedeckt. Solche Minimalflächen nenne ich *Doppelflächen.*

14. Es ist leicht die allgemeinen Gleichungen aller Minimalflächen, die Doppelflächen sind, anzugeben. Seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t) \tag{1}$$

die Gleichungen einer beliebiger Minimalcurve. Alsdann sind

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

die Gleichungen einer Minimalfläche, deren *sämmtliche* Minimalcurven mit der vorgelegten Minimalcurve congruent und gleichgestellt sind. Und da die beiden Gleichungssysteme

$$x = A(a) + A(\tau),$$
$$y = B(a) + B(\tau), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(a) + C(\tau),$$

und

$$x = A(t) + A(a),$$
$$y = B(t) + B(a), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(t) + C(a),$$

dieselbe Minimalcurve darstellen, so bilden die auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurven eine *irreductible* Schaar, sodass unsere Minimalfläche eine Doppelfläche ist.

Es ist andererseits klar, dass hiermit die allgemeinen Gleichungen aller Doppelflächen gefunden sind. Denn da eine allgemeine Minimalfläche bestimmt ist, wenn auf derselben *eine* Minimalcurve *aus jeder Schaar* gegeben ist, so ist eine Doppelfläche bestimmt, wenn nur eine einzige auf derselben gelegene Minimalcurve vorgelegt ist. Also:

Satz 23. *Alle Minimalflächen, die Doppelflächen sind, werden definirt durch die Gleichungen*

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau), \tag{2}$$
$$z = C(t) + C(\tau),$$

vorausgesetzt, dass

$$x = A(t), \qquad y = B(t), \qquad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalcurve sind.

Zu bemerken ist, dass die Parameterwerthe

$$t = a, \qquad \tau = b$$

denselben Punkt wie die Werthe

$$t = b, \quad \tau = a$$

liefern.

15. Im Allgemeinen ist die durch die Formeln (2) gelieferte Doppelfläche imaginär, und es stellt sich daher die neue Aufgabe, alle *reelle* Minimalflächen zu finden, die Doppelflächen sind.

Seien

$$(3) \qquad x + \xi i, \qquad y + \eta i, \qquad z + \zeta i$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer *reellen Doppelfläche.* Alsdann gehört auch der conjugirte Punkt

$$(4) \qquad x - \xi i, \qquad y - \eta i, \qquad z - \zeta i$$

unserer Fläche an. Wenn der erste Punkt eine Minimalcurve durchläuft, so beschreibt der conjugirte Punkt die conjugirte Minimalcurve. Sollen nun sämmtliche Minimalcurven unserer Fläche eine irreductible Schaar bilden, *so muss eine jede Minimalcurve durch eine gewisse Translationsbewegung in die conjugirte Minimalcurve übergehen können.* Man kann daher in diesem Falle solche Constanten

$$a + \alpha i, \qquad b + \beta i, \qquad c + \gamma i$$

wählen, dass der Punkt

$$x + a + (\alpha - \xi) i, \qquad y + b + (\beta - \eta) i, \qquad z + c + (\gamma - \zeta) i,$$

derselben Minimalcurve, wie der Punkt (3) angehört. Also:

Satz 24. *Bilden die Minimalcurven einer reellen Minimalfläche eine irreductible Schaar, so ist es, wenn wir mit*

$$x + \xi i, \qquad y + \eta i, \qquad z + \zeta i$$

die Coordinaten eines variablen Punktes einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve bezeichnen, immer möglich solche Constanten $a + \alpha i$, $b + \beta i$, $c + \gamma i$ *zu wählen, dass der variable Punkt*

$$x + a + (\alpha - \xi) i, \quad y + b + (\beta - \eta) i, \quad z + c + (\gamma - \zeta) i$$

der vorgelegten Minimalcurve ebenfalls angehört.

Indem wir auf den neuen Punkt unserer Minimalcurve nochmals dieselbe Operation anwenden, erkennen wir, dass auch der Punkt mit den Coordinaten

$$x + 2a + \xi i, \qquad y + 2b + \eta i, \qquad z + 2c + \zeta i$$

unserer Minimalcurve angehört. Und durch $2m$-malige Wiederholung derselben Operation erkennt man, dass jeder Punkt mit den Coordinaten

$$(5) \qquad x + 2ma + \xi i, \qquad y + 2mb + \eta i, \qquad z + 2mc + \zeta i,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, unserer Curve angehört.

Sind nun a, b, c nicht sämmtlich gleich Null, so bestimmen die

Coordinatenwerthe (5) *unendlich viele* Punkte, die unsere Minimalcurve mit der Geraden

$$\frac{x' - (x + \xi i)}{a} = \frac{y' - (y + \eta i)}{b} = \frac{z' - (z + \zeta i)}{c}$$

gemein hat. Also ist die Curve *transcendent*, und folglich ist auch die zugehörige reelle Minimalfläche transcendent.

In dem vorliegenden Falle können wir bemerken, dass unsere Minimalcurve die Translationsbewegung

$$\Delta x = a, \quad \Delta y = b, \quad \Delta z = c$$

gestattet. Folglich gestatten sämmtliche Minimalcurven dieselbe Bewegung, sodass die Fläche periodisch*) ist. Also:

Satz 25. *Wenn die Grössen a b c nicht sämmtlich gleich Null sind, so ist unsere Doppelfläche periodisch und also transcendent***).

16. Soll also eine Doppelfläche algebraisch sein, so muss

$$a = b = c = 0$$

sein. In diesem Falle entspricht jedem Punkte

$$x + \xi i, \quad y + \eta i, \quad z + \zeta i$$

einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve ein anderer Punkt

$$x + (\alpha - \xi) i, \quad y + (\beta - \eta) i, \quad z + (\gamma - \zeta) i$$

derselben Minimalcurve. Man führe die Translationsbewegung

$$\Delta x = -\frac{\alpha}{2} i, \quad \Delta y = -\frac{\beta}{2} i, \quad \Delta z = -\frac{\gamma}{2} i$$

auf unsere Curve aus. Hierdurch erhalten wir eine neue Minimalcurve, auf der jedem Punkte

$$x + \left(\xi - \frac{\alpha}{2}\right) i, \quad y + \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right) i, \quad z + \left(\zeta - \frac{\gamma}{2}\right) i$$

der conjugirte Punkt

$$x - \left(\xi - \frac{\alpha}{2}\right) i, \quad y - \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right) i, \quad z - \left(\zeta - \frac{\gamma}{2}\right) i$$

zugeordnet ist. Daher ist die neue Curve sich selbst conjugirt. Also:

Satz 26. *Jede Minimalcurve einer reellen algebraischen Doppel-*

---

*) Hier möge angeführt sein, dass eine jede Periode einer Minimalfläche ihren Grund in einer Periode der Minimalcurven der einen Schaar hat. Aehnliche Sätze gelten für reelle algebraische Minimalflächen, die überhaupt eine Gruppe linearer Transformationen gestatten, bei denen der Kugelkreis invariant bleibt.

**) Als Beispiel für periodische Doppelflächen möge die Schraubenfläche angeführt sein. Ein zweites Beispiel ist die Fläche, deren Haupttangentencurven sich auf die Kugel als confocale sphärische Kegelschnitte abbilden. Diese beiden Flächen sind dadurch bemerkenswerth, dass sie gleichzeitig hinsichtlich einfach unendlich vieler Kegelschnitte Minimalflächen sind.

fläche kann durch eine zweckmässige Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve übergeführt werden.

Wir können auch den noch allgemeineren Satz aussprechen:

Satz 27. *Jede Minimalcurve einer nicht periodischen Doppelfläche geht durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve über.*

Sei anderseits eine beliebige sich selbst conjugirte Minimalcurve vorgelegt:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t),$$

und lass mich voraussetzen, dass die Parameterwerthe

$$t = \lambda + \mu i, \quad t = \nu + \varrho i$$

zwei conjugirte Punkte geben. Gebe ich dann in den Gleichungen

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

den Grössen t und τ die Werthe

$$t = \lambda + \mu i, \quad \tau = \nu + \varrho i,$$

so ist der hervorgehende Punkt reell. Die erhaltene Doppelfläche ist daher auch reell. Also:

Satz 28. *Eine sich selbst conjugirte Minimalcurve liefert immer eine reelle Doppelfläche.*

17. In der vorangehenden Nummer reducirten wir das Problem, alle reellen algebraischen Doppelflächen zu finden, auf die Bestimmung aller sich selbst conjugirten algebraischen Minimalcurven. Es ist aber leicht das letzte Problem zu erledigen. Man nehme in der That eine beliebige *reelle* Gleichung zwischen den Ebenencoordinaten t, u, v,

$$f(tuv) = 0,$$

und füge die Gleichung des Kugelkreises hinzu

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen eine sich selbst conjugirte Developpable, deren Rückkehrkante eine sich selbst conjugirte Minimalcurve ist. Allerdings ist es hierbei denkbar, dass die Developpable und in Folge dessen auch die Rückkehrkante in Theile zerfällt, die paarweise einander conjugirt sind. Doch ist es klar, dass ein solches Zerfallen nur ausnahmsweise eintritt.

Auf der anderen Seite ist klar, dass alle sich selbst conjugirten Minimalcurven in dieser Weise erhalten werden; denn *in Ebenencoordinaten* wird eine solche Curve eo ipso durch die Gleichung

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

zusammen mit einer anderen reellen Gleichung zwischen t, u, v dargestellt. Also ergiebt sich :

Satz 29. *Um alle*) reellen algebraischen Doppelflächen zu finden verfährt man folgendermassen. Zu der Gleichung des Kugelkreises in Ebenencoordinaten*

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

fügt man eine beliebige reelle algebraische Relation zwischen t, u, v hinzu:

$$f(t, u, v) = 0.$$

Ist die hierdurch bestimmte Minimalcurve

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s)$$

irreductibel, so bestimmen die Gleichungen

$$x = RA(s), \quad y = RB(s), \quad z = RC(s)$$

eine reelle algebraische Minimalfläche, die eine Doppelfläche ist.

Nimmt man z. B. einen reellen Kegelschnitt, und sucht die um diesen Kegelschnitt und den imaginären Kugelkreis umgeschriebene Developpable, so erhält man bekanntlich eine sich selbst conjugirte Developpable achter Ordnung, deren Rückkehrkante eine sich selbst conjugirte Minimalcurve zwölfter Ordnung ist. Die zugehörige Minimalfläche, die Herr Henneberg**) zuerst betrachtet hat, ist eine Doppelfläche. Besonders interessant ist der ebenso von Herrn Henneberg betrachtete Fall, dass der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel ist. Mit diesen beiden Flächen werde ich mich sowohl in dieser wie in meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen beschäftigen.

§ 5.

Bestimmung der Classe einer Minimalfläche.

Da eine Minimalfläche durch die auf derselben gelegenen Minimalcurven bestimmt ist, stellt sich die allgemeine Aufgabe, die charakteristischen Zahlen einer algebraischen Minimalfläche z. B. ihre Classe, Ordnung u. s. w. zu bestimmen, wenn die betreffenden Minimalcurven bekannt sind.

In diesem Paragraphen entwickele ich eine äusserst einfache Formel zur Bestimmung der Classe einer beliebigen algebraischen Minimalfläche. Diese Formel ist jedoch verschieden, jenachdem die Fläche eine Doppelfläche ist, oder nicht. Wir betrachten daher diese beiden Fälle für sich.

---

*) Dieser Satz ist deswegen bemerkenswerth, weil derselbe nicht gültig bleibt, wenn man das Wort „*algebraisch*“ weglässt.

**) Bei Henneberg werden die besprochenen Minimalflächen dadurch definirt, dass sie die Evolute eines Kegelschnitts als geodätische Curve enthalten.

18. Wir wollen zunächst solche Minimalflächen betrachten, die keine Doppelflächen sind, also solche Minimalflächen, die zwei verschiedene Schaaren von Minimalcurven enthalten. Sei K eine Curve der einen Schaar, K' eine Curve der zweiten Schaar. Sei R und R' der Rang dieser Curven; M und M' die Multiplicität des Kugelkreises auf den zugehörigen Developpablen. Ich werde zeigen, dass die Classe der Fläche durch die Formel

$$M'(R-M)+M(R'-M')$$

ausgedrückt wird.

Zunächst zeige ich, dass jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in $M+M'$ Kegel zerfällt. Durch einen Punkt π des Kugelkreises gehen nämlich M Tangenten an die Curve K. Jede solche Tangente gehört einem Kegel an, der die Fläche nach einer Curve von der Schaar K' berührt. Ich behaupte, dass keine zwei unter diesen Tangenten die Fläche in Punkten *derselben* Curve K' berühren können. Wäre nämlich dies allgemein der Fall, so müsste die Curve K' durch eine endliche Translationsbewegung in sich selbst übergehen können, sodass K' *periodisch* und also transcendent sein würde. Daher giebt es M verschiedene Tangentenkegel, deren Spitze in π liegt, welche nach Curven K' berühren. Dem entsprechend giebt es M' Tangentenkegel, deren Spitzen in π liegen, welche nach Curven K berühren. Und da jede durch π gehende Tangente entweder eine Curve K oder eine Curve K' berührt, ergiebt sich der Satz:

Satz 30. *Jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, zerfällt in M Kegel, die die Fläche nach Curven K', und M' Kegel, die nach Curven K berühren.*

Die Kegel, die nach Curven K' berühren, sind von der Classe $R'-M'$. Ebenso sind die Kegel, die nach Curven K berühren, von der Classe $R-M$. Also ist die Classe des gesammten Tangentenkegels, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist, gleich

$$M(R'-M')+M'(R-M).$$

Diese Zahl ist somit die Classe der Fläche. Also:

Satz 31. *Die Classe einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, wird gegeben durch die Formel*

$$M'(R-M)+M(R'-M');$$

R ist der Rang einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve, M ist die Multiplicität des Kugelkreises auf der zugehörigen Developpabeln; R' und M' sind die entsprechenden Zahlen einer Minimalcurve der zweiten Schaar.

Ist insbesondere die betreffende Fläche reell, so ist

$$R=R', \qquad M=M',$$

und also ergiebt sich:

Satz 32. *Die Classe einer reellen Minimalfläche ist gleich* $2M(R-M)$, *vorausgesetzt, dass die Fläche keine Doppelfläche ist.*

Wünscht man die Classe einer Doppelfläche zu bestimmen, so verfährt man in entsprechender Weise. Ist R der Rang einer allgemeinen auf der Fläche gelegenen Minimalcurve, M die Multiplicität des Kugelkreises auf der betreffenden Developpablen, so erkennt man, dass der Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in M Kegel zerfällt, unter denen jeder nach einer Minimalcurve berührt. In Folge dessen ist die Classe eines jeden solchen Kegels gleich $R-M$. Also ist die Classe des gesammten Tangentenkegels gleich $M(R-M.)$ Daher:

Satz 33. *Die Classe einer Minimalfläche, deren Minimalcurven eine irreductible Schaar bilden, ist gleich* $M(R-M)$*).

Diese letzte Formel gilt für *alle* Doppelflächen, sowohl die reellen wie die imaginären.

---

20. Transformirt man eine Minimalcurve durch reciproke Radien**), so erhält man bekanntlich eine neue Minimalcurve. Insbesondere geht eine Minimalgerade in eine ebensolche Gerade über.

Hieraus lassen sich leicht Schlüsse ziehen, die für die Theorie der algebraischen Minimalflächen wichtig sind. Zunächst zeige ich, dass die Zahl $R-M$ bei der besprochenen Transformation invariant bleibt.

Bei der Transformation geht nämlich die Developpable einer Minimalcurve in die Developpable einer ebensolchen Curve über. Die vorgelegte Developpable wird von einer Minimalgeraden allgemeiner Lage in $R-M$ Punkten geschnitten. Also wird auch die neue Developpable von einer jeden Minimalgeraden allgemeiner Lage in ebensovielen Punkten geschnitten. Und also kommt:

Satz 34. *Transformirt man eine Minimalcurve durch reciproke Radien, so bleibt die Zahl* $R-M$ *invariant.*

Durch analoge Betrachtungen werden wir jetzt einen Minimalwerth der Zahl $R-M$ herleiten. Die Developpable einer vorgelegten Minimalcurve schneiden wir mit einem Kreise, der die Curve in einem gewissen Punkte π trifft, sonst aber eine allgemeine Lage besitzt. Sodann führen wir eine Transformation durch reciproke Radien aus, indem wir den Punkt π zum Pol der Transformation wählen. Hierdurch geht der Kreis über in eine Gerade allgemeiner Lage, welche die Developpable der neuen Minimalcurve in R'' Punkten trifft, voraus-

---

*) Selbstverständlicherweise sehen wir hier, wie gewöhnlich, von den imaginären Developpablen, die den Kugelkreis enthalten, ab.

**) Man vergleiche z. B. Darboux: Sur une classe remarquable de courbes etc.

gesetzt, dass R'' den Rang der neuen Minimalcurve bezeichnet. Folglich ist R'' gleich der Zahl der Schnittpunkte der ursprünglichen Developpablen mit dem besprochenen Kreise, minus der Zahl dieser Schnittpunkte, die entweder im Punkte π oder unendlich entfernt liegen. Das heisst, es ist

$$R'' = 2(R - M) - \omega,$$

wo ω die Zahl der im Punkte π vereinigten Schnittpunkte bezeichnet. Und da diese Zahl gleich 2 ist, wenn π kein singulärer Punkt der vorgelegten Minimalcurve ist, so können wir setzen

$$R'' = 2(R - M) - 2.$$

Wäre nun $R - M$ kleiner als 3, so ergäbe sich für R'' ein kleinerer Werth als 4. Es giebt aber keine Curve, deren Rang kleiner als 4 ist. Also:

Satz 35. *Die Zahl $R - M$ ist gleich oder grösser als* 3.

[Später werden wir zeigen, dass $R - M$ entweder gleich oder auch grösser als M ist.]

21. Die obenstehenden Entwickelungen führen zu einer einfachen Bestimmung der niedrigsten Classenzahl einer Minimalfläche. Dabei sehen wir von der Ebene und den imaginären Developpablen ab.

Es folgt zunächst aus den Sätzen 31., 32. und 35., dass die Classe einer reellen oder imaginären Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, nicht kleiner als 6 sein kann.

Dagegen kann die Classe einer Doppelfläche gleich 3 sein. Die Hypothese

$$M(R - M) = 3$$

giebt nämlich

$$M = 1, \quad R = 4$$

und es giebt bekanntlich eine Minimalcurve 3. O., deren Rang gleich 4 ist, und welche dabei den Kugelkreis als *einfachen* Kegelschnitt enthält. Also:

Satz 36. *Es giebt eine Minimalfläche dritter Classe.**)

Es fragt sich, ob es *reelle* Minimalflächen dritter Classe giebt. Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir, dass eine jede Minimalcurve einer reellen algebraischen Doppelfläche durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve übergehen kann. Hieraus aber fliesst der Hülfssatz:

Satz 37. *Eine Minimalcurve allgemeiner Lage einer reellen Doppelfläche trifft den Kugelkreis in einer graden Anzahl von Punkten, die paarweise conjugirt sind.*

*) Diese Fläche ist, wie ich beiläufig bemerke, eine Cayley'sche Linienfläche 3. Ordnung.

Und da eine Minimalcurve dritter Ordnung den Kugelkreis nur in *einem* Punkte trifft, folgt:

Satz 38. *Es giebt keine reelle Minimalfläche dritter Classe.*

Um alle Minimalflächen 4ter Classe zu finden, setzt man

$$M(R-M)=4,$$

woraus

$$M=1, \quad R=5.$$

Es giebt bekanntlich eine Minimalcurve vierter Ordnung, deren Rang 5 ist, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Also existirt eine Minimalfläche 4ter Classe. Da indess die besprochene Minimalcurve den Kugelkreis nur in *einem* Punkte trifft, so giebt es keine reelle Minimalfläche vierter Classe. Also:

Satz 39. *Es giebt eine Minimalfläche vierter Classe, welche jedoch immer imaginär ist.*

Und da es nach Herrn Hennebergs schönen Untersuchungen eine reelle Minimalfläche 5ter Classe giebt, so folgt*):

Satz 40. *Die niedrigste Classenzahl der reellen Minimalflächen ist* 5.

Wie man sieht, sind alle Minimalflächen fünfter Classe bestimmt durch die Gleichung

$$M(R-M)=5,$$

woraus

$$M=1, \quad R=6.$$

In späteren Paragraphen dieser Abhandlung werde ich mich mehr eingehend mit der Bestimmung aller Minimalflächen von gegebener Classe beschäftigen. Es gelingt mir u. A. alle *reellen Minimalflächen anzugeben, deren Classe gleich einer beliebigen vorgelegten Primzahl ist.*

§ 6.

Die Ordnung einer algebraischen Minimalfläche.

Ich stelle mir jetzt die Aufgabe, die Ordnung einer vorgelegten algebraischen Minimalfläche

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= A(t)+A_1(\tau), \\ y &= B(t)+B_1(\tau), \\ z &= C(t)+C_1(\tau) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Ich werde eine allgemeine Methode zur Erledigung dieses Problems entwickeln. Dabei bemerke ich, dass diese Methode sich überhaupt auf alle Flächen, deren Gleichungen die Form (1) besitzen, anwenden lässt.

*) Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen dieser Abhandlung.

22. Ich schneide die vorgelegte Minimalfläche, deren Minimalcurven *zwei* verschiedene Schaaren bilden mögen, mit einer Geraden, die durch den gegebenen Punkt

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

hindurchgeht, und welche dabei die Richtungscosinus α, β, γ besitzt. Die Gleichungen dieser Geraden sind

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha\varrho, \\ y &= b + \beta\varrho, \\ z &= c + \gamma\varrho, \end{aligned} \tag{2}$$

wo ϱ die Distanz des laufenden Punktes x, y, z von dem festen Punkte a, b, c bezeichnet. Ich setze voraus, dass die Constanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ *allgemeine* Werthe haben. In Folge dessen kann ich annehmen, dass sämmtliche Schnittpunkte zwischen der Fläche (1) und der Geraden (2) *verschieden* sind und dabei *endliche* Coordinatenwerthe haben. Ich nehme ferner an, dass die Gerade (2) nicht eine solche Lage besitzt, dass zwei unter ihren Schnittpunkten mit der Fläche demselben Werthsysteme t, τ entsprechen. Ich setze endlich voraus, dass die Gerade (2) auch nicht eine solche Lage besitzt, dass ein Schnittpunkt zu einem solchen Werthsysteme t, τ gehört, für welches eine unter den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich wird.

Nach diesen Festsetzungen ist die Ordnung der Fläche gleich der Zahl der Werthsysteme t, τ, ϱ, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} A(t) + A_1(\tau) &= a + \alpha\varrho, \\ B(t) + B_1(\tau) &= b + \beta\varrho, \\ C(t) + C_1(\tau) &= c + \gamma\varrho \end{aligned} \tag{3}$$

erfüllen, ohne eine oder mehrere unter den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich zu machen.

Wir schreiben die Gleichungen (3) folgendermassen

$$\begin{aligned} A(t) - a &= \alpha\varrho - A_1(\tau), \\ B(t) - b &= \beta\varrho - B_1(\tau), \\ C(t) - c &= \gamma\varrho - C_1(\tau), \end{aligned} \tag{4}$$

und ersetzen sie darnach, indem wir 3 Hülfsgrössen x', y', z' einführen, durch die 6 äquivalenten Gleichungen

$$x' = A(t) - a, \qquad y' = B(t) - b, \qquad z' = C(t) - c. \tag{5}$$

$$x' = \alpha\varrho - A_1(\tau), \quad y' = \beta\varrho - B_1(\tau), \quad z' = \gamma\varrho - C_1(\tau). \tag{6}$$

Die drei Gleichungen (5) bestimmen eine Minimalcurve, die mit den Minimalcurven der einen Schaar unserer Fläche congruent und gleichgestellt ist. Die drei Gleichungen (6) bestimmen eine Cylinderfläche,

deren Erzeugenden die Richtungscosinus α, β, γ besitzen, und welche dabei die Minimalcurve

$$x' = -A_1(\tau), \quad y' = -B_1(\tau), \quad z' = -C_1(\tau)$$

enthält. Hiernach ist der folgende Satz gefunden:

Satz 41. *Die Ordnung der Fläche* (1) *ist gleich der Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Curve* (5) *und der Cylinderfläche* (6). *Vorausgesetzt ist dabei, dass die Grössen a, b, c, α, β, γ allgemeine Werthe haben*).*

Ist nun die Curve (5) von der Ordnung m, und die Curve

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

und also auch die Curve

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau)$$

von der Ordnung m_1, so schneidet die Curve (5) die Cylinderfläche (6) in mm_1 Punkten. Liegen dieselben sämmtlich im endlichen Raume, so ist die Ordnung der Fläche (1) gleich mm_1. Liegen dagegen einige unter diesen Punkten, etwa ω, unendlich entfernt, so ist die Ordnung der Minimalfläche gleich $mm_1 - \omega$. Also:

Satz 42. *Erzeugen zwei algebraische Minimalcurven, deren Ordnung bezüglich gleich m und m_1 sein mögen, eine Minimalfläche, so lässt sich die Ordnung dieser Fläche durch $mm_1 - \omega$ ausdrücken. Hierbei ist ω eine positive Zahl, die nur vom Verhalten der beiden vorgelegten Minimalcurven im Unendlichen abhängt.*

Haben insbesondere unsere beiden Minimalcurven keinen gemeinsamen unendlich entfernten Punkt, so ist ω gleich Null, so dass die Ordnung der Fläche gleich mm_1 ist.

Ist unsere Minimalfläche insbesondere reell, so ist, da zwei conjugirte Minimalcurven dieselbe Ordnung haben, m gleich m_1. Setzen wir voraus, dass unter den unendlich entfernten Punkten einer Minimalcurve unserer Fläche sich keine solche finden, die zu einander conjugirt sind, so ist ω gleich Null, indem unsere Minimalcurve keinen unendlich entfernten Punkt mit der conjugirten Curve gemein hat. Also:

Satz 43. *Erzeugt eine Minimalcurve von der Ordnung m eine*

---

*) Man könnte sich von vorneherein denken, dass ein im endlichen Raume gelegener Schnittpunkt x' y' z' zwischen der Curve (5) und der Cylinderfläche einem Werthsystem t, τ entspräche, für welches eine der Grössen $A_1\tau$, $B_1\tau$, $C_1\tau$ und also auch ϱ unendlich wäre. Dann aber beständen für diesen Werth von τ die Relationen

$$\frac{A_1\tau}{\alpha} = \frac{B_1\tau}{\beta} = \frac{C_1\tau}{\gamma},$$

und das ist unmöglich, da α, β, γ *allgemeine* Constanten sind.

reelle Minimalfläche, die jedoch keine Doppelfläche ist, so ist die Ordnung dieser Fläche gleich $m^2 - \omega$. Die Zahl ω ist gleich Null, wenn die Minimalcurve keine conjugirte, unendlich entfernte Punkte besitzt; dagegen grösser als Null, wenn die Curve solche Punkte enthält.

23. Es fragt sich, wie man in jedem einzelnen Falle die Zahl ω, das heisst die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte der Curve (5) mit dem Cylinder (6) bestimmt.

Um dies zu beantworten, ersetzen wir die Curve (5) durch einen hindurchgehenden Cylinder, dessen Erzeugenden, wie diejenigen des Cylinders (6), die Richtungscosinus α, β, γ besitzen. Die Zahl ω ist gleich der Anzahl derjenigen gemeinsamen Erzeugenden dieser beiden Cylinder, die in der unendlich entfernten Ebene liegen. Hierbei ist zu bemerken, dass der Cylinder (6), nachdem die Constanten α, β, γ gewählt sind, eine bestimmte Lage besitzt, während der neue Cylinder wegen der unbestimmten Parameter a, b, c zweifach unendlich viele Lagen besitzen kann. Diese Lagen gehen aus einer bestimmten solchen Lage durch Anwendung aller Translationen des Raumes hervor. Indem wir sowohl den festen wie den variablen Cylinder durch ihre Schnittcurven mit einer festen Ebene ersetzen, erhalten wir den Satz:

Satz 44. *Die Zahl ω ist gleich der Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Curve mit einer variablen Curve derselben Ebene, auf die alle möglichen Translationen, welche diese Ebene invariant lassen, ausgeführt werden.*

Es ist leicht den letzten Satz durch ein analytisches Raisonnement herzuleiten. Die Gleichungen (4) geben durch Elimination von ϱ

$$(7)\qquad \begin{aligned} \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b) &= -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)], \\ \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c) &= -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)], \end{aligned}$$

und da jedes Werthsystem t, τ, welches diese beiden Gleichungen befriedigt, und dabei den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ endliche Werthe ertheilt, durch Einsetzung in (4) zugleich der Grösse ϱ einen endlichen Werth giebt, so ist die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl derjenigen Werthsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) erfüllen, und dabei keine unter den Grössen $A(t) \cdots C_1(\tau)$ unendlich machen.

Da nun die Parameter α, β, γ *allgemeine* Werthe haben sollen, so können wir annehmen, indem wir mit t_∞ einen Werth von t bezeichnen, der eine der Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ unendlich macht, dass die Gleichungen

$$\frac{A(t_\infty)}{\alpha} = \frac{B(t_\infty)}{\beta} = \frac{C(t_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen, und ebenso, indem wir mit τ_∞ einen Werth von τ be-

zeichnen, der eine der Grössen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich macht, dass die Gleichungen

$$\frac{A_1(\tau_\infty)}{\alpha} = \frac{B_1(\tau_\infty)}{\beta} = \frac{C_1(\tau_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen.

In Folge dessen ist die Ordnung der Fläche zugleich die Anzahl derjenigen Werthsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) *erfüllen, und dabei keine unter den Grössen*

$$\beta A(t) - \alpha B(t), \quad \gamma A(t) - \alpha C(t),$$
$$\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau), \quad \gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)$$

unendlich machen.

Betrachten wir daher die beiden Curven

$$x' = \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b),$$
$$y' = \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c),$$

und

$$x'' = -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)],$$
$$y'' = -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)],$$

so ist, können wir sagen, die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl der nicht unendlich entfernten Schnittpunkte unserer beiden Curven*).

24. Handelt es sich darum die Ordnung einer *Doppelfläche*

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

zu bestimmen, so muss man sich erinnern, dass die beiden Werthsysteme

$$t = a, \quad \tau = b,$$
$$t = b, \quad \tau = a$$

denselben Punkt unserer Fläche liefern. Daher sind die Schnittpunkte der Fläche mit den Geraden

$$x = a + \alpha\varrho,$$
$$y = b + \beta\varrho,$$
$$z = c + \gamma\varrho$$

allerdings wie im allgemeinen Falle durch die Gleichungen

$$A(t) + A(\tau) = a + \alpha\varrho,$$
$$B(t) + B(\tau) = b + \beta\varrho,$$
$$C(t) + C(\tau) = c + \gamma\varrho$$

---

*) Diese beiden Curven sind, wie man sieht, Projectionen der beiden Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau).$$

bestimmt; aber man hat jetzt zu beachten, dass je *zwei* Werthsysteme t, τ, welche diese Gleichungen erfüllen und dabei keine unter den Grössen $A(t) \cdots C(\tau)$ unendlich machen, demselben Schnittpunkte zwischen der Fläche und der Geraden entsprechen. Die in den früheren Entwickelungen als Ordnungszahl gefundene Zahl ist daher jetzt durch 2 zu dividiren. Also:

Satz 45. *Erzeugt eine Minimalfläche der m^{ten} Ordnung eine Doppelfläche, so ist die Ordnung dieser Fläche $\frac{1}{2}(m^2 - \omega)$, wo ω nach den früheren Regeln bestimmt wird.*

Dieser Satz gilt für alle Doppelflächen, sowohl die reellen wie die imaginären.

§ 7.

Bestimmung der Zahl ω.

25. Ich werde jetzt zeigen, wie man die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen Curve mit einer variablen Curve, auf die successiv alle möglichen Translationen ausgeführt werden, bestimmen kann. Hierzu brauche ich einen bekannten Satz über die Schnittpunkte zweier algebraischen Curven*).

„*Seien $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ drei gerade Linien einer Ebene, und sei $t = 0$, $x = 0$ ein gemeinsamer Schnittpunkt zweier Curven. Ich setze*

$$\frac{t}{y} = \tau, \quad \frac{x}{y} = \xi,$$

und suche für jede Curve die Reihenentwickelung von τ nach den wachsenden Potenzen von ξ. Seien

$$\tau = A_0 \xi^{\frac{p}{q}} + A_1 \xi^{\frac{p+1}{q}} + \cdots + A_\varkappa \xi^{\frac{p+\varkappa}{q}} + \cdots,$$

$$\tau' = B_0 \xi^{\frac{r}{s}} + B_1 \xi^{\frac{r+1}{s}} + \cdots + B_i \xi^{\frac{r+i}{s}} + \cdots$$

diese Entwickelungen.

Es wird vorausgesetzt, dass die Exponenten $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ gleich oder grösser als 1 sind, sodass die Gerade $x = 0$ keine Tangente unserer Curven ist. Man bildet die Differenz $\tau - \tau'$, die $q\,s$ verschiedene Functionen von ξ darstellt. Bezeichnet man nun mit

$$\delta(\tau - \tau')$$

die Ordnung der infinitesimalen Grösse $\tau - \tau'$, aufgefasst als Function von ξ, so ist die Summe

*) Vergleiche Halphen, Bulletin de la Société mathématique, 1873. Im Jahre 1869 theilte Weierstrass mir in einem Gespräche denselben Satz mit.

$$\sum \delta(\tau - \tau')$$

eben die Anzahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Curven."

Ist insbesondere $\frac{p}{q} \gtrless \frac{r}{s}$, z. B.

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

so ist $\delta(\tau - \tau') = \frac{p}{q}$, und

$$\sum \delta(\tau - \tau') = ps,$$

so dass ps die Zahl der vereinigten Schnittpunkte ist. Ist dagegen

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

und ist dabei ε ein Maximumswerth der Grösse $\delta(\tau - \tau')$, so ist offenbar

$$\varepsilon q s$$

ein Maximumswerth für die Zahl der vereinigten Schnittpunkte.

Hat die eine oder beide Curven mehrere derartige Entwickelungen, so verbindet man jede Entwickelung der einen Curve mit jeder Entwickelung der zweiten Curve und summirt die hierdurch erhaltenen Zahlen.

26. Diese bekannte Theorie werden wir jetzt auf das im Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem anwenden.

Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Gerade, und sei $x = 0$, $t = 0$ ein gemeinsamer Punkt der festen und der beweglichen Curve. Dabei nehmen wir an, dass unsere Curven nicht von der Geraden $x = 0$ berührt werden. Sei

$$\tau = \sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} \tag{8}$$

die Reihenentwicklung eines Zweiges der festen Curve, und sei

$$\tau = \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}} \tag{9}$$

die Reihenentwickelung eines Zweiges der beweglichen Curve. Ist nun z. B.

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

so ist nach dem Vorangehenden die Zahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer Curve gleich

$$\Sigma ps,$$

wo das Summationszeichen sich darauf bezieht, dass jede Entwickelung der einen Curve mit jeder Entwickelung der zweiten Curve verbunden werden soll.

Ist dagegen

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},^{*})$$

so muss man in jedem einzelnen Falle eine gewisse Anzahl Glieder der Reihenentwickelungen (8) und (9) wirklich aufstellen und sodann die Formel

$$\Sigma\Sigma\delta(\tau - \tau')$$

anwenden. *Hierbei tritt, wie wir sogleich zeigen werden, der merkwürdige Umstand ein, dass man einen Maximalwerth der gesuchten Zahl a priori angeben kann.* Diess liegt darin, dass die Grössen B_i *variable* Parameter sind, indem die Entwickelung (9) eine variable Curve darstellt.

Seien $B_0' \ldots B_i' \ldots$ die Werthe dieser Parameter, die einer bestimmten Lage unserer beweglichen Curve entsprechen, und sei

$$\tau = \sum B_i' \xi^{\frac{r+i}{s}}$$

oder

$$\frac{t}{y} = \sum B_i' \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

die entsprechende Entwickelung. Setzt man hier, indem man mit a und b unbestimmte Parameter bezeichnet, statt x und y bezüglich $x + at$, $y + bt$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{t}{y+bt} = \sum B_i' \left(\frac{x+at}{y+bt}\right)^{\frac{r+i}{s}},$$

welche die allgemeine Lage unserer beweglichen Curve darstellt. Indem wir diese Entwickelung nach den gewöhnlichen Regeln auf die Form

$$\frac{t}{y} = \sum B_i \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

bringen, erkennen wir, dass

$$B_0 = B_0', \quad B_1 = B_1' \ldots, \quad B_{r-s-1} = B'_{r-s-1}$$

sind; dagegen ist

$$B_{r-s} = B'_{r-s} + \frac{ar}{s} B_0'^2,$$

so dass B_{r-s} und B'_{r-s}, für einen allgemeinen Werth von a, verschieden sind.

Hieraus geht hervor, dass die Zahl

$$\frac{2r-s}{s}$$

---

*) Wenn $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ist, so ist

$$p = \lambda r, \quad q = \lambda s,$$

wo λ nicht gleich 1 zu sein braucht.

der Maximumswerth der Ordnung der infinitesimalen Grösse

$$\sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} - \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}}$$

ist, wenn $\frac{p}{q}$ gleich $\frac{r}{s}$ ist.

In Folge dessen haben die Curven (8) *und* (9), *wenn* $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ *ist, höchstens* $(2r-s)q$ *im Punkte* $t=0$, $x=0$ *vereinigte Schnittpunkte, die von den besprochenen Reihenentwickelungen herrühren.*

27. Wir werden jetzt *bis auf Weiteres* annehmen, dass eine jede unserer beiden Curven nur *eine* Reihenentwickelung im Punkte ($t=0$, $x=0$) besitzt. Alsdann schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Curve in p Punkten, die im Punkte ($t=0$, $x=0$) zusammengefallen sind. Ebenso schneidet jene Gerade die bewegliche Curve in r Punkten, die im Punkte ($t=0$, $x=0$) zusammengefallen sind. Da nun

$$\frac{r}{s} \geqq 1 \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \geqq 1$$

ist, und folglich auch

$$rp \geqq sp, \qquad rp \geqq rq,$$

so besteht, wenn $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ verschieden sind, der Satz:

Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Curve in p im Punkte ($x=0$, $t=0$) zusammengefallenen Punkten, und die bewegliche Curve in r solchen Punkten, so ist rp ein Maximumswerth der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer Curven. Vorausgesetzt ist dabei, dass $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ verschieden sind, ferner dass eine jede unserer Curven nur eine Reihenentwickelung im betreffenden Punkte besitzt.

Sodann wenden wir uns zu dem Falle

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}, \tag{10}$$

indem wir fortwährend annehmen, dass jede Curve nur eine Reihenentwickelung im betreffenden Punkte besitzt. Nach dem Vorangehenden ist

$$(2r-s)q$$

ein Maximumswerth der im Punkte ($t=0$, $x=0$) vereinigten Schnittpunkte unserer Curven. Ferner ist

$$\frac{r}{s} \geqq 1,$$

also kommt

$$(r-s)^2 \geqq 0,$$

und zugleich

$$r^2 \geqq (2r-s)s,$$

oder indem wir berücksichtigen, dass $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ ist,

$$rp \gtreqless (2r-s)q.$$

Hiermit ist nachgewiesen, *dass der obenstehende Satz noch besteht, wenn die Exponenten* $\frac{r}{s}$ und $\frac{p}{q}$ *einander gleich sind.*

Lass uns jetzt voraussetzen, dass die feste Curve k Reihenentwickelungen im Punkte $(x=0,\ t=0)$ besitzt, und seien

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\cdots\frac{p_\varkappa}{q_\varkappa}\cdots\frac{p_k}{q_k}$$

die entsprechenden Werthe des Exponenten $\frac{p}{q}$; wir nehmen ferner an, dass die bewegliche Curve j Reihenentwickelungen in demselben Punkte besitzt, und dass

$$\frac{r_1}{s_1},\ \frac{r_2}{s_2}\cdots\frac{r_i}{s_i}\cdots\frac{r_j}{s_j}$$

die entsprechenden Werthe des Exponenten $\frac{r}{s}$ sind. Alsdann erkennt man, indem man je zwei solche Reihenentwickelungen verbindet, dass die Summe

$$\sum^i\sum^\varkappa r_i p_\varkappa = \left(\sum^i r_i\right)\left(\sum^\varkappa p_\varkappa\right)$$

der Maximumswerth der im Punkte $(x=0,\ t=0)$ vereinigten Schnittpunkte unserer Curven ist. Und da die feste Curve die unendlich entfernte Gerade in $p_1+p_2+\cdots+p_k$ im Punkte $(x=0,\ t=0)$ zusammengefallenen Punkten schneidet, und ebenso die bewegliche Curve dieselbe Gerade in $r_1+r_2+\cdots+r_j$ zusammengefallenen Punkten schneidet, so ergiebt sich ohne Beschränkung der Satz:

Satz 46. *Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste und die bewegliche Curve bezüglich in p und in r im Punkte $(x=0,\ t=0)$ zusammengefallenen Punkten, so ist pr ein Maximumswerth für die Zahl der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Curven.*

---

28. Im vorangehenden Paragraphen reducirten wir die Bestimmung der Ordnung einer Minimalfläche auf die Bestimmung der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Curve mit einer beweglichen Curve derselben Ebene, auf welche alle mögliche Translationen ausgeführt werden. Und in den vorangehenden Nummern dieses Paragraphen zeigten wir, dass die Erledigung des reducirten Problems nur die Bestimmung einer gewissen Anzahl von Gliedern in den Reihenentwickelungen zweier auf der Fläche gelegener Minimalcurven verlangte.

In späteren Paragraphen werden wir vermöge dieser allgemeinen Theorie die Ordnung einer Reihe algebraischer Minimalflächen bestimmen.

Hier beschränken wir uns darauf zwei Formeln zu entwickeln, die

uns nützlich sein werden, wenn wir später die schwierige Aufgabe angreifen, alle reellen Minimalflächen von gegebener Ordnung anzugeben.

Auf einer vorgelegten Minimalfläche wähle ich eine Minimalcurve jeder Schaar. Ich nehme an, dass diese beiden Curven *zusammen* die unendlich entfernte Ebene in g von einander verschiedenen Punkten schneiden. Unter diesen g Punkten, die $P_1, P_2, \ldots, P_g$ heissen mögen, gehören im Allgemeinen einige nur der einen Curve, einige nur der zweiten Curve an, und endlich können einige gleichzeitig beiden Curven angehören.

Im Punkte P_1 möge die erste Curve die unendlich entfernte Ebene in p_1 vereinigten Punkten treffen, im Punkte P_2 in p_2 vereinigten Punkten, u. s. w., und endlich in dem letzten Punkte P_g in p_g vereinigten Punkten. Dabei können unter den Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_g$ einige gleich Null sein. Jedenfalls ist die Zahl

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_g = \sum^{\varkappa} p_\varkappa$$

die Ordnungszahl der Curve.

Dementsprechend möge die Minimalcurve der zweiten Schaar die unendlich entfernte Ebene überhaupt im Punkte $P_\varkappa$ in $\pi_\varkappa$ vereinigten Punkten treffen. Alsdann ist die Zahl

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_g = \sum^{\varkappa} \pi_\varkappa$$

die Ordnungszahl der zweiten Curve.

Nehmen wir nun an, dass unsere Fläche keine Doppelfläche ist, (was wir übrigens schon implicite vorausgesetzt haben, indem wir von *zwei* Schaaren von Minimalcurven sprachen), so lehren unsere früheren Entwickelungen, dass die Zahl

$$\left(\sum^{\varkappa} p_\varkappa\right)\left(\sum^{\varkappa} \pi_\varkappa\right) - \sum p_\varkappa \pi_\varkappa$$

ein Minimumswerth der Ordnung unserer Fläche ist.

Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist $p_\varkappa = \pi_\varkappa$, und also ist

$$\frac{1}{2}\left(\left(\sum p_\varkappa\right)^2 - \sum p_\varkappa^2\right)$$

ein Minimumswerth für die Ordnung der betreffenden Fläche.

Ist unsere Fläche *reell* und dabei keine Doppelfläche, so sind die Minimalcurven der beiden Schaaren conjugirt, und daher von derselben Ordnung, so dass

$$\sum p_\varkappa = \sum \pi_\varkappa$$

ist. Also ist

$$\left(\sum p_\varkappa\right)^2 - \sum p_\varkappa \pi_\varkappa$$

ein Minimumswerth für die Ordnung der Fläche.

§ 8.

Minimalcurven, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthalten.

Es ist möglich eine vollständige Theorie solcher Minimalcurven zu entwickeln, deren Developpable den Kugelkreis als *einfachen* Kegelschnitt enthalten. Hierauf begründen wir in einem späteren Paragraphen (§ 10.) u. A. eine Bestimmung und Discussion aller *reellen* Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebig vorgelegte Primzahl ist.

29. Wie wir in Nummer 10. sahen, bestimmen die Weierstrass'schen Formeln

$$
\begin{aligned}
x &= (1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s),\\
y &= i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s),\\
z &= 2sF''(s) - 2F'(s),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

in denen F eine arbiträre algebraische Function von s bezeichnet, eine jede algebraische Minimalcurve. Aus den entsprechenden Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
dx &= (1-s^2)F'''(s),\\
dy &= i(1+s^2)F'''(s),\\
dz &= 2sF'''(s)
\end{aligned}
$$

folgt

$$dx : dy : dz = (1-s^2) : i(1+s^2) : 2s,$$

so dass die beiden Verhältnisse

$$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$$

rationale Functionen von s sind. Andererseits ist

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$$

Hieraus fliesst einerseits, dass zu einem gegebenen Werthe des Parameters s eine bestimmte Richtung der Tangente der Minimalcurve gehört, andererseits dass einer gegebenen Tangentenrichtung ein ganz bestimmter Werth von s entspricht. Erinnern wir daher, dass die Tangenten einer Minimalcurve sämmtlich den Kugelkreis treffen, so können wir sagen:

Die verschiedenen Werthe des Parameters s sind den Punkten des Kugelkreises eindeutig zugeordnet. Giebt man in den Formeln (1) *der Grösse s einen gewissen Werth s_0, so erhält man denjenigen Punkt oder diejenigen Punkte der betreffenden Minimalcurve, deren Tangenten den Kugelkreis in dem zu s_0 gehörigen Punkte treffen.*

Lass uns jetzt voraussetzen, dass $F(s)$ eine *rationale* Function von s ist; alsdann sind auch x, y, z rationale Functionen von s. In diesem

Falle hat daher unsere Minimalcurve nur *eine* Tangente, die den Kugelkreis in einem vorgelegten Punkte schneidet. Der Kugelkreis ist daher ein *einfacher* Kegelschnitt auf der betreffenden Developpablen. Also:

Satz 47. *Ist $F(s)$ eine rationale Function von s, so bestimmen die Formeln* (1) *eine Minimalcurve, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält.*

Ist andererseits der Kugelkreis ein einfacher Kegelschnitt auf der Developpablen einer algebraischen Minimalcurve, so sind x, y, z rationale Functionen von s, und da wegen der Formeln (1)

$$F(s) = -\tfrac{1}{2}\{(1-s^2)x + i(1+s^2)y + 2sz\}$$

ist, so folgt, dass auch $F(s)$ eine rationale Function von s ist. Also:

Satz 48. *Man erhält eine jede algebraische Minimalcurve, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält, indem man in den Formeln* (1) *$F(s)$ eine rationale Function von s sein lässt.*

Um die zu einer beliebig vorgelegten rationalen Function F gehörige Minimalcurve zu discutiren, denken wir uns $F(s)$ zunächst in eine ganze Function $H(s)$ und in Ausdrücke der Form

$$\frac{A}{(s-a)^m}$$

zerlegt. Ist nun $H(s)$ von der dritten oder noch höheren Ordnung, so werden die durch die Formeln (1) bestimmten Ausdrücke der Grössen x, y, z *unendlich*, wenn man $s = \infty$ setzt. In diesem Falle giebt daher der Parameterwerth $s = \infty$ einen unendlich entfernten Punkt auf unserer Curve. Und da das Eintreten dieses Umstandes sich immer dadurch vermeiden lässt, dass man auf die Minimalcurve eine gewisse (reelle) Bewegung ausführt (welche keine Translation ist), so können wir uns auf den Fall, dass $H(s)$ von der nullten, ersten oder zweiten Ordnung ist, beschränken.

Bestimmt man auf der anderen Seite die beiden Minimalcurven, die zu *zwei* rationalen Functionen $F(s)$ und $F_1(s)$ gehören, deren Differenz eine ganze Function von der zweiten Ordnung ist, so erkennt man, dass die eine dieser Minimalcurven durch eine gewisse Translationsbewegung in die andere Minimalcurve übergehen kann. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Satz 49. *Eine jede Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, kann in der Weise erhalten werden, dass man in den Formeln* (1) *statt $F(s)$ eine gewisse rationale Function von s setzt, deren Nenner von höherer Ordnung als der Zähler ist, und dass man darnach eine gewisse Bewegung auf die erhaltene Curve ausführt.*

30. Wir können daher voraussetzen, dass $F(s)$ die Form

$$F(s) = \sum_{k=1}^{k=q} \left\{ \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k}} + \frac{A_{m_k-1}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{(s-a_k)} \right\}$$

oder die äquivalente Form

(2) $$F(s) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_x)^j}$$

besitzt. Man findet

$$F'(s) = \sum^k \sum^j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}},$$

$$F''(s) = \sum^k \sum^j \frac{j(j+1)A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+2}}.$$

Durch Einsetzung in (1) erhalten x, y, z die Form

$$\frac{k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-1}}{(s-a_1)^{m_1+2}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

wo der Index die Ordnung des Zählers angiebt. Insbesondere ist

$$z = \sum^k \sum^j 2j \frac{(j+2)s - a_x}{(s-a_x)^{j+2}} = \frac{k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}}{(s-a_1)^{m_1+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}.$$

Wir werden zeigen, dass der Zähler

$$k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}$$

sich nicht mit einigen der Factoren des Nenners verkürzen lässt. Lass uns in der That voraussetzen, dass eine Verkürzung z. B. mit $s-a_1$ möglich wäre, sodass z die Form

$$z = \frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

besässe. Alsdann bestände eine Relation der Form

$$2m_1 \frac{(m_1+2)s-a_1}{(s-a_1)^{m_1+2}} = \frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$
$$- \sum_{j=1}^{j=m_1-1} 2j \frac{s(j+2)-a_1}{(s-a_1)^{j+2}} - \sum_{k=2}^{k=q} \sum_{j=1}^{j=m_k} 2j \frac{s(j+2)-a_k}{(s-a_k)^{j+2}},$$

wo die Grösse $s-a_1$ in dem Nenner links in der Potenz $(s-a_1)^{m_1+2}$ auftritt, während sie in den Nennern rechts nur in niedrigeren Potenzen vorkäme. Und da der Zähler links sich nicht mit $s-a_1$ verkürzen lässt, so ist unsere frühere Annahme unmöglich. Folglich ist der Nenner von z von der Ordnung

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + 2q,$$

während der Zähler von z eine niedrigere Ordnung besitzt. Und da nach dem Vorangehenden auch nicht die Nenner und Zähler der Grössen x und y von höherer Ordnung als der Nenner von z sind,

ergiebt sich, dass die Ordnung unserer Curve gleich $\Sigma m_k + 2q$ ist. Ferner ist klar, dass nur die Parameterwerthe $s = a_k$ unendlich entfernte Punkte unserer Curve liefern. Die unendlich entfernte Ebene schneidet unsere Curve in q verschiedenen Punkten, die sämmtlich auf dem Kugelkreise gelegen sind. In jedem Punkte $s = a_k$ fallen $m_k + 2$ Schnittpunkte zwischen der Curve und der unendlich entfernten Ebene zusammen. In jedem solchen Schnittpunkte ist, wie ich beiläufig bemerke, die unendlich entfernte Ebene Osculationsebene der Curve. Also:

Satz 50. *Hat $F(s)$ die Form* (2), *so ist die Ordnung der entsprechenden Minimalcurve gleich*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + 2q.$$

Sie trifft die unendlich entfernte Ebene in q verschiedenen Punkten (die sämmtlich auf dem Kugelkreise liegen) und zwar liegen im ersten Punkte $m_1 + 2$ Schnittpunkte der Curve und der Ebene vereinigt, im zweiten liegen $m_2 + 2$ Schnittpunkte vereinigt u. s. w.

31. Jetzt werden wir den Rang unserer Minimalcurve bestimmen. Die Gleichungen

$$x' = x + \varepsilon \frac{dx}{ds},$$

$$y' = y + \varepsilon \frac{dy}{ds},$$

$$z' = z + \varepsilon \frac{dz}{ds},$$

in denen x, y, z Coordinaten eines Punktes der Minimalcurve sind, während ε einen variablen Parameter darstellt, bestimmen sämmtliche Punkte x', y', z', die auf einer Tangente der Curve gelegen sind. Fasst man sowohl s wie ε als variable Parameter auf, so bestimmen unsere Gleichungen alle Punkte, die auf der Developpablen der Minimalcurve gelegen sind. Die Schnittpunkte der Developpablen mit der Geraden

$$\left\{\begin{aligned} Ax' + By' + C &= 0, \\ Lx' + Mz' + N &= 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

sind daher bestimmt durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} Ax + By + C + \varepsilon\left(A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds}\right) &= 0, \\ Lx + Mz + N + \varepsilon\left(L \frac{dx}{ds} + M \frac{dz}{ds}\right) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

aus denen folgt

$$\begin{aligned} (Ax+By+C)\left(L \frac{dx}{ds} + M \frac{dz}{ds}\right)& \\ -(Lx+Mz+N)\left(A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir setzen voraus, dass die Constanten A, B, C, L, M, N allge-

meine Werthe haben. Alsdann ist der Rang der Curve, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Ordnung der Developpablen gleich der Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Developpablen und der Geraden (3).

Da die Gerade eine allgemeine Lage hat, können wir annehmen, dass sie nicht mit einer Tangente der Curve parallel ist, woraus hervorgeht, dass die Gleichungen

$$A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} = 0, \quad L\frac{dx}{ds} + M\frac{dz}{ds} = 0$$

nur unter der Voraussetzung gleichzeitig bestehen können, dass gleichzeitig

$$\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0,$$

das heisst, dass gleichzeitig

$$F'''(s) = 0$$

ist.

Ist nun x', y', z' ein (im endlichen Raume gelegener) Schnittpunkt, so geht durch denselben eine bestimmte Tangente, deren Berührungspunkt x, y, z einem bestimmten Werthe s_0 von s entspricht. Und da für diesen Berührungspunkt die Grössen

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

von Null verschieden sind, indem sonst die Gerade (3) eine particuläre Lage hätte, so geben die Gleichungen (4) einen endlichen Werth der Grösse ε. Ebenso ist klar, dass s_0 von ∞ verschieden ist, indem sonst die Gerade (3) eine specielle Lage hätte. Hieraus ergiebt sich, *dass jeder Schnittpunkt der Developpablen mit der Geraden* (3) *allgemeiner Lage ein endliches Werthsystem s, ε liefert, welches die Gleichungen* (4) *befriedigt.*

Lass uns andererseits voraussetzen, dass die Gleichungen (4) und also zugleich die Gleichung (5) durch ein endliches Werthsystem ε, s befriedigt werden. Alsdann sind die entsprechenden Werthe von x, y, z, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ endlich,*) und also liefern die Coordinatenwerthe

$$x + \varepsilon\frac{dx}{ds}, \quad y + \varepsilon\frac{dy}{ds}, \quad z + \varepsilon\frac{dz}{ds}$$

einen im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkt zwischen der Developpablen und der Geraden.

Es fragt sich, ob jeder endliche Werth von s, der die Gleichung (5) befriedigt, zugleich einen endlichen Werth von ε liefert.

Der betreffende Werth von ε ist endlich, ausgenommen, wenn die beiden Gleichungen

*) Dies beruht darauf, dass keine unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_q$ für allgemeine Werthe der Grössen A, B, C, L, M, N die Gleichung (5) befriedigt, wie in der nächsten Nummer nachgewiesen wird.

$$A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}=0,$$

$$L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}=0$$

bestehen, das heisst nach dem Vorangehenden, wenn

$$F'''(s)=0$$

ist. Unter den Lösungen der Gleichung (5) müssen also diejenigen als uneigentlich ausgeschlossen werden, welche zugleich $F'''(s)=0$ ergeben. Also:

Satz 51. *Der Rang unserer Minimalcurve ist gleich der Zahl der verschiedenen Werthe von* s, *welche die Gleichung* (5) *befriedigen, und welche nicht gleichzeitig* $F'''(s)=0$ *erfüllen.*

32. Die Gleichung (5) kann auch folgendermassen geschrieben werden

$$\begin{aligned}(6)\qquad AM(xdz-zdx)+BL(ydx-xdy)+BM(ydz-zdy)\\ +(CL-AN)dx+CM\,dz-BN\,dy=0.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}xdz-zdx&=(2s^2+2)F'F'''-4sFF''',\\ ydx-xdy&=-4isF'F'''+4iFF''',\\ ydz-zdy&=(-2s^2+2)iF'F'''+4isFF''',\end{aligned}$$

$$dx=(1-s^2)F''',\quad dy=i(1+s^2)F''',\quad dz=2sF'''.$$

Daher ist F''' ein Factor der linken Seite der Gleichung (6), und nach dem letzten Satze kann dieser Factor weggelassen werden.

Es ist (Nr. 30.)

$$F(s)=\sum^k\sum^j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j},$$

$$F'(s)=\sum^k\sum^j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}},$$

$$F''(s)=\sum^k\sum^j\frac{j(j+1)A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+2}}.$$

Also nimmt die Gleichung (6) nach der Weglassung des Factors F''' die Form an:

$$\begin{aligned}(7)\qquad &AM\left\{(2s^2+2)\sum^k\sum^j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}-4s\sum^k\sum^j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ &+BL\left\{-4is\sum^k\sum^j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}+4i\sum^k\sum^j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ &+BM\left\{(-2s^2+2)i\sum^k\sum^j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}+4is\sum^k\sum^j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ &+(CL-AN)(1-s^2)+CM\cdot 2s-BNi(1+s^2)=0.\end{aligned}$$

Durch Zusammenziehung erhält die linke Seite folgende Gestalt:

$$\frac{k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+q+2}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+1}\cdots(s-a_q)^{m_q+1}},$$

wo der Zähler eine ganze Function von der Ordnung $\Sigma m_k + q + 2$ ist. Und da der Zähler für allgemeine Werthe der Grössen A, B, L, M sich nicht mit $s - a_1$, $s - a_2 \ldots$ oder $s - a_q$ verkürzen lässt, indem die Grössen

$$s^2 + 1, \quad s \text{ und } -s^2 + 1$$

nicht gleichzeitig mit einer Grösse $s - a_k$ dividirbar sind, *so hat die Gleichung* (7) $\Sigma m_k + q + 2$ *Wurzeln.* Unter diesen Wurzeln findet sich eo ipso keine Grösse $a_1, a_2 \ldots a_q$. Also ergiebt sich der Satz:

Satz 52. *Der Rang unserer Minimalcurven ist gleich*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + q + 2.$$

[Bei dem Beweise dieses Satzes haben wir vorausgesetzt, dass die Gleichung

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)=0$$

keine gleichen Wurzeln besitzt. Ich werde andeuten, wie man dies beweist. Die gleichen Wurzeln, die möglicherweise existiren, befriedigen zugleich die durch Differentiation hervorgehende Gleichung

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0,$$

woraus:

$$\frac{L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}}{L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}}=\frac{A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}}{A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Diese Gleichung erhält durch Ausmultipliciren die Form:

$$AM\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)+BL\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)-BM\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)=0,$$

woraus durch eine geometrische Ueberlegung hervorgeht, dass die Gerade (3) jedesmal die Developpable der Minimalcurve berührt, wenn die Gleichung (5) eine mehrfache Wurzel besitzt. Und da dies durch die allgemeine Lage der Geraden (3) ausgeschlossen ist, folgt, dass gleiche Wurzeln nicht auftreten können].

33. [Es ist sehr leicht die *Classe* einer Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, zu bestimmen. Diess soll jetzt gezeigt werden, obgleich diese Bestimmung für das Folgende unwesentlich ist.

Die Gleichung der Osculationsebene

$$(x'-x)(dz\,d^2y-dy\,d^2z)+(y'-y)(dx\,d^2z-dz\,d^2x)$$
$$+(z'-z)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)=0$$

nimmt durch Ausführung und Weglassung des unwesentlichen Factors F'''^2 die Form an:

$$(1-s^2)x' + i(1+s^2)y' + 2sz' = 4F(s)$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines laufenden Punktes der Osculationsebene sind. Und da

$$F(s) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

ist, so folgt, dass die Osculationsebenen, die durch einen beliebig vorgelegten Punkt gehen, durch eine Gleichung von der $(m_1+\cdots+m_q+2)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt sind. Hieraus folgt:

Satz 53. *Die Classe unserer Minimalcurve ist gleich*

$$m_1 + \cdots + m_q + 2.$$

Bezeichne ich die Ordnung, die Classe und den Rang unserer Minimalcurve bezüglich mit O, C und R, so ist also:

$$O = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$C = m_1 + \cdots + m_q + 2,$$
$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2.$$

Hieraus ergiebt sich *die Relation*

$$O + C - 2R + 2 = 0,$$

die für jede Minimalcurve besteht, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Merkwürdig ist dabei, wie ich beiläufig bemerke, dass diese *Relation bei einer Transformation durch reciproke Radien ungeändert bleibt.*

Hier möge auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass die im endlichen Raume gelegenen Spitzen und Inflexionstangenten einer jeden Minimalcurve bezüglich durch die Gleichungen

$$F'''(s) = 0 \quad \text{und} \quad F'''(s) = \infty$$

bestimmt werden. Ist jedoch $M = 1$, so hat die Curve keine Inflexionstangenten, deren Berührungspunkt im endlichen Raume gelegen ist.

Die in diesem Paragraphen gegebene Bestimmung der Ordnung, der Classe und des Ranges einer Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, fand ich ursprünglich durch einfache synthetische Betrachtungen, indem ich nämlich *den Einfluss eines jeden unendlich entfernten Punktes*, der nur von der zugehörigen Reihenentwickelung abhängt, bestimmte. Eine ähnliche Discussion giebt die Bestimmung der genannten charakteristischen Zahlen einer ganz beliebigen Minimalcurve.] *)

*) Die Classe einer Minimalcurve ist immer gleich der Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene plus der zweifachen Multiplicität des Kugelkreises auf die betreffenden Developpablen.

§ 9.

Bestimmung aller sich selbst conjugirter Minimalcurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen.

Ich werde zeigen, dass es möglich ist, alle sich selbst conjugirten Minimalcurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen. Hieraus ergiebt sich sodann im nächsten Paragraphen *unmittelbar* die Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebig vorgelegte Primzahl ist.

34. Setzt man in den Weierstrass'schen Formeln einer Minimalcurve

$$x = (1-s^2)F'' + 2sF' - 2F,$$
$$y = i(1+s^2)F'' - 2isF' + 2iF,$$
$$z = 2sF'' - 2F'$$

und den entsprechenden Differentialgleichungen

$$dx = (1-s^2)F''', \quad dy = i(1+s^2)F''', \quad dz = 2sF'''$$

einmal

(1) $$s = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ein andermal

$$s = -\frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man bekanntlich auf der Curve zwei Punkte, deren Tangenten conjugirte Richtungen haben.

Ich werde annehmen, dass die Hypothese $F = \Phi(s)$ eine sich selbst conjugirte Minimalcurve, und ebenso dass die Annahme $F = \Psi(s)$ eine andere sich selbst conjugirte Curve giebt. Bezeichne ich dann mit λ eine beliebige *reelle* Constante, so ist vermöge der vorangehenden Bemerkung leicht zu erkennen, dass auch die Annahme $F = \Phi + \lambda\Psi$ eine sich selbst conjugirte Curve liefert.

Insbesondere giebt die Function $\Phi - \Psi$ eine sich selbst conjugirte Curve.

Hiermit verbinden wir die folgende Bemerkung.

Nach dem Vorangehenden wird jede sich selbst conjugirte Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, erhalten, wenn als $F(s)$ eine gewisse Function der Form

$$\sum^k \sum^j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + Ls^2 + Ms + N$$

gewählt wird. Nun aber wissen wir einerseits, *dass die unendlich entfernten Punkte* einer sich selbst conjugirten Curve *paarweise conjugirt sind*, andererseits, dass die unendlich entfernten Punkte unserer Curve auf dem Kugelkreise in den Punkten $s = a_k$ liegen. *Hieraus folgt, dass die Punkte $s = a_k$ paarweise conjugirt sind.*

Seien überhaupt $s = a_k$ und $s = \alpha_k$ zwei conjugirte Punkte des Kugelkreises und seien

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_g,\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_g$$

die unendlich entfernten Punkte unserer Curve. Die zugehörige Function F_0 besitzt dann also die Form:

$$F_0(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \left\{ \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + \frac{B_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} \right\} + Ls^2 + Ms^2 + N,$$

wo $(s-a_k)$ und $(s-\alpha_k)$ *in gleich hohen Potenzen auftreten.*

35. Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich die Minimalcurve, die zu der Function

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

gehört, und zugleich die conjugirte Minimalcurve, deren charakteristische Function $F_2(s)$ die Form

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + Ps^2 + Qs + R$$

besitzt. Setze ich dann

$$F_1 + F_2 = F_3,$$

so ist die zu F_3 gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Andererseits ist auch die zu F_0 gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Also ist auch die zu $F_0 - F_3$ gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Nun aber besitzt $F_0 - F_3$ die Form

$$F_0 - F_3 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{B_j^{(k)} - C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + (L-P)s^2 + (M-Q)s + (N-R),$$

und da die Punkte des Kugelkreises, die den Parameterwerthen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ entsprechen, nicht paarweise conjugirt sind, ergiebt sich, dass *die Zähler der Grössen* $(s-\alpha_k)^j$ *sämmtlich verschwinden:*

$$B_j^{(k)} - C_j^{(k)} = 0.$$

In Folge dessen reducirt sich die zu $F_0 - F_3$ gehörige, sich selbst conjugirte Minimalcurve auf den *Punkt*

$$\begin{aligned} x_0 &= 2(L-P) - 2(N-R), \\ y_0 &= 2i(L-P) + 2i(N-R), \\ z_0 &= -2(M-Q), \end{aligned}$$

der *reell* sein muss. Die Grössen L, M, N sind also durch die Grössen P, Q, R bis auf *drei arbiträre reelle* Constanten x_0, y_0, z_0 bestimmt. Dass diese drei Constanten *arbiträr* sind, liegt darin, dass eine sich

selbst conjugirte Curve durch eine jede *reelle* Translation sich selbst conjugirt bleibt.

Setzt man diese arbiträren reellen Constanten x_0, y_0, z_0, wie man ohne wesentliche Beschränkung thun kann, sämmtlich gleich Null, so kommt

$$L = P, \quad N = R, \quad M = Q.$$

Das Obenstehende fassen wir folgendermassen zusammen.

Satz 54. *Man findet eine jede sich selbst conjugirte Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, folgendermassen. Auf dem Kugelkreise wählt man eine beliebige Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_g$, unter denen keine zwei conjugirt sind, und bildet dann, indem man mit $m_1, m_2, \ldots, m_g$ beliebige positive ganze Zahlen, mit $A_j^{(k)}$ arbiträre Constanten bezeichnet, den Ausdruck:*

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}.$$

Man bestimmt die zugehörige Minimalcurve, ferner die conjugirte Minimalcurve und endlich die zu der letzten Curve gehörige charakteristische Function

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{B_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + Ps^2 + Qs + R.$$

Alsdann ist die der Function $\Phi_1 + \Phi_2$ entsprechende Minimalcurve immer sich selbst conjugirt.

Die Bestimmung der Constanten $B_j^{(k)}$, P, Q und R verlangt die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, *und kann daher in jedem einzelnen Falle ausgeführt werden.*

36. Unsere früheren Formeln für die Ordnung, die Classe und den Rang einer Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, geben für die sich selbst conjugirten Curven die folgenden Relationen:

$$O = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 4g,$$
$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2,$$
$$C = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2,$$

sodass die Ordnung, die Classe und der Rang in diesem Falle sämmtlich gerade Zahlen sind.*)

Wünscht man nun z. B. *alle* Minimalcurven der betreffenden Art, deren Rang gleich einer beliebigen geraden Zahl 2ω ist, zu finden, so muss man zunächst die Gleichung

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + 1 = \omega$$

---

*) Es ist übrigens leicht zu erkennen, dass diese Zahlen für eine *jede* sich selbst conjugirte Minimalcurve gerade sind.

auf alle möglichen Weisen in *ganzen positiven* Zahlen auflösen. Sodann verfährt man nach den Regeln des letzten Satzes. Also:

Satz 55. *Es ist immer möglich, alle sich selbst conjugirten Minimalcurven von gegebenem Range, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen.*

§ 10.

Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

Die vorangehenden Entwickelungen erlauben alle reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte *Primzahl* π ist, zu finden.

37. Die Classe einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist (§ 5.), wird gegeben durch die Formel

$$2M(R-M),$$

während die Classe einer Doppelfläche (§ 5.) gleich

$$M(R-M)$$

ist. Da nun die Primzahl π, die grösser als 2 sein muss, eine ungerade Zahl ist, so muss die Fläche eine Doppelfläche sein. Also:

Satz 56. *Eine jede reelle Minimalfläche, deren Classe eine ungerade Zahl ist, muss eine Doppelfläche sein. Dies ist insbesondere der Fall bei jeder reellen Minimalfläche, deren Classe eine Primzahl ist.*

Es handelt sich also darum, die Gleichung

$$M(R-M) = \pi$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen, derart, dass die betreffende Minimalcurve sich selbst conjugirt ist. Da π eine Primzahl ist, und $R - M$ nach einem früheren Satze nicht gleich 1 sein kann, folgt

$$M = 1, \quad R - M = \pi,$$

und

$$R = \pi + 1,$$

wo $\pi + 1$ offenbar eine gerade Zahl ist. Andererseits fanden wir in dem vorangehenden Paragraphen die Formel

$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2.$$

Also kommt

$$\frac{\pi+1}{2} = m_1 + \cdots + m_g + g + 1,$$

welche Gleichung man in allgemeinster Weise befriedigen muss.

Jedem Systeme ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung entspricht nach dem vorangehenden Paragraphen eine sich selbst conjugirte Minimalcurve, die

$$g + m_1 + \cdots + m_g = \frac{R-2}{2} = \frac{\pi-1}{2}$$

arbiträre Constanten*) enthält. Die zugehörige reelle Minimalfläche ist von der π^{ten} Classe. Und in dieser Weise werden alle derartige Flächen bestimmt. Also:

Satz 57. *Um alle reellen Minimalflächen zu finden, deren Classe gleich einer gewissen Primzahl π ist, sucht man nach den Regeln des vorangehenden Paragraphen alle sich selbst conjugirten Minimalcurven, deren Rang gleich $\pi + 1$ ist, und welche dabei der Annahme $M = 1$ entsprechen. Die zugehörigen Minimalflächen sind von der π^{ten} Classe.*

38. Als Beispiel werden wir zeigen, wie man alle reellen Minimalflächen der dreizehnten Classe bestimmen kann.

Man soll die Gleichung

$$\frac{13+1}{2} = 7 = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + 1$$

oder die äquivalente Gleichung

$$6 = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g$$

in allgemeinster Weise durch ganze Zahlen befriedigen. Die folgenden Möglichkeiten können eintreten:

1) $g = 1, \quad m_1 = 5,$
2) $g = 2, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 1,$
3) $g = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 2,$
4) $g = 3, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1.$

Es giebt daher vier verschiedene Arten reeller Minimalflächen der dreizehnten Classe. Die Flächen der ersten Art werden erhalten, wenn man setzt

$$F(s) = \frac{A_5}{(s-a)^5} + \frac{A_4}{(s-a)^4} + \cdots + \frac{A_1}{(s-a)}$$
$$+ \frac{B_5}{(s-\alpha)^5} + \frac{B_4}{(s-\alpha)^4} + \cdots + \frac{B_1}{s-\alpha};$$

die Constanten $A_1, A_2, \ldots, A_5$ und a sind arbiträr, dagegen sind $B_1, B_2, \ldots, B_5$ und α eindeutig bestimmt, wenn die sechs ersten Constanten gewählt sind. Man findet die B_k und α nach den früheren Regeln.

2) Die Minimalflächen der zweiten Art werden erhalten, wenn man setzt

*) Diese arbiträren Constanten sind complexe Grössen und sind daher der doppelten Anzahl reeller Constanten äquivalent. Durch eine zweckmässige reelle Rotation der Minimalcurve liessen sich noch drei reelle Constanten entfernen, endlich könnte eine vierte reelle Constante durch eine reelle Aehnlichkeitstransformation weggeschafft werden.

$$F(s) = \frac{A_3}{(s-a_1)^3} + \frac{A_2}{(s-a_1)^2} + \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{B_1}{s-a_2}$$
$$+ \frac{C_3}{(s-\alpha_1)^3} + \frac{C_2}{(s-\alpha_2)^2} + \frac{C_1}{s-\alpha_1} + \frac{D_1}{s-\alpha_2}.$$

Hier sind A_1, A_2, A_3, B_1, a_1 und a_2 arbiträre Constanten, während die übrigen Constanten eindeutig bestimmt sind, wenn jene gewählt sind.

3) Die Flächen der dritten Art erhält man, wenn man setzt

$$F(s) = \frac{A_2}{(s-a_1)^2} + \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{B_2}{(s-a_2)^2} + \frac{B_1}{s-a_2}$$
$$+ \frac{C_2}{(s-\alpha_1)^2} + \frac{C_1}{s-\alpha_1} + \frac{D_2}{(s-\alpha_2)^2} + \frac{D_1}{s-a_2},$$

darnach A_1, A_2, B_1, B_2, a_1 und a_2 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Constanten wie früher bestimmt.

4) Endlich die Flächen der vierten Art erhält man, indem man setzt

$$F(s) = \frac{A}{s-a_1} + \frac{B}{s-a_2} + \frac{C}{s-a_3}$$
$$+ \frac{D}{s-\alpha_1} + \frac{E}{s-\alpha_2} + \frac{F}{s-\alpha_3},$$

darnach A, B, C, a_1, a_2 und a_3 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Constanten passend bestimmt.

Es giebt daher vier Arten reeller Minimalflächen dreizehnter Classe. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so hängen die Flächen jeder Art von acht reellen Constanten ab.

§ 11.

Bestimmung reeller Minimalflächen von beliebig gegebener Classe.

Verlangt man, dass die Classe einer reellen Minimalfläche gleich einer vorgelegten Zahl, die keine Primzahl ist, sein soll, so ist die Bestimmung der betreffenden Flächen mir nur in den einfacheren Fällen gelungen, und ich vermuthe sogar, dass eine allgemeine Erledigung dieses Problems sich nicht geben lässt. Doch scheinen mir die nachstehenden Entwickelungen bemerkenswerth zu sein.

39. Ich will zunächst versuchen alle reellen Minimalflächen gegebener Classe, *die keine Doppelflächen sind*, zu bestimmen. Die Classe einer solchen Fläche ist gegeben durch

$$2M(R-M),$$

woraus hervorgeht, dass die Classe immer gerade und dabei gleich oder grösser als sechs ist.

1) Die Hypothese

$$2M(R-M) = 6$$

giebt

$$M = 1, \quad R = 4.$$

Nun aber ist

$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2,$$

also ist

$$q = 1, \quad m_1 = 1,$$

und es wird

$$F(s) = \frac{A}{s - a}.$$

Die entsprechende Minimalcurve ist von der dritten Ordnung; dieselbe hat nur einen unendlich entfernten Punkt; daher hat sie keinen unendlich entfernten Punkt mit der conjugirten Minimalcurve gemein. Die zugehörige Minimalfläche ist somit (§ 6. und 7.) von der neunten Ordnung. Dies ist die von Herrn Enneper entdeckte Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Classe.

2) Die Hypothese

$$2M(R - M) = 8$$

giebt

$$M = 1, \quad R = 5,$$

und da

$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2,$$

so folgt

$$q = 1, \quad m_1 = 2,$$

woraus

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a}.$$

Die Ordnung dieser Minimalcurve ist gleich $m_1 + 2q = 4$, sie schneidet die unendlich entfernte Ebene nur in einem Punkte. Die Ordnung der zugehörigen Minimalfläche ist sechszehn.

3) Die Hypothese

$$2M(R - M) = 10$$

wird befriedigt in zwei Weisen. Entweder ist

$$M = 1, \quad R = 6, \quad q = 1, \quad m_1 = 3, \quad O = 5,$$

so dass:

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^3} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-a}.$$

Da die Minimalcurve nur *einen* unendlich entfernten Punkt besitzt, so ist die Ordnung der betreffenden Minimalfläche gleich 25.

Oder auch, es ist

$$M = 1, \quad R = 6, \quad q = 2, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad O = 6,$$

dabei ist die Classe der Curve gleich $m_1 + m_2 + 2 = 4$. Da die Minimalcurve zwei unendlich entfernte Punkte besitzt, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder sind diese Punkte nicht conjugirte Punkte, dann ist die Ordnung der Fläche gleich 36. Oder auch, sie sind conjugirte Punkte, dann ist die Ordnung der Fläche gleich 30, 28 oder 26.

4) Die Hypothese

$$2M(R-M)=12$$

wird befriedigt durch

$$M=1,\quad R=7,\quad q=1,\quad m_1=4,\quad O=6,$$

die Ordnung der Fläche ist gleich 36. Oder auch, es ist

$$M=1,\quad R=7,\quad q=2,\quad m_1=2,\quad m_2=1,\quad O=7;$$

die Ordnung der Fläche ist, jenachdem die beiden unendlich entfernten Punkte nicht conjugirt, oder conjugirt sind, entweder 49 oder 43. Endlich kann

$$M=2,\quad R=5$$

sein. Es giebt bekanntlich eine Minimalcurve, deren Rang fünf ist, auf deren Developpable der Kugelkreis ein zweifacher Kegelschnitt ist. Die Ordnung dieser Curve ist vier, sie enthält zwei unendlich entfernte Punkte. Haben dieselben eine allgemeine Lage, so ist die Ordnung der Fläche gleich 16; sind sie dagegen conjugirt, so ist die Ordnung der Fläche gleich 12.

5) Die Hypothese

$$2M(R-M)=14$$

giebt jedenfalls

$$M=1,\quad R=8.$$

Dabei können vier Unterfälle eintreten:

a) $q=1,\quad m_1=5,\quad O=7,$

b) $q=2,\quad m_1=3,\quad m_2=1,\quad O=8,$

c) $q=2,\quad m_1=2,\quad m_2=2,\quad O=8,$

d) $q=3,\quad m_1=m_2=m_3=1,\quad O=9.$

Im Falle a ist die Ordnung der Fläche gleich 49; im Falle b entweder 64 oder 58; im Falle c entweder 64, 56, 54, 52 oder 50; endlich im Falle d entweder 81, 75, 73 oder 71.

6) Die Hypothese

$$2M(R-M)=16$$

giebt entweder

$$M=1,\quad R=9,$$

in welchem Falle vier leicht bestimmbare Unterfälle eintreten können. Oder auch es ist

$$M=2,\quad R=6.$$

Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass es nur zwei Minimalcurven vom Range 6 giebt, deren Developpable den Kugelkreis zweifach enthält. Die eine Curve, die von der fünften Ordnung ist, osculirt die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte und schneidet sie in zwei anderen Punkten. Die entsprechende Minimalfläche ist von der

25ten oder 23ten Ordnung. — Die zweite Curve ist von der sechsten Ordnung. Sie hat zwei unendlich entfernte Spitzen, deren Tangenten den Kugelkreis berühren. Die entsprechende Minimalfläche ist von der 36ten, 30ten oder 28ten Ordnung.

7) Die Hypothese

$$2M(R-M)=18$$

giebt entweder

$$M=1,\quad R=10,$$

welcher Fall wie gewöhnlich discutirt wird. Oder auch, es ist

$$M=3,\quad R=6.$$

Es fragt sich, ob eine solche Minimalcurve existirt. Ist dies der Fall, so könnte man sie, durch eine Transformation durch reciproke Radien, deren Pol auf der Curve liegt, in eine neue Minimalcurve, deren Rang (§ 5.) gleich

$$2(R-M)-2=4$$

ist, überführen. Die neue Minimalcurve würde dann von der dritten Ordnung sein. Führt man andererseits eine Transformation durch reciproke Radien auf eine Minimalcurve dritter Ordnung aus, so erhält man eine Minimalcurve vierter Ordnung, vom Range 6, von sechster Classe. Dabei ist $M=3$. Die Curve schneidet die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten. Die zugehörige Minimalfläche ist von der Ordnung 12, 14 oder 16 (siehe den nächsten Paragraphen).

8) Die Hypothese

$$2M(R-M)=20$$

giebt entweder

$$M=1,\quad R=11,$$

welcher Fall wie gewöhnlich erledigt wird, oder auch

$$M=2,\quad R=7,$$

und da Schwarz alle Curven vom Range 7 bestimmt hat, wird es wohl nicht schwierig sein, durch Verfolgung seiner Betrachtungen die Hypothese $M=2$, $R=7$ in allgemeinster Weise zu erfüllen. Einen anderen Weg zur Erledigung dieser Frage gebe ich später an.

Die Hypothese

$$2M(R-M)=22$$

giebt mit Nothwendigkeit

$$M=1,\quad R=12;$$

die entsprechenden Flächen werden wie gewöhnlich bestimmt.

Soll endlich

$$2M(R-M)=24$$

sein, so sind die folgenden Fälle denkbar:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad M=1, \quad R=13,\\
&\text{b)}\quad M=2, \quad R=8,\\
&\text{c)}\quad M=3, \quad R=7,\\
&\text{d)}\quad M=4, \quad R=7.
\end{aligned}
$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass die Fälle a, b und c wirklich Minimalflächen geben. Dagegen kann der letzte Fall nicht eintreten; denn es besteht (§ 8.) allgemein die Formel

$$R = 2M + N,$$

wo N die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene bezeichnet. Und in Folge dessen ist die Zahl $R - 2M$ nie negativ.

40. Jetzt werden wir versuchen *reelle* Minimalflächen von gegebener Classe unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die betreffenden Flächen *Doppelflächen* sind, zu bestimmen.

Die Classe einer solchen Fläche ist gegeben durch die Formel

$$M(R-M).$$

1) Die Hypothese

$$M(R-M) = 3$$

würde geben

$$M=1, \quad R=4, \quad O=3.$$

Es giebt aber keine sich selbst conjugirte Minimalcurve dritter Ordnung*), da jede Minimalcurve 3. O. nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt. Es giebt also keine reelle Doppelfläche dritter Classe.

2) Die Hypothese

$$M(R-M) = 4$$

giebt

$$M=1, \quad R=5.$$

Nun aber wissen wir, dass der Rang einer jeden sich selbst conjugirten Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, eine *gerade* Zahl (§ 9.) ist. Daher giebt es keine Doppelfläche vierter Classe.

3) Die Hypothese

$$M(R-M) = 5$$

giebt

$$M=1, \quad R=6,$$

und da (§ 9.)

$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2$$

ist, so folgt

$$g=1, \quad m_1=1.$$

$$F(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}.$$

---

*) Allgemeiner könnte man sagen: Es giebt keine sich selbst conjugirte Minimalcurve, deren Ordnung eine *ungerade* Zahl ist.

Die Ordnung und Classe der betreffenden Curve sind bezüglich gleich 6 und 4. Die Ordnung der Fläche ist (§ 6., 7.) gleich

$$\frac{36-2\cdot 3}{2}=15.$$

Diese Fläche ist von Henneberg entdeckt worden. Nach meinen früheren Entwickelungen müssen a und b conjugirte Punkte des Kugelkreises sein. A kann arbiträr gewählt werden; hinterher wird B nach meinen früheren Regeln bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die vorliegende Fläche *gar keine Constante*, wie die Entwickelungen in Nummer 37. zeigen.

4) Die Hypothese

$$M(R-M)=6$$

wird nicht durch die Annahme

$$M=1,\quad R=7$$

erfüllt, da R eine gerade Zahl sein soll. Es bleibt also nur die Annahme

$$M=2,\quad R=5,$$

die aus demselben Grunde keine sich selbst conjugirte Minimalcurve geben kann.*) Es giebt daher keine reelle Doppelfläche sechster Classe.

5) Die Hypothese

$$M(R-M)=7$$

giebt

$$M=1,\quad R=8$$

und

$$R=8=2(m_1+\cdots+m_g)+2g+2,$$

woraus

$$g=1,\quad m_1=2$$

und

$$F(s)=\frac{A}{(s-a)^2}+\frac{B}{s-a}+\frac{C}{(s-\alpha)^2}+\frac{D}{s-\alpha}.$$

Hier sind A, B und a arbiträr, dagegen C, D und α bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die Fläche noch zwei reelle Constanten. Die Ordnung der betreffenden Minimalcurve ist 8; die Ordnung der Fläche ist gleich

$$\frac{64-2\cdot 4}{2}=28.$$

6) Die Hypothese

$$M(R-M)=8$$

wird nicht befriedigt durch die Annahme

---

*) Man könnte die Ueberlegung auch in mehr specieller Form durchführen: Es giebt allerdings eine Minimalcurve vom Range 5 mit zwei unendlich entfernten Punkten. Da aber diese Punkte ungleichartig sind, kann die Curve nicht sich selbst conjugirt sein.

$$M = 1, \quad R = 9,$$

da R keine ungerade Zahl sein darf. Es bleibt noch die Hypothese

$$M = 2, \quad R = 6.$$

Nun habe ich mich allerdings überzeugt, dass es eine Doppelfläche achter Classe giebt, die dieser Annahme entspricht; es ist mir aber nicht gelungen zu entscheiden, ob diese Fläche *reell* sein kann. Ist dies möglich, so muss die Ordnung der betreffenden Fläche gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{2} = 11$$

sein*).

7) Die Hypothese

$$M(R - M) = 9$$

wird befriedigt durch

$$M = 1, \quad R = 10,$$

woraus entweder folgt

$$g = 1, \quad m_1 = 3,$$

oder auch

$$g = 2, \quad m_1 = m_2 = 1,$$

so dass es jedenfalls zwei verschiedene Arten reeller Doppelflächen neunter Classe giebt. Man hat ferner die Hypothese

$$M = 3, \quad R = 6,$$

die ich noch nicht erledigt habe. Ich habe allerdings gefunden, dass es eine Doppelfläche 9^{ter} Classe, 6^{ter} Ordnung giebt; ich weiss aber nicht, ob diese Fläche *reell* sein kann. (Vergl. die beiden folgenden Paragraphen.)

§ 11.

Eine polare Beziehung zwischen zwei Liniencomplexen.

41. Bei den Untersuchungen über Minimalcurven, die, wie ich zeigte, für die Theorie der algebraischen Minimalflächen von grösster Wichtigkeit sind, stützt man sich häufig vortheilhaft auf einen Zusammenhang zwischen allen Minimalcurven und allen Curven, deren Tangenten einem linearen Liniencomplexe angehören. In einer liniengeometrischen Abhandlung (Ueber Complexe ··· Math. Ann. Bd. V.) habe ich diesen Zusammenhang, der durch eine eigenthümliche Abbildung vermittelt wird, schon ziemlich ausführlich besprochen. Hier werde ich denselben etwas näher verfolgen.

Interpretirt man in den Gleichungen

$$-Zz = x - (X + iY),$$

$$(Z - iY)z = y - Z$$

X, Y, Z und x, y, z als Cartesische Punktcoordinaten zweier Räume,

*) Ich finde nachträglich, dass diese Fläche nie reell ist [Nr. 78].

so werden den Punkten x, y, z diejenigen Geraden im Raum X, Y, Z zugeordnet, die den Kugelkreis schneiden. Auf der anderen Seite werden den Punkten X, Y, Z alle Geraden eines gewissen linearen Complexes im Raume x, y, z zugeordnet. Schreibt man die Gleichungen der geraden Linien im Raume x, y, z folgendermassen

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma,$$

so ist

$$r + \sigma = 0$$

die Gleichung in Liniencoordinaten des besprochenen linearen Complexes.

Jede Curve, deren Tangenten diesem linearen Complexe gehören, wird durch meine Abbildung einer Minimalcurve im Raume X, Y, Z zugeordnet.

Bei der Abbildung ist der Kugelkreis ein Fundamentalgebilde im Raume X, Y, Z. Im Raume x, y, z tritt die unendlich entfernte Gerade der xy-Ebene als Fundamentalgebilde auf. Diese Gerade möge mit g bezeichnet werden.

Es bestehen jetzt mehrere Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen zweier entsprechenden Curven. Wir werden diejenigen dieser Relationen, die wir später brauchen, entwickeln.

Es sei k eine Curve, deren Tangenten dem linearen Complexe angehören; sei o ihre Ordnung, c ihre Classe, r ihr Rang, m die Multiplicität der Geraden g als Tangente*), i die Zahl der Inflexionstangenten, die g nicht schneiden, s die Zahl der Spitzen, deren Tangente g nicht schneidet. Endlich möge μ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte zwischen der Curve und einer beliebigen durch g gehenden Ebene sein, die auf g liegen.

Sei andererseits K die entsprechende Minimalcurve im Raume X, Y, Z. Sei O ihre Ordnung, C ihre Classe, R ihr Rang, M die Multiplicität des Kugelkreises auf der Developpablen, J die Zahl der Inflexionstangenten, deren Berührungspunkt nicht unendlich entfernt ist, S die Zahl der Spitzen, die nicht auf dem Kugelkreise liegen.

42. Wir werden einige zwischen diesen Zahlen bestehende Relationen entwickeln.

1) Wir nehmen einen Punkt des Kugelkreises, der nicht auf K liegt. In diesem Punkte legen wir eine beliebige Tangentenebene an den Kugelkreis. Diese Ebene schneidet K in O im endlichen Raume gelegenen Punkten. Andererseits enthält diese Ebene einfach unendlich

*) Bestimmter ausgesprochen soll m folgendermassen definirt werden. Eine Gerade allgemeiner Lage im Raume x, y, z schneidet die Developpable unserer Curve in r Punkten; begegnet sie insbesondere der Fundamentalgeraden g, so giebt es unter den r Schnittpunkten eine gewisse Anzahl, die in den Schnittpunkt der beiden Geraden zusammengefallen sind. Diese Anzahl bezeichne ich mit m.

viele Minimalgeraden, deren Bildpunkte x, y, z eine gerade Linie γ erzeugen, die g schneidet. Nun aber trifft γ ausser g eine gewisse Anzahl und zwar $r - m$ Tangenten der Curve k. Die Bildpunkte dieser Tangenten sind die früher besprochenen O Punkte im Raume X, Y, Z; daher ist

$$O = r - m.$$

2) Ich schneide die Developpable der Minimalcurve mit einer beliebigen Minimalgeraden, und erhalte $R - M$ im endlichen Raume gelegene Schnittpunkte. Die Punkte unserer Geraden geben im Raume x, y, z einfach unendlich viele Complexlinien, die einen ebenen Büschel bilden. Unter diesen Complexlinien giebt es o, welche die Curve k treffen. Nun aber sind die $R - M$ Schnittpunkte in (X, Y, Z) die Bildpunkte von den soeben besprochenen o Complexlinien. Also kommt

$$o = R - M.$$

3) Eine durch g gehende Ebene schneidet die Curve k in $o - \mu$ Punkten, die nicht auf g liegen. Nun aber sind überhaupt die Punkte unserer Ebene Bildpunkte aller Minimalgeraden, die durch einen gemeinsamen Punkt des Kugelkreises gehen. Daher sind die besprochenen $o - \mu$ Punkte die Bildpunkte derjenigen Tangenten der Curve K, die durch den besprochenen Punkt des Kugelkreises gehen. Und da es jedesmal M Tangenten giebt, die einen Punkt des Kugelkreises treffen, so ist

$$M = o - \mu.$$

[Früher haben wir schon benutzt, dass jede Ebene, die den Kugelkreis berührt, aufgefasst als von Minimalgeraden erzeugt, im Raume x, y, z eine Gerade γ liefert, die g schneidet; und zwar ist γ eine Complexlinie. Diese Bemerkung giebt eine Relation zur Bestimmung der Classe unserer Minimalcurve. Die Osculationsebenen der Minimalcurve berühren nämlich den Kugelkreis, und liefern daher Complexlinien γ, die g schneiden. Daher liefern die durch einen Punkt gehenden Osculationsebenen der Minimalcurve diejenigen Linien des linearen Complexes, die gleichzeitig die Curve k, die Gerade g und ausserdem noch eine Complexlinie schneiden. Die Classe der Minimalcurve ist daher gleich der Zahl der Schnittpunkte zwischen der Curve k und derjenigen Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende Complexlinien sind, welche ausser g noch eine Complexlinie schneiden; vorausgesetzt wird dabei, dass von den auf g gelegenen Schnittpunkten abgesehen wird. Diese Methode hängt genau zusammen mit unserer früheren Formel

$$C = 2M + N,$$

wo N die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene der Minimalcurve bezeichnet. Hier möge noch das Folgende,

dessen Richtigkeit später nachgewiesen wird, zugefügt sein. Berührt k die Gerade g, so osculirt die Minimalcurve die unendlich entfernte Ebene. Ist g eine gewöhnliche Inflexionstangente, so ist die unendlich entfernte Ebene eine zweifach zählende Osculationsebene der Minimalcurve. Schneidet k die Gerade g ohne sie zu berühren, so hat die Minimalcurve eine Spitze auf dem Kugelkreise, die Tangente der Spitze ist zugleich die Tangente des Kugelkreises.]

Man sieht leicht, dass

$$i = S, \quad J = s$$

ist.

[Beiläufig möge bemerkt werden, dass die in §8. gefundene Relation

$$O + C - 2R + 2 = 0,$$

die für eine ausgedehnte Kategorie von Minimalcurven bewiesen wurde, für die entsprechenden Complexcurven die noch einfachere Relation

$$r - 2o + 2 = 0$$

liefert. Die betreffenden Complexcurven sind dadurch charakterisirt, dass sie eine gewisse Complexlinie in $o - 1$ Punkten treffen.]

---

43. Ich werde nun diese Abbildung auf die einfachsten Minimalcurven anwenden.

Ich nehme im Raume x, y, z eine Raumcurve 3. O., deren Tangenten dem linearen Complexe gehören, dabei setze ich voraus, dass die Curve die Gerade g berührt. Also ist

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist

$$M = 1, \quad O = 3, \quad R = 4, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Diese Formeln zeigen, dass es eine Minimalcurve 3. O. giebt, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Der Rang derselben ist gleich 4. Dies ist bekanntlich richtig. Wir erkennen ferner, dass die Berührung zwischen g und der Complexcurve 3 O. eine Osculirung der Minimalcurve mit der unendlich entfernten Ebene giebt. Hieraus folgt der allgemeine Satz, dass *eine jede Complexcurve, die g berührt, eine Minimalcurve liefert, die die unendlich entfernte Ebene osculirt.*

Sei andererseits gegeben eine Complexcurve 3. O., die g schneidet. Alsdann ist

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 5, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Und es giebt in der That eine Minimalcurve vierter Ordnung und vom Range 5, die den Kugelkreis zweifach enthält. Diese Curve hat bekanntlich keine im endlichen Raume gelegene Spitze, auch keine Inflexionstangente, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Dagegen hat unsere Curve, wie ich als bekannt voraussetzen darf, eine unendlich entfernte Spitze, deren Tangente den Kugelkreis berührt. Hieraus folgt, *dass jede Complexcurve, die g schneidet, ohne jedoch diese Gerade zu berühren, eine Minimalcurve mit einer unendlich entfernten Spitze liefert. Die Tangente der Spitze berührt den Kugelkreis.*

Die Gerade g berührt die Developpable in einem Punkte, der als Schnittpunkt dreifach zählt; daher schneidet g die Developpable in noch einem Punkte. Die hindurchgehende Erzeugende bildet sich im Raume (X, Y, Z) ab als einen unendlich entfernten Punkt der Minimalcurve. Und da die Spitze als drei zusammengefallene unendlich entfernte Punkte zählt, so folgt, dass der soeben gefundene unendlich entfernte Punkt nur einfach zählt. Hieraus fliesst der allgemeine Satz: *Die unendlich entfernten Punkte einer Minimalcurve entsprechen bei unserer Abbildung denjenigen Erzeugenden der Complexcurve, die g schneiden. Eine Erzeugende, deren Berührungspunkt nicht auf g liegt, giebt einen einfach zählenden unendlich entfernten Punkt auf der Minimalcurve.*

Lass uns endlich die Complexcurve 3. O. allgemeiner Lage betrachten. Es ist dann

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0, \quad i = 0, \quad s = 0$$

und also kommt

$$M = 3, \quad O = 4, \quad R = 6, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Hiermit erkennen wir die Existenz einer Minimalcurve vierter Ordnung, vom Range 6, *die den Kugelkreis dreifach enthält*)*. Die Gerade g schneidet die Developpable der vorgelegten Minimalcurve in vier verschiedenen Punkten; dementsprechend hat unsere Minimalcurve 4. O. vier verschiedene unendlich entfernte Punkte. Die Classe dieser Minimalcurve ist gleich 6.

44. Ich wende mich nun zur Betrachtung von Curven 4. O., deren Tangenten unserem linearen Complexe gehören, um später die entsprechenden Minimalcurven zu untersuchen. Der Kürze wegen brauche ich wie früher das Wort *Complexcurve* um eine Curve, deren Tangenten dem linearen Complexe angehören, zu bezeichnen.

---

*) Dieser Specialfall der Curven 4. O. zweiter Gattung scheint zuerst von mir bemerkt worden zu sein.

Eine Complexcurve 4. O. kann bekanntlich nicht auf *zwei* Flächen zweiter Ordnung liegen*). Hieraus folgt, dass die Punkte einer solchen Curve sich *eindeutig* auf die Punkte einer Geraden beziehen lassen. Dieses vorausgesetzt, denke ich mir in einem beliebigen Punkte p der Curve die zugehörige Osculationsebene construirt. Dieselbe schneidet die Curve ausser in p nur noch in einem anderen Punkte π. Hiermit ist eine eindeutige Zuordnung je zweier Punkte der Curve festgestellt. Und da die Curve vom Geschlechte Null ist, können wir schliessen**), dass es jedenfalls einen Punkt p_0 giebt, dessen zugeordnete Punkt π_0 mit p_0 zusammenfällt. In diesem Punkte schneidet die Osculationsebene die Curve in *vier* zusammengefallenen Punkten. Und also ist entweder die Osculationsebene eine stationäre Ebene, und gleichzeitig der betreffende Punkt ein stationärer Punkt; oder auch die zugehörige Tangente ist eine stationäre Tangente.

Jedenfalls ist klar, dass eine jede Ebene, die durch die Tangente im Punkte p_0 hindurchgeht, die Curve ausser in p_0 nur noch in *einem* Punkte schneidet.

Dieses vorausgesetzt werde ich der Complexcurve 4. O. eine solche Lage geben, dass die Gerade g die Curve im Punkte p_0 berührt. Es ist***)

$$o = 4, \quad r = 6, \quad \mu = 3.$$

Hieraus folgt

$$M = 1. \quad R = 5.$$

Die erhaltene Minimalcurve ist daher die bekannte Curve 4. O. vom Range 5, die eine Spitze enthält.

Es ist leicht die Darstellung dieser Curve vermöge der *Weierstrass'schen* Formeln zu finden; denn es ist (Nr. 33.)

$$O = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2$$

woraus

$$4 = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$5 = m_1 + \cdots + m_q + q + 2$$

und durch Elimination

$$q = 1, \quad m_1 = 2,$$

---

*) Die Curven 4. O., die auf *zwei* Flächen zweiten Grades liegen, sind, wenn ich nicht irre, genau untersucht. Dagegen sind die Specialfälle der übrigen Curven 4. O. noch nicht eingehend genug betrachtet worden.

**) Man nehme eine feste Gerade γ, die die Curve in drei Punkten schneidet, und construire die Ebenen γp und $\gamma\pi$; dieselben bilden eine *Involution* mit *zwei* Doppelelementen. Die Gerade $p\pi$ ist nämlich eine Complexlinie.

***) Der Rang einer *allgemeinen* Curve 4. O., die nur auf *einer* Fläche zweiter Ordnung liegt, ist 6. Der Rang einer speciellen Curve dieser Art kann bekanntlich nicht gleich 5 oder 4 sein.

so dass

$$F(s) = \frac{A}{(s-\alpha)^2} + \frac{B}{s-\alpha}$$

wird. Diese Minimalcurve hat eine unendlich entfernte stationäre Ebene; dementsprechend ist im Raume des linearen Complexes die Gerade g eine Inflexionstangente der Complexcurve 4. O. Dass diese Curve noch eine Inflexionstangente besitzt, geht daraus hervor, dass die Minimalcurve eine im endlichen Raume gelegene Spitze besitzt.

In dieser Weise finden wir den folgenden Satz, der möglicherweise einen kleinen Beitrag zur Theorie der Raumcurven 4. O. liefert:

*Es giebt nur eine Curve vierter Ordnung, deren Tangenten einem linearen Complexe gehören. Dieselbe besitzt zwei Inflexionstangenten**).

Auf diese Weise habe ich bekannte Eigenschaften einer Minimalcurve zur Auffindung von Eigenschaften der entsprechenden Complexcurve verwerthet. Jetzt werde ich, indem ich der gefundenen Complexcurve eine *neue Lage* gebe, aus ihren bekannten Eigenschaften die charakteristischen Zahlen derjenigen Minimalcurve, die der neuen Lage entspricht, herleiten.

Lass mich zunächst annehmen, dass die Gerade g eine gewöhnliche Tangente der Complexcurve 4. O. ist. Alsdann ist

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0;$$

also kommt

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 5, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft zwei Erzeugende der Complexcurve; dementsprechend erkennen wir, dass die Minimalcurve zwei einfach zählende unendlich entfernte Punkte besitzt; ausserdem osculirt sie die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte.

Lass mich ferner annehmen, dass die Complexcurve 4. O. die Gerade g in *zwei* verschiedenen Punkten schneidet, was nach dem Vorangehenden denkbar ist. Alsdann ist

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 0, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0$$

und folglich wird

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 6, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft die Developpable nur in den beiden Punkten der Complexcurve. Dementsprechend hat die Minimalcurve nur zwei unendlich entfernte Punkte, welche alle beide Spitzen sind, deren Tangenten den Kugelkreis berühren (Nr. 43.).

---

*) Diese Curve, welche ich im Jahre 1870 eben in dieser Weise fand, war schon früher von Cayley und Cremona betrachtet worden.

Wir können sodann annehmen, dass die Gerade g die Complexcurve nur in einem Punkte schneidet, alsdann ist

$$o=4,\quad r=6,\quad m=0,\quad \mu=1,\quad s=0,\quad i=2 \text{ (oder } i=1),$$

woraus

$$M=3,\quad R=7,\quad O=6,\quad J=0,\quad S=2 \text{ (oder } S=1).$$

Endlich können wir annehmen, dass die Gerade g die Complexcurve g gar nicht schneidet, dabei ist denkbar, dass doch noch die eine oder beide Inflexionstangenten die Gerade g treffen. Es ist leicht, die charakteristischen Zahlen der drei betreffenden Minimalcurven anzugeben.

45. Die vorangehenden Entwickelungen erlauben u. A. die allgemeinsten Minimalcurven, die den Annahmen

$$M=2,\quad R=6$$

oder

$$M=3,\quad R=7$$

oder endlich

$$M=4,\quad R=8$$

entsprechen, anzugeben. Denn es wird jedenfalls

$$R-M=4=o,$$

sodass die entsprechende Curve im linearen Complexe von der vierten Ordnung ist. Und wir haben soeben die allgemeinste Complexcurve vierter Ordnung bestimmt. Soll insbesondere

$$M=2,\quad R=6$$

sein, so kommt, da $o=4$ ist,

$$\mu=2.$$

Diese Relation kann aber nur in zwei Weisen erfüllt werden. Entweder ist g eine gewöhnliche Tangente der Curve oder auch, es schneidet g die Curve in zwei verschiedenen Punkten. Die beiden entsprechenden Minimalcurven sind früher discutirt worden. —

Ich erinnere zum Schlusse noch an Folgendes. Wird der Raum x, y, z linear transformirt, und geht dabei unser linearer Complex in sich über, so wird nach meinen Untersuchungen (Ueber Complexe, Math. Ann. Bd. V.) der Punktraum X, Y, Z *conform* transformirt.

§ 12.

Bestimmung reeller Minimalflächen von gegebener Ordnung.

Das Problem, alle reelle Minimalflächen von gegebener Ordnung zu bestimmen, ist im Allgemeinen mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft. Doch ist seine Erledigung mir in mehreren speciellen

Fällen gelungen. Und ich vermuthe, dass der von mir eingeschlagene Weg noch weiter führen kann. Wie bei den entsprechenden Untersuchungen über Minimalflächen gegebener *Classe* betrachte ich die zweierlei Arten von Minimalflächen für sich.

46. Zuerst werde ich suchen reelle Minimalflächen gegebener Ordnung zu bestimmen, indem *ich die Doppelflächen ausschliesse.*

Ich wähle (vergl. Nummer 28.) auf einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, eine Minimalcurve jeder Schaar. Der Inbegriff dieser beiden Curven schneidet die unendlich entfernte Ebene in einer geraden Anzahl von Punkten, die paarweise conjugirte Punkte des Kugelkreises sind. Seien

$$P_1 \dots P_q, \quad \Pi_1 \dots \Pi_q$$

diese Punkte und seien P_k und Π_k jedesmal conjugirte Punkte. Ich setze voraus, dass für die eine Curve jeder Punkt P_k als p_k-facher Schnittpunkt mit der unendlich entfernten Ebene zählt, und dass ebenso für dieselbe Curve jeder Punkt Π_k als π_k-facher Schnittpunkt zählt. Alsdann zählen die Punkte P_k und Π_k für die zweite Curve bezüglich als π_k-facher und p_k-facher Schnittpunkt.

Die Ordnung einer jeden auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurve allgemeiner Lage ist gleich

$$\sum p_k + \sum \pi_k\,.$$

Die Ordnung der Fläche ist nach unseren früheren Untersuchungen (§ 6. und 7.) jedenfalls nicht kleiner als

$$\left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2\sum p_k \pi_k$$

und also auch nicht kleiner als

$$\sum p_k^2 + \sum \pi_k^2\,.$$

Ich kann ohne Beschränkung annehmen, dass $p_1\, p_2 \dots p_q$ sämmtlich grösser als Null sind, während einige unter den Zahlen $\pi_1\, \pi_2 \dots \pi_q$ im Allgemeinen gleich Null sind. Ich nehme ferner an, dass jede Zahl p_k gleich oder grösser als π_k ist, und endlich dass p_k gleich oder grösser als p_{k+1} ist.

47. Es ist jetzt leicht alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung nicht grösser als 16 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Zunächst zeige ich, dass es keine derartige Fläche giebt, deren Ordnung kleiner als 9 ist.

Existirte eine Fläche, deren Ordnung O' kleiner als 9 wäre, so müsste, da

$$(1) \qquad O' \geqq \sum p_k^2 + \sum \pi_k^2$$

ist, p_1 kleiner als 3 sein. Sei nun zunächst

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 2.$$

Ist dabei p_2 grösser als Null, so müsste wegen der Formel

$$(2) \qquad O' \gtreqless \left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2 \sum p_k \pi_k$$

die Ordnung der Fläche jedenfalls gleich 17 sein. Es bleibt also nur die Hypothese $p_2 = 0$ zu untersuchen. Es lässt sich aber nachweisen, dass es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die die unendlich entfernte Ebene in zwei distincten, doppeltzählenden Punkten schneidet. Denn es giebt keine derartige Minimalcurve 4. O., die auf *zwei* Flächen zweiter Ordnung liegt. Und die Minimalcurven 4. O., die nur auf *einer* Fläche zweiter Ordnung liegen, und welche dabei bekanntlich vom Range 6 sind, entsprechen nothwendig, da $R - M \gtreqless 3$ ist, einer der folgenden Annahmen

$$M = 1, \quad R = 6, \quad O = 4,$$
$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 4,$$
$$M = 3, \quad R = 6, \quad O = 4,$$

unter denen die erste unmöglich ist, indem die beiden Gleichungen

$$m_1 + \cdots + m_q + q + 2 = R = 6,$$
$$m_1 + \cdots + m_q + 2q \quad = O = 4$$

die unmögliche Relation $q = 0$ nach sich ziehen würden. Die zweite Annahme (vergl. Nummer 44.) giebt

$$R - M = 4 = o, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2,$$

sodass die Curve im linearen Complexe von der Geraden g in zwei consecutiven Punkten berührt würde; dann aber hätte die Minimalcurve die unendlich entfernte Curve zu stationärer Osculationsebene, womit wir auf Widerspruch geführt sind. Endlich die dritte Annahme würde geben

$$R - M = 3 = o.$$

Nun sahen wir allerdings in Nummer 43., dass die Annahme $o = 3$ auf Minimalcurven 4. O. führen könnte, doch waren die unendlich entfernten Punkte dieser Curven nie so gelegen, wie oben verlangt wurde*). In dieser Weise erkennen wir, dass es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die der Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2$ entspricht, und dass in Folge dessen die Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2$ . . . oder sage ich

*) Ich bemerke beiläufig, dass die Entwickelungen des Textes eine erschöpfende Bestimmung aller Minimalcurven 4. O. liefern.

kurzweg *die Hypothese* (22) . . . *keine Fläche giebt, deren Ordnung niedriger als* 17 *ist.*

Wir wenden uns jetzt zu der Hypothese (21) . . ., das heisst wir setzen voraus, dass $p_1 = 2$, $\pi_1 = 1$ ist, während wir die Werthe der Zahlen p_2, π_2 u. s. w. unbestimmt lassen. Ist nun p_2 gleich 2, so ist die Ordnung der Fläche gleich oder grösser als 21. Ich werde nachweisen, dass die Hypothese $p_2 = 1$ nur für Minimalcurven, deren Ordnung grösser als 4 ist, eintreten kann. Existirte in der That eine Minimalcurve 4. O., die der Hypothese

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad \pi_2 = 0, \quad p_3 = 0$$

entspräche, so müsste

$$R = 6$$

sein, während M nicht grösser als 3 sein könnte. M kann nicht gleich 1 sein, da die Zahlen p_k und π_k nicht sämmtlich grösser als 2 sind. Die Hypothese $M = 2$ giebt

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2.$$

In Folge dessen müsste g eine Inflexionstangente der Complexcurve, und andererseits die unendlich entfernte Ebene eine stationäre Osculationsebene der Minimalcurve sein, sodass wir auf Widerspruch geführt sind. Endlich die Hypothese $M = 3$ giebt

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0.$$

Wir haben aber früher gesehen, dass die dieser Complexcurve entsprechende Minimalcurve die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten schneidet. Hiermit ist nachgewiesen, dass Minimalcurven, die der Hypothese

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1 \cdots$$

entsprechen, von fünfter oder noch höherer Ordnung sind. *Folglich ist die Ordnung der entsprechenden Flächen gleich oder grösser als* 19.

Ist $p_1 = 2$, $\pi_1 = 0$, so muss p_2 grösser als Null sein, indem es keine Minimalcurve zweiter Ordnung giebt. Ist p_2 gleich 1, so muss unsere Curve nach dem soeben Entwickelten jedenfalls von der fünften Ordnung sein, so dass die betreffende Fläche *jedenfalls von der* 23ten *Ordnung* sein muss. Ist endlich $p_2 = 2$, so muss die Minimalcurve jedenfalls von der fünften, die Fläche *jedenfalls von der* 25ten *Ordnung* sein.

So bleibt nur noch die Annahme, dass p_1 gleich 1 ist, und dass in Folge dessen die π_k und die übrigen Grössen p_k gleich 1 oder Null sind. Hierbei können verschiedene Unterfälle eintreten. Zunächst werden wir annehmen, dass die betreffenden Minimalcurven von der *vierten* Ordnung sind. Alsdann giebt die Hypothese (11) (11) eine Fläche zwölfter Ordnung, die Hypothese (11) (10) (10) eine

Fläche vierzehnter Ordnung, endlich die Hypothese (1,0) (1,0) (1,0) (1,0) eine Fläche sechszehnter Ordnung. Diese drei Flächen sind (Nr. 43.) sämmtlich von der achtzehnten Classe. Ist die Ordnung unserer Minimalcurve grösser als vier, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche jedenfalls grösser als 21.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Ordnung einer jeden reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, jedenfalls grösser als 8 *ist.*

Wünscht man, indem man fortwährend alle Doppelflächen ausschliesst, alle reellen Minimalflächen von der neunten Ordnung zu bestimmen, so zeigen die obenstehenden Entwickelungen, dass p_1 nicht kleiner als 3 sein darf. Auf der anderen Seite zeigt die Formel (1), dass p_1 auch nicht grösser als 3 sein kann, und dass dabei die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein müssen. Und da es nur eine Minimalcurve dritter Ordnung giebt, fliesst hieraus der Satz:

Satz 58. *Die Enneper'sche Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Classe ist die einzige Minimalfläche neunter Ordnung, die keine Doppelfläche ist.*

48. Verlangt man alle Flächen, deren Ordnung nicht 16 übersteigt, so kann p_1 nicht grösser als 4 sein. Ist p_1 gleich 4, so müssen die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein. Die zugehörige Minimalcurve ist daher von der vierten Ordnung. Liegt dieselbe auf zwei Flächen zweiten Grades, so ist ihr Rang gleich 5; die betreffende Fläche ist von der Ordnung 16 und von der Classe 8. Ist dagegen die Minimalcurve eine solche Curve vierter Ordnung, die nur auf einer Fläche zweiten Grades gelegen ist, so muss nach einer früheren Bemerkung die Grösse M entweder gleich 2 oder gleich 3 sein. Ist

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2, \quad \mu = o - M = 2,$$

was contradictorisch ist, indem eine Complexcurve 4. O. nicht eine solche Lage hinsichtlich der Geraden g haben kann, dass gleichzeitig $m = 2$, $\mu = 2$ ist. Ist andererseits

$$M = 3 \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = r - O = 0,$$

sodass unsere Minimalcurve vier verschiedene, und nicht wie früher vorausgesetzt, vier vereinigte unendlich entfernte Punkte haben müsste. Hiermit ist gezeigt, dass die *Hypothese* (4,0) *nur eine Fläche sechszehnter Ordnung, achter Classe giebt.*

Ist $p_1 = 3$, so kann π_1 nicht grösser als 2 sein, und dann müssen die übrigen p_k und π_k gleich Null sein, so dass die Minimalcurve von

der fünften Ordnung ist. Ich werde zeigen, dass die Ordnung der entsprechenden Minimalflächen jedenfalls grösser als 16 ist.

Lass mich zunächst voraussetzen, dass die durch den Punkt P_1 hindurchgehenden Curvenzweige durch eine *einzige* Reihenentwickelung dargestellt, und dass ebenso die durch Π_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind. Der niedrigste Exponent der ersten Entwickelung ist dann entweder $\frac{3}{1}$ oder $\frac{3}{2}$ oder $\frac{3}{3}$. Der niedrigste Exponent der zweiten Entwickelung ist $\frac{2}{1}$ oder $\frac{2}{2}$. Unsere Annahme führt also auf sechs verschiedene Fälle:

1) Sind die niedrigsten Exponenten bezüglich $\frac{3}{1}$ und $\frac{2}{1}$, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche gleich oder grösser als 21.

2) Die Exponenten $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 20 ist.

3) Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 18 ist.

4) Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 16 ist.

5) Die Exponenten $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 18 ist.

6) Die Exponenten $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{2}$ können nicht gleichzeitig vorkommen, indem keine Raumcurve 5^{ter} Ordnung gleichzeitig einen dreifachen und einen zweifachen Punkt haben kann.

Sind die durch P_1 gehenden Zweige nicht durch eine einzige, sondern durch *zwei* oder *drei* Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden niedrigsten Exponenten im ersten Falle $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, im zweiten Falle $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$. Sind andererseits die durch Π_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden Exponenten $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$.

Indem man successiv alle möglichen Fälle berechnet, und dabei berücksichtigt, dass ein dreifacher und zweifacher Punkt nicht gleichzeitig auftreten können, erkennt man, dass die Annahme (3, 2) nur Flächen giebt, deren Ordnung grösser als 16 ist.

Die Hypothese (3, 1) giebt bekanntlich nur eine Minimalcurve vierter Ordnung, fünften Ranges. Die entsprechende Minimalfläche ist von der *zwölften Ordnung und der zwölften Classe*. Die Hypothese (3, 1)... giebt nur Flächen, deren *Ordnung grösser als* 18 *ist*.

Die Hypothese (3, 0) giebt die Enneper'sche Fläche neunter Ord-

nung. Die Hypothese (3, 0) . . . giebt nur eine Fläche sechszehnter Ordnung, zwölfter Classe.

Die Flächen, die den Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ entsprechen, sind früher bestimmt worden. Und also ist es uns wirklich gelungen alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als 17 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Ich stelle die betreffenden Flächen in dem folgenden Schema zusammen.

Hypothese.	Ordnung.	Classe.
(4,0)	16	8
(3,1)	12	12
(3,0) (1,0)	16	12
(3,0)	9	6
(1,1) (1,1)	12	18
(1,1) (1,0) (1,0)	14	18
(1,0) (1,0) (1,0) (1,0)	16	18

49. Es ist schwieriger, alle *Doppelflächen* von gegebener Ordnung zu bestimmen. Ich werde diejenigen Resultate, die ich bis jetzt erhalten habe, auseinandersetzen.

Da die betreffenden Minimalcurven sich selbst conjugirt sind, so wird

$$p_k = \pi_k .$$

Bezeichnen wir die Ordnung der Doppelfläche mit O'', so ist nach unseren früheren Untersuchungen

$$O'' \gtreqless 2\left(\sum p_k\right)^2 - \sum p_k^2 ,$$

und also zugleich

$$O'' \gtreqless \sum p_k^2 .$$

Verlangen wir, dass O'' niedriger als 9 sein soll, so muss nach der letzten Formel p_1 entweder gleich 2 oder gleich 1 sein.

Da es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die der Hypothese (2,2) entspricht, so erkennen wir, dass die *Annahme $p_1 = 2$ nur Doppelflächen, deren Ordnung grösser als 12 ist, liefert.*

Es bleibt also nur die Annahme $p_1 = 1$. Die Hypothese

$$(1,1),\ (1,1)$$

giebt bekanntlich (Nr. 40., 43.) eine Doppelfläche sechster Ordnung, neunter Classe, wobei indess wie früher unentschieden bleibt, ob dieselbe reell sein kann. — Die Hypothese

$$(1,1)\ (1,1)\ (1,1)$$

giebt nur Doppelflächen, deren Ordnung grösser als 14 *ist.* Also kommt, indem wir zugleich an unsere früheren Ergebnisse erinnern:

Satz 59. *Giebt es reelle Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als neun ist, so muss ihre Ordnung gleich sechs, ihre Classe gleich neun sein.*

Wir stellen sodann die Frage nach den reellen Doppelflächen, deren Ordnung nicht grösser als 15 ist.

Es ist zunächst klar, dass p_1 nicht grösser als 3 sein darf. Und da wir schon die beiden Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ behandelt haben, bleibt nur die Hypothese $p_1 = 3$ übrig. Ist dabei p_2 grösser als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Doppelflächen jedenfalls gleich 22. Wir haben daher nur zu untersuchen, welche Doppelflächen der Hypothese

$$(3,3)$$

entsprechen.

Es können drei verschiedene Fälle eintreten; wir werden dieselben der Reihe nach betrachten.

1) Lass uns zunächst voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Curvenzweige durch dieselbe Reihenentwickelung dargestellt werden, und dass der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{1}$ ist. Die entsprechenden Minimalflächen sind von der *fünfzehnten* Ordnung. Hierher gehört die Henneberg'sche Fläche fünfter Classe. Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob es mehrere reelle Doppelflächen fünfzehnter Ordnung giebt, die unserer Hypothese entsprechen. Ist dies der Fall, so ist ihre Classe dargestellt durch die Formel

$$M(M+4)$$

und also gleich 12, 21 oder noch grösser.

2) Wir setzen fortwährend voraus, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind; und sei jetzt der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{2}$. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2\cdot 4 - 2\cdot 3}{2} = 11.$$

Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob diese Hypothese *reelle* Doppelflächen liefert.

3) Es bleibt nur die Annahme, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt sind, und dass $\frac{2}{1}$ und $\frac{1}{1}$ die betreffenden Exponenten sind. Die Ordnung der entsprechenden Flächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = 13.$$

Ich weiss indess nicht, ob diese Hypothese reelle Doppelflächen liefern kann.

Früher haben wir schon gesehen, dass die Hypothese $p_1 = 2$ jedenfalls nur Flächen, deren Ordnung grösser als 12 ist, liefert. Ich werde versuchen diese Hypothese etwas näher zu discutiren. Ist p_2 grösser als 1, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen jedenfalls grösser als 23. Andererseits kann p_2 nicht Null sein, indem die Hypothese (2,2) keine Minimalcurve vierter Ordnung liefert. Daher muss $p_2 = 1$ sein. Ist dabei p_3 grösser als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen grösser als 25. Wir brauchen somit nur die Hypothese

$$(2,2)\ (1,1)$$

zu untersuchen. Es können drei Fälle eintreten:

1) Lass uns zunächst voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Curvenzweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und dass der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{1}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2} = 15.$$

2) Lass uns andererseits voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und dass der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{2}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{2} = 13.$$

3) Endlich haben wir noch die Annahme, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt sind und dass die betreffenden Exponenten gleich $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{1}$ sind. Die reellen Doppelflächen, die dieser Annahme entsprechen mögen, sind von der 13^{ten} Ordnung.

Aus dem Vorangehenden fliesst der Satz:

Satz 59. *Es giebt keine reelle Doppelfläche, deren Ordnung gleich einer der folgenden Zahlen*

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14$$

ist. Dagegen lasse ich unentschieden, ob die Ordnung einer reellen Doppelfläche gleich 6, 11, *oder* 13 *sein kann**).

---

*) Die interessante Frage, ob es Doppelflächen sechster Ordnung giebt, kann nach dem Vorangehenden auch folgendermassen formulirt werden: *Kann eine Minimalcurve 3. O. durch eine Transformation durch reciproke Radien in eine sich selbst conjugirte Curve umgewandelt werden?*

Im Uebrigen betrachte ich den folgenden Satz als das wichtigste Ergebniss meiner Untersuchungen über Minimalflächen gegebener Ordnung:

Satz 60. *Die Summe der Ordnung und der Classe einer reellen Minimalfläche, sie möge eine Doppelfläche sein oder nicht sein, ist immer grösser als* 14.

§ 13.

Der Asymptotenkegel zerfällt in Ebenen.

50. Ich werde jetzt die unendlich entfernten Punkte einer algebraischen Minimalfläche bestimmen. Dabei setze ich zunächst voraus, dass die Minimalcurven der einen Schaar keinen unendlich entfernten Punkt enthalten, der zugleich den Minimalcurven der zweiten Schaar angehört.

Sei

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

eine Minimalcurve der einen Schaar, deren Ordnung gleich m sein mag. Und sei

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

eine Minimalcurve der zweiten Schaar, die von der p^{ten} Ordnung ist. Alsdann ist die Ordnung der Fläche gleich mp.

Die Curven der ersten Schaar haben m gemeinsame unendlich entfernte Punkte; ebenso haben die Curven der zweiten Schaar p gemeinsame unendlich entfernte Punkte, wobei zu bemerken ist, dass einige unter diesen m oder p Punkten vereinigte Lage haben können. Ich verbinde die m Punkte mit den p Punkten durch gerade Linien, und erhalte hierdurch mp Gerade, unter denen einige unter Umständen zusammenfallen.

Ich wähle einen beliebigen unendlich entfernten Punkt Q, der jedoch nicht auf den besprochenen Geraden liegen darf, und ziehe eine durch Q gehende Gerade allgemeiner Lage. Um die Schnittpunkte dieser Geraden mit unserer Fläche mp^{ter} Ordnung zu finden, verfährt man nach den Untersuchungen in § 6. folgendermassen. Man construirt die beiden Kegel, welche bezüglich die Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C(\tau)$$

enthalten, und für welche dabei Q gemeinsame Spitze ist. Man bestimmt die gemeinsamen Erzeugenden dieser Kegel. Die Zahl dieser Erzeugenden, die nicht in der unendlich entfernten Ebene liegen, ist gleich der Zahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Fläche und der durch Q gezogenen Geraden. Nun aber

ist klar, dass unsere Kegel nach den gemachten Voraussetzungen keine gemeinsame, unendlich entfernte Erzeugende haben. Und da unsere Kegel bezüglich von der m^{ten} und der p^{ten} Ordnung sind, so haben sie mp gemeinsame im endlichen Raume gelegene Erzeugenden, die wegen der unbestimmten Parameter a, b, c sämmtlich verschieden sein müssen. Dementsprechend schneidet eine durch Q gehende Gerade allgemeiner Lage die Fläche in mp verschiedenen Punkten. Und da die Ordnung der Fläche gleich mp ist, folgt, dass Q nicht auf der Fläche liegt.

Liegt dagegen die Kegelspitze auf einer unter den besprochenen mp Geraden, so haben die Kegel jedenfalls *eine* gemeinsame unendlich entfernte Erzeugende, und also liegt die Spitze auf der Fläche.

Setzt man daher voraus, dass die Minimalcurven der einen Schaar keinen unendlich entfernten Punkt mit den Curven der zweiten Schaar gemein haben, so besteht die Schnittcurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus mp Geraden: den Verbindungsgeraden der m unendlich entfernten Punkte der Minimalcurven der einen Schaar mit den p entsprechenden Punkten der zweiten Schaar.

51. Jetzt werden wir annehmen, dass die Curven der einen Schaar unendlich entfernte Punkte mit den Curven der zweiten Schaar gemein haben. Um die Ueberlegung möglichst eingehend führen zu können, scheint es mir zweckmässig, die Reihenentwickelungen der Minimalcurven in der Umgebung des besprochenen gemeinsamen Punktes aufzustellen.

Ich wähle mein Coordinatentetraeder in der folgenden Weise. Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Ebene, und $z = 0$ eine beliebige andere Ebene. Ich ziehe eine zur Ebene $z = 0$ senkrechte Gerade und lege durch dieselbe zwei Ebenen, die den Kugelkreis berühren. Seien $x = 0$ und $y = 0$ diese Ebenen. Wählt man diese vier Ebenen zu Coordinatenebenen, so erhält die Differentialgleichung aller Minimalcurven folgende Form:

$$d\frac{x}{t}\,d\frac{y}{t} - \left(d\frac{z}{t}\right)^2 = 0\,.$$

Ich führe

$$\frac{t}{y} = \tau\,,\quad \frac{x}{y} = \xi\,,\quad \frac{z}{y} = \zeta$$

als neue Coordinaten ein. Dieselben sind jetzt nicht mehr homogene, sondern absolute Coordinaten. Hierdurch nimmt die obenstehende Differentialgleichung die Form an:

$$d\tau\,(\xi d\tau - \tau d\xi) = (\tau d\zeta - \zeta d\tau)^2.$$

Nun werde ich die allgemeinen Reihenentwickelungen einer durch den Punkt

$$\tau = 0,\quad \xi = 0,\quad \zeta = 0$$

des Kugelkreises hindurchgehenden Minimalcurve suchen. Ich setze:

$$\tau = M_0 \zeta^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}} = \sum M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa},$$

$$\xi = L_0 \zeta^{r_0} + L_1 \zeta^{r_1} + \cdots = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und versuche, indem ich die $M_\varkappa$ als gegebene Grössen betrachte, die Coefficienten $L_\varkappa$ und die Exponenten $r_\varkappa$ derart zu bestimmen, dass die Differentialgleichung identisch befriedigt wird. Man findet die Bedingungsgleichung

$$\Sigma_\varkappa \Sigma_{\varkappa'} \Sigma_i \pi_\varkappa (\pi_{\varkappa'} - r_i) M_\varkappa M_{\varkappa'} L_i \zeta^{\pi_\varkappa + \pi_{\varkappa'} + r_i - 2}$$

$$= \Sigma_g \Sigma_{g'} (1 - \pi_g)(1 - \pi_{g'}) M_g M_{g'} \zeta^{\pi_g + \pi_{g'}},$$

die identisch bestehen soll.

Indem wir zunächst voraussetzen, dass keine unter den Gleichungen

$$\pi_0 = r_0, \quad \pi_0 = 1$$

stattfindet, ergiebt sich, dass $2\pi_0 + r_0 - 2$ der niedrigste Exponent links, und $2\pi_0$ der niedrigste Exponent rechts ist. Also ist

$$2\pi_0 + r_0 - 2 = 2\pi_0,$$

woraus

$$r_0 = 2.$$

Es ergiebt sich ferner, dass

$$r_1 = 2 + \frac{1}{q}, \quad r_2 = 2 + \frac{2}{q} \quad \text{u. s. w.}$$

und im Allgemeinen

$$r_\varkappa = 2 + \frac{\varkappa}{q} = \frac{2q + \varkappa}{q}.$$

Wir werden zeigen, dass die Coefficienten

$$L_0, L_1, \ldots, L_{p-2q-1}$$

durch die Grössen

$$M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$$

vollständig bestimmt sind. Die Grösse L_i tritt nämlich zuerst auf in dem Gliede

$$\pi_0 (\pi_0 - r_i) M_0 M_0 L_i \zeta^{\pi_0 + \pi_0 + r_i - 2}.$$

In Folge dessen ist L_i im Allgemeinen eine unzweideutige Function von

$$L_0, L_1, \ldots, L_{i-1}, \quad M_0, M_1, \ldots, M_i;$$

ausgenommen ist dabei nur der Fall, dass $r_i = \pi_0$ ist. In Folge dessen ist L_0 bestimmt durch M_0, L_1 durch M_0 und M_1 u. s. w., und endlich L_{p-2q-1} bestimmt durch $M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$; so dass *der folgende Theil*

$$L_0 \zeta^2 + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots + L_{p-2q-1} \zeta^{\frac{p-1}{q}}$$

der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ *durch die vorgelegte Reihe* $\Sigma M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa}$ *vollständig bestimmt ist.*

Ist $\pi_0 = r_0$, so bleiben die obenstehenden Betrachtungen allerdings nicht mehr gültig. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass in der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ die Coefficienten der Grössen

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}},\ \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots \text{ u. s. w.}$$

gleich Null sind, und somit durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt sind.*)

Ist endlich

$$\pi_0 = 1 \quad \text{und} \quad \pi_0 \gtrless r_0,$$

so muss

$$\pi_0 + \pi_0 + r_0 - 2 = \pi_0 + \pi_1$$

sein, woraus folgt:

$$r_0 = 2 + \pi_1 - \pi_0,$$

so dass r_0 grösser als 2 ist. Auch in diesem Falle sind daher die Coefficienten der Grössen

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}},\ \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots, \text{ u. s. w.}$$

gleich Null, und somit durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt.

Zu bemerken ist, dass r_0 nur dann gleich 1 sein kann, wenn gleichzeitig $\pi_0 = 1$ ist; *diesen einfachen Fall schliessen wir vorläufig aus.*

52. Für das Folgende ist es nothwendig, die Reihenentwickelungen einer Minimalcurve für eine etwas allgemeinere Lage des Coordinatentetraeders aufzustellen.

Ich setze:

$$\begin{aligned} \varrho t &= t', \\ \varrho x &= x', \\ \varrho y &= y' + \alpha x', \\ \varrho z &= z' + \beta x' \end{aligned}$$

und

$$\frac{t'}{y'} = \tau', \quad \frac{x'}{y'} = \xi', \quad \frac{z'}{y'} = \zeta'$$

und führe nun τ', ξ', ζ' als neue Coordinaten ein. Es ist

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau'}{1 + \alpha \xi'}, \\ \xi &= \frac{\xi'}{1 + \alpha \xi'}, \\ \zeta &= \frac{\zeta' + \beta \xi'}{1 + \alpha \xi'}. \end{aligned}$$

*) Die Annahme

$$\pi_0 = r_0$$

kann nur eintreten, wenn π_0 kleiner als 2 ist, wie man leicht einsieht.

Durch Einführung dieser Werthe findet man zunächst eine Entwickelung

$$\xi' = L_0' \zeta_0'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L'_{p-2q-1} \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots,$$

wo jede Grösse L_i' durch die Coefficienten $L_0 \ldots L_i$ bestimmt ist. Man findet ferner

$$\frac{\tau'}{1+\alpha\xi'} = M_0 \left(\frac{\zeta' + \beta\xi'}{1+\alpha\xi'}\right)^{\frac{p}{q}} + \cdots,$$

und durch Ausführung kommt

$$\tau' = M_0 \zeta'^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta'^{\frac{p+1}{q}} + \cdots$$

$$+ M_0 \frac{p}{q} \beta \zeta'^{\frac{p-q}{q}} \left(L_0' \zeta'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L'_{p-2q-1} \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

53. Lass mich annehmen, dass die *beiden* Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(t_1), \quad y = -B_1(t_1), \quad z = -C_1(t_1)$$

einer Minimalfläche durch den auf dem Kugelkreise gelegenen Punkt

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0$$

hindurchgehen. Die Reihenentwickelungen dieser Curven seien

$$\tau = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und

$$\tau_1 = \sum M_{1,\varkappa} \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \zeta^{r_{1,\varkappa}}.$$

Ich nehme an, dass

$$M_0 = M_{1,0}, \ldots M_{\nu-1} = M_{1,\nu-1}, \quad M_\nu \gtrless M_{1,\nu}$$

ist, wobei bekanntlich

$$\nu \overline{\gtrless} p - q$$

ist. Alsdann ist, wenn wir mit μ die kleinste der Zahlen ν und $p-2q$ bezeichnen, nach dem Vorangehenden

$$L_0 = L_{1,0} \ldots, \quad L_{\mu-1} = L_{1,\mu-1},$$

während im Allgemeinen

$$L_\mu \gtrless L_{1,\mu}$$

ist. Seien

$$\tau' = \sum M_\varkappa' \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi' = \sum L_\varkappa' \zeta'^{r_\varkappa}$$

und

$$\tau_1' = \sum M'_{1,\varkappa} \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi_1' = \sum L'_{1,\varkappa} \zeta'^{r_{1,\varkappa}}$$

die Reihenentwickelungen in den neuen Variabeln. Es ist dann zunächst klar, dass

$$L_0' = L'_{1,0} \ldots, \quad L'_{\mu-1} = L'_{1,\mu-1}$$

wird. Ist nun $v < p - q$, so ist

$$M_0' = M'_{1,0}, \ldots M'_{v-1} = M'_{1,v-1}, \quad M'_v \gtrless M'_{1,v}.$$

Ist dagegen $v = p - q$, so kommt allerdings

$$M_0' = M'_{1,0} \ldots M'_{p-q-1} = M'_{1,p-q-1},$$

während man nicht ohne Weiteres einsieht, dass

$$M'_{p-q} \gtrless M'_{1,p-q}$$

sein muss. Es ist

$$M'_{p-q} \;= M_{p-q} \;+ \frac{p}{q}\beta M_0 L'_{p-2q}\ldots,$$

$$M'_{1,p-q} = M_{1,p-q} + \frac{p}{q}\beta M_0 L'_{1,p-2q}\ldots$$

und da M_{p-q} und $M_{1,p-q}$ verschieden sind, so ist klar, dass M'_{p-q} und $M'_{1,p-q}$ jedenfalls nur für specielle Werthe des Parameters β einander gleich sein können. Da indess die Parameter a, b, c *allgemeine Werthe* haben sollen, so lehren die Entwickelungen der Nummer 26., dass M'_{p-q} und $M'_{1,p-q}$ auch nicht für specielle Werthe von β einander gleich sein können. Folglich ist

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau_1').$$

Haben die Reihenentwickelungen unserer Minimalcurven die Form

$$\tau = \sum M_\varkappa \, \xi^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \xi^{r_\varkappa}$$

und

$$\tau_1 = \sum M'_{1,\varkappa} \xi^{\frac{p_1+\varkappa}{q_1}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \xi^{r_{1,\varkappa}}$$

wo

$$\frac{p}{q} \gtrless \frac{p_1}{q_1}$$

ist, so ergiebt sich sogleich, dass

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau_1')$$

ist.

Erinnern wir nun, dass der Punkt

$$t' = 0, \quad z' = 0, \quad y' = 0$$

einen jeden unendlich entfernten Punkt, der nicht auf der Tangente $\xi = 0$, $\tau = 0$ des Kugelkreises liegt, darstellen kann, so ergiebt sich aus unseren früheren Untersuchungen (§ 6. und 7.) der Satz:

Gehört ein gewisser Punkt Q des Kugelkreises sowohl den Minimalcurven der einen Schaar, wie den Curven der zweiten Schaar, so liegen diejenigen unendlich entfernten Punkte der betreffenden Minimalfläche,

die von den durch Q hindurchgehenden Curvenzweigen herrühren mögen, auf der Tangente des Kugelkreises in Q.

Berührt die Tangente des Kugelkreises in Q sowohl die Minimalcurven der einen Schaar wie die Curven der zweiten Schaar, so ist es leicht zu beweisen, dass die betreffende Tangente wirklich auf der Fläche liegt. Aus den beiden Entwickelungen einer Curve der einen Schaar

$$\xi = L_0 \zeta^{\frac{2q}{q}} + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots,$$

$$\tau = M_0 \zeta^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots$$

folgen nämlich, indem man ξ als unabhängige Variable einführt, zwei Entwickelungen der Form

$$\zeta'' = l_0 \xi^{\frac{q}{2q}} + l_1 \xi^{\frac{q+1}{2q}} + \cdots,$$

$$\tau'' = m_0 \xi^{\frac{p}{2q}} + m_1 \xi^{\frac{p+1}{2q}} + \cdots$$

und dementsprechend kommt, wenn

$$\xi_1 = L_{1,0} \zeta^{\frac{2q_1}{q_1}} + L_{1,1} \zeta^{\frac{2q_1+1}{q_1}} + \cdots,$$

$$\tau_1 = M_{1,0} \zeta^{\frac{p_1}{q_1}} + M_{1,1} \zeta^{\frac{p_1+1}{q_1}} + \cdots$$

die Reihenentwickelungen einer Curve der zweiten Schaar sind, durch Einführung von ξ als unabhängiger Variabeln

$$\zeta_1'' = l_{1,0} \xi^{\frac{q_1}{2q_1}} + l_{1,1} \xi^{\frac{q_1+1}{2q_1}} + \cdots,$$

$$\tau_1'' = m_{1,0} \xi^{\frac{p_1}{2q_1}} + m_{1,1} \xi^{\frac{p_1+1}{2q_1}} + \cdots.$$

Hieraus folgt, wenn z. B. $\frac{p}{q} < \frac{p_1}{q_1}$ ist,

$$\delta(\tau - \tau_1) = \frac{p}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) = p q_1,$$

$$\delta(\tau'' - \tau_1'') = \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = 2 p q_1,$$

so dass

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird. Ist andererseits $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$, so kommt

$$\delta(\tau - \tau_1) \leqq \frac{2p - q}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) \leqq (2p - q) q_1,$$

$$\delta(\tau'' - \tau_1'') \geqq \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') \geqq p \cdot 2 q_1,$$

so, dass auch jetzt

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird.*)

Diese Formel bleibt, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, gültig, wenn die Tangente des Kugelkreises in Q nur die eine, dagegen nicht, wenn sie keine unter den Minimalcurven berührt. In dem letzten Falle ist in der That

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

Dies giebt:

Berührt eine Tangente des Kugelkreises alle Minimalcurven, die der einen Schaar angehören, so liegt diese Tangente auf der Fläche. Berührt dagegen diese Gerade keine Minimalcurven, so liegt sie nicht auf der Fläche.

Die Multiplicität einer solchen Geraden auf der Fläche wird in jedem Falle bestimmt, indem man in den früher betrachteten Entwickelungen die nothwendige Anzahl von Gliedern wirklich berechnet. Doch halte ich es nicht für nothwendig, hierauf näher einzugehen.

Aus den vorangehenden Betrachtungen ergiebt sich nun der folgende Satz, der die unendlich entfernten Punkte einer jeden Minimalfläche vollständig bestimmt:

Satz 61. *Schneiden die Minimalcurven der einen Schaar die unendlich entfernte Ebene, und also auch den Kugelkreis in den Punkten* $P_1, P_2, \ldots, P_g$, *während die Curven der zweiten Schaar den Kugelkreis in den Punkten* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ *treffen, so liegen sämmtliche Verbindungsgeraden verschiedener Punkte* P, Π *auf der Fläche**). Desgleichen, wenn* P_a *mit* Π_b *identisch ist, so gehört die Tangente des*

---

*) Ausnahmsweise kann es z. B. eintreten, dass

$$r_0 = \frac{p}{q} > 1, \quad r_{1,0} = \frac{p_1}{q_1} > 1,$$

ist; alsdann ist, wenn wir z. B. annehmen $\frac{p}{q} \overline{\overline{<}} \frac{p_1}{q_1}$:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = p p_1,$$

$$\sum \delta(\tau - \tau_1) \overline{\overline{<}} (2p - q) q_1, \quad \text{oder} = p q_1$$

und da

$$p p_1 > (2p - q) q_1, \quad p p_1 > p q_1$$

ist, folgt auch in diesem Falle

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

**) Ist die Fläche insbesondere reell, und sind dabei P_i und Π_i conjugirte Punkte des Kugelkreises, so sind die Geraden $P_i\Pi_i$ eo ipso *reell*.

Kugelkreises in diesem Punkte der Fläche an, sofern sie von allen Minimalcurven der einen Schaar berührt wird, sonst nicht.

Dieser Satz gilt für alle nicht developpablen Minimalflächen, sie mögen reell oder imaginär, Doppelflächen oder nicht Doppelflächen sein. Mein Satz vervollständigt eine frühere Angabe von Geiser. Derselbe hat nämlich gefunden,*) dass der Schnitt einer algebraischen Minimalfläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus dem Kugelkreise und aus geraden Linien bestehen kann. Nach dem Obenstehenden kann der Kugelkreis nur auf den developpablen und zugleich imaginären Minimalflächen liegen. Ueberdies ist im Vorangehenden die Lage der betreffenden Geraden bestimmt.

54. Es ist leicht nachzuweisen, dass jede Minimalfläche eine Anzahl unendlich entfernter conischer Punkte enthält. Seien in der That c_0 und k_0 zwei auf einer Minimalfläche gelegene Minimalcurven, und lass mich annehmen, dass c_0 den Kugelkreis im Punkte Q schneidet, ohne jedoch denselben zu berühren. Führe ich nun c_0 in Translationsbewegung, indem ich k_0 als Directrix benutze, so beschreibt die Tangente von c_0 im Punkte Q einen Kegel, dessen Ordnung gleich der Ordnung der Curve k_0 sein wird, wenn nicht zufälligerweise auch k_0 durch den Punkt Q hindurchgeht. Folglich ist Q ein conischer Punkt, dessen Tangentenkegel der soeben besprochene Kegel ist. Berührt c_0 den Kugelkreis in Q, so ist dieser Punkt ein ausgearteter conischer Punkt. Also:

Satz 62. *Die Schnittpunkte der auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalcurven mit der unendlich entfernten Ebene sind conische Punkte der Fläche.*

Da nun alle Tangentenkegel einer Fläche durch die conischen Punkte derselben hindurchgehen, fliesst aus dem Vorangehenden u. A. der Satz:

Satz 63. *Die Tangentenkegel einer Minimalfläche schneiden den Kugelkreis in gewissen gemeinsamen Punkten. Ausserdem giebt es jedoch variable Schnittpunkte.*

§ 14.

Die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche.

55. Ich werde zeigen, wie man am besten verfährt, wenn man die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche zu bestimmen wünscht. Zunächst werde ich voraussetzen, dass die Kegelspitze unendlich entfernt ist, so dass der Kegel ein berührender Cylinder wird. In diesem Falle ist die Ordnungsbestimmung äusserst einfach.

Ich nehme einen *allgemeinen* Punkt des Kugelkreises und construire

*) Mathematische Annalen Bd. III, pag. 530.

den Tangentenkegel, dessen Spitze der gewählte Punkt ist. Der erhaltene Kegel zerfällt nach dem Vorangehenden in $M + M'$ Kegel, deren jeder die Fläche nach einer Minimalcurve berührt; ausserdem wird unter Umständen die unendlich entfernte Ebene ein Theil des gesammten Tangentenkegels sein. Die besprochenen M und M' Kegel sind bezüglich von der Ordnung O' und O. Also ist die Ordnung des eigentlichen Tangentenkegels, dessen Spitze ein allgemeiner Punkt des Kugelkreises ist, gleich $MO' + M'O$.

Man verlege jetzt die Spitze des Tangentenkegels in einen *allgemeinen* Punkt der unendlich entfernten Ebene. Alsdann zerfällt unser Kegel in die unendlich entfernte Ebene und einen berührenden Cylinder. Sei α die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als reductiblen Theiles des Tangentenkegels, und sei β die Ordnung des Cylinders. Alsdann ist $\alpha + \beta$ die Ordnungszahl eines Tangentenkegels allgemeiner Lage; die Spitze möge unendlich entfernt oder im endlichen Raume liegen.

Es ist klar, dass die beiden Zahlen α und β ungeändert bleiben, wenn die Spitze die unendlich entfernte Ebene durchläuft, dabei vorausgesetzt, dass man solche Punkte vermeidet, die auf der Fläche liegen. Und da der Kugelkreis nicht auf der Fläche liegt, schliessen wir, dass

$$\beta = MO' + M'O$$

ist. Also:

Satz 64. *Die Ordnungszahl eines berührenden Cylinders ist gleich $MO' + M'O$, oder wenn die Fläche eine Doppelfläche ist, gleich MO. Ist die Fläche reell und keine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl gleich $2MO$.*

56. Wünscht man weiter zu gehen und die Ordnungszahl eines allgemeinen Tangentenkegels zu bestimmen, so hat man die Zahl α zu bestimmen. Es ist leicht einzusehen, dass α sich als die Summe einer Reihe Zahlen α_{ik} darstellen lässt. Bezeichnen wir nämlich wie früher die unendlich entfernten Punkte der auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurven bezüglich mit

$$P_1 \ldots P_i \ldots P_g,$$
$$\Pi_1 \ldots \Pi_k \ldots \Pi_s,$$

so besteht bekanntlich die Schnittcurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene aus den Geraden $P_i\Pi_k$. Berührt die Fläche die Ebene nach einer gewissen Geraden $P_i\Pi_k$, so veranlasst dieser Umstand, dass jeder Tangentenkegel, dessen Spitze unendlich entfernt ist, die unendlich entfernte Ebene etwa α_{ik} mal als reductiblen Theil enthält. Daher wird

$$\alpha = \sum \sum \alpha_{ik},$$

wo jede Zahl α_{ik} sich nur auf die Gerade $P_i\Pi_k$ bezieht. Die Zahl α_{ik} ist bestimmt durch die Reihenentwickelungen derjenigen Zweige unserer Minimalcurven, die durch P_i und Π_k hindurchgehen. Doch gehe ich auf die Berechnung der α_{ik} nicht näher ein.

57. Es ist leicht beliebig, viele Minimalflächen zu construiren, für welche $\alpha = 0$ ist; wir können sogar beliebig viele Minimalflächen construiren, die die unendlich entfernte Ebene nicht berühren.

Man zeigt nämlich zunächst, dass

$$2MM'$$

die Zahl der parallelen Tangentenebenen der Fläche ist. Wünscht man in der That durch eine unendlich entfernte Gerade alle möglichen Tangentenebenen an die Fläche zu legen, so verfährt man folgendermassen. Man bestimmt die Schnittpunkte P und Q der Geraden mit dem Kugelkreise, und wählt eine Minimalcurve aus jeder Schaar, etwa c_0 und k_0. Man bestimmt die M auf c_0 gelegenen Punkte π, deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in P (oder Q) treffen; ebenso sucht man die M' auf k_0 gelegenen Punkte π', deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in Q (oder P) treffen. Man zieht die durch die M Punkte π gehenden Curven k, und zugleich die durch die M' Punkte π' gehenden Curven c.

Die gezogenen Curven c und k schneiden sich in MM' Punkten, deren zugehörige Tangentenebenen die verlangte Richtung haben. Endlich findet man MM' weitere solche Punkte, indem man die Punkte P und Q vertauscht. Also:

Satz 65. *Eine Minimalfläche hat $2MM'$ parallele Tangentenebenen, unter denen, wenn die Fläche reell ist, $2M$ reell sind. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so sind unsere Zahlen mit 2 zu dividiren.*

Nun ist die Classe einer Minimalfläche gleich

$$M(R'-M') + M'(R-M),$$

also ergiebt sich durch Subtraction, dass

$$M(R'-M') + M'(R-M) - 2MM'$$

die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist. Also:

Satz 66. *Die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist $M(R'-2M') + M'(R-2M)$, oder wenn die Fläche reell ist: $2M(R-2M)$. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl gleich $M(R-2M)$.*

Ist daher $R = 2M$, so berührt die zugehörige reelle Minimalfläche die unendlich entfernte Ebene gar nicht.

Um solche Minimalflächen zu finden, verfahre ich folgendermassen. Ich nehme eine Curve, deren Tangenten unserem linearen Complexe gehören, und welche dabei eine allgemeine Lage hinsichtlich der Ge-

raden g hat. In Folge dessen schneidet g die zugehörige Developpable in r verschiedenen Punkten. Dabei ist

$$m = 0, \quad \mu = 0,$$

folglich wird für die entsprechende Minimalcurve

$$M = o, \quad R - M = o, \quad R = 2o = 2M,$$

so dass die dieser Minimalcurve entsprechende reelle Minimalfläche gar nicht die unendlich entfernte Ebene berührt.

Der Tangentenkegel einer solchen Fläche ist nach dem Vorangehenden von der Ordnung $2MO$ (oder MO, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist).

58. Die Ordnung eines Tangentenkegels ist nach Plücker gleich der Classe einer ebenen Schnittcurve der Fläche. Insbesondere schliessen wir, dass jede auf einer Minimalfläche gelegene ebene Curve $MO' + M'O$ (oder MO) parallele Tangenten besitzt. Hieraus folgt weiter, dass unsere Curve $(MO' + M'O)^2$ Brennpunkte besitzt. Ist die Fläche reell, so giebt es $2MO$ (oder MO) reelle Brennpunkte. Also:

Satz 67. *Die auf einer reellen Minimalfläche liegenden ebenen Curven haben $2MO$ reelle Brennpunkte; diese Zahl ist mit 2 zu dividiren, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.*

---

59. Es giebt eine andere bemerkenswerthe Methode zur Bestimmung der Ordnung eines Tangentenkegels. Ich werde dieselbe in aller Kürze entwickeln, obgleich ich noch nicht alle mit derselben verbundenen Schwierigkeiten erledigt habe.

Ich schneide einen Tangentenkegel mit einem Kegel, der dieselbe Spitze besitzt und welcher dabei den Kugelkreis enthält. Die Ordnung des Tangentenkegels ist gleich der Zahl der gemeinsamen Erzeugenden, dividirt durch 2. Es giebt zweierlei solcher Erzeugenden: diejenigen, die durch die Punkte P_i, Π_k gehen, und diejenigen, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Ich werde eine Methode entwickeln zur Bestimmung der letzteren.

Betrachtet man in den Gleichungen

$$\xi = A(t) + A_1(\tau) + \varepsilon A'(t),$$
$$\eta = B(t) + B_1(\tau) + \varepsilon B'(t),$$
$$\zeta = C(t) + C_1(\tau) + \varepsilon C'(t)$$

t, τ als gegebene Parameter, ε als eine *variable* Grösse, so erhält man alle Punkte ξ, η, ζ auf einer Tangente einer Minimalcurve c. Betrachtet man dagegen ξ, η, ζ als gegeben, so bestimmen unsere Gleichungen alle durch diesen Punkt gehenden Tangenten an Curven der Schaar c.

Ich führe drei neue Grössen x', y', z' ein, und ersetze meine drei Gleichungen durch die sechs folgenden äquivalenten:

$$(1)\quad x' = A(t) + \varepsilon A'(t),\quad y' = B(t) + \varepsilon B'(t),\quad z' = C(t) + \varepsilon C'(t),$$
$$(2)\quad x' = \xi - A_1(\tau),\qquad y' = \eta - B_1(\tau),\qquad z' = \zeta - C_1(\tau).$$

Die drei Gleichungen (1) bestimmen alle Punkte auf einer Developpablen einer Minimalcurve c. Die Gleichungen (2) bestimmen eine Minimalcurve, die zu den Curven der Schaar k collinear verwandt ist.

Die Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Curve (2) *und der Developpablen* (1) *ist gleich der Anzahl derjenigen Tangenten, die durch den Punkt* ξ, η, ζ *gehen, und welche dabei eine Curve c berühren.*

In dieser Weise bestimmt man diejenigen gemeinsamen Erzeugenden der besprochenen Kegel, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Hierzu fügt man die nach den Punkten P_i und Π_k hinlaufenden Geraden, welche ebenfalls gemeinsame Erzeugende sind. Hierbei lasse ich jedoch *unentschieden, wie man die Multiplicität* dieser letzten Geraden als gemeinsamer Erzeugender unserer Kegel bestimmt.*)

§ 15.

Die parabolische Curve und die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche.

60. Die beiden auf einer Minimalfläche gelegenen Schaaren Minimalcurven c und k bestimmen nach dem Vorangehenden (§ 2.) eine gemeinsame Umhüllungscurve Σ. Diese Curve ist eo ipso der Ort derjenigen Punkte, in denen die beiden Minimalrichtungen zusammenfallen. Und also enthält diejenige Developpable, die unsere Fläche längs Σ berührt, den imaginären Kugelkreis. Also ist Σ nach einer Bemerkung von Darboux eine auf der Fläche gelegene Krümmungslinie. Dass Σ zugleich eine Haupttangentencurve ist, beweist man folgendermassen.

Ist überhaupt eine Fläche und ein Liniencomplex gegeben, so ist der Ort aller Punkte, deren Complexkegel die Fläche berührt, immer dann eine Haupttangentencurve, wenn die Berührungserzeugende den besprochenen Ort berührt. Dieser Satz, angewandt auf eine Minimalfläche und den Inbegriff aller Minimalgeraden, giebt:

Satz 68. *Die Umhüllungscurve aller auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalcurven ist eine Haupttangentencurve und zugleich eine Krümmungslinie der Fläche.*

Wenn unsere Minimalfläche keine Doppelfläche ist, so ist die Curve Σ eine Rückkehrcurve der Fläche. Folglich ist sie zugleich ein Theil der parabolischen Curve. Ist dagegen die Fläche eine Doppelfläche, so ist Σ keine Rückkehrcurve, und auch keine parabolische Curve.

---

*) Die gesuchte Zahl hängt offenbar nur ab von der Art des conischen Punktes P_i oder Π_k.

Um überhaupt die im endlichen Raume gelegene parabolische Curve einer Minimalfläche zu bestimmen, stellen wir nach den in Nummer 3. gegebenen Regeln die Differentialgleichung der Haupttangentencurven auf. Man erhält die Gleichung

$$(s-\sigma)^2\,(F'''(s)ds^2 - \Phi'''(\sigma)d\sigma^2) = 0,$$

oder durch Wegwerfung des Factors $(s-\sigma)^2$;

$$F'''(s)\,ds^2 - \Phi'''(\sigma)d\sigma^2 = 0.$$

Sollen daher die beiden Haupttangenten zusammenfallen, so muss eine der Gleichungen

$$F'''(s) = 0, \quad F'''(s) = \infty,$$
$$\Phi'''(\sigma) = 0, \quad \Phi'''(\sigma) = \infty$$

bestehen. Wenn daher eine Minimalcurve etwa aus der Schaar c eine Spitze oder Inflexionstangente besitzt, so ist die durch einen solchen Punkt gehende Minimalcurve k immer ein Theil der parabolischen Curve. Also:

Satz 69. *Die parabolische Curve einer Minimalfläche besteht ausser aus den unendlich entfernten Geraden der Fläche nur aus Minimalcurven.*

Die unendlich entfernten Geraden gehören immer der parabolischen Curve an.

61. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, im Allgemeinen zerfällt.

Ich nehme eine Doppeltangentialebene, und ziehe durch den ersten Berührungspunkt die beiden Tangenten t und τ, die den Kugelkreis treffen, und ebenso durch den zweiten Berührungspunkt die entsprechenden Tangenten t_1 und τ_1. Alsdann ist t etwa mit t_1 und τ mit τ_1 parallel. Dies vorausgesetzt, sind zwei Fälle denkbar. Entweder berühren t und t_1 Minimalcurven, die derselben Schaar angehören. Oder auch berühren t und t_1 Minimalcurven, die nicht derselben Schaar gehören. In Folge dessen zerfallen die Doppeltangentialebenen einer Minimalfläche im Allgemeinen in zwei Schaaren, deren jede eine Developpable erzeugt. Also:

Satz 70. *Die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, zerfällt im Allgemeinen in zwei Theile.*

Ich werde zeigen, wie man die beiden Theile der Doppeldeveloppable analytisch bestimmt. Seien

$$dz = 2sF'''(s)ds + 2\sigma\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dx = (1-s^2)F'''(s)ds + (1-\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dy = i(1+s^2)F'''(s)ds + i(1+\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma$$

die Differentialgleichungen einer Minimalfläche. Die Relation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

giebt

$$2s - p(1-s^2) - iq(1+s^2) = 0,$$
$$2\sigma - p(1-\sigma^2) - iq(1+\sigma^2) = 0,$$

woraus

$$p = \frac{s\sigma - 1}{s + \sigma}, \quad q = \frac{1 + s\sigma}{i(s+\sigma)}.$$

Erinnern wir nun, dass die Punktcoordinaten z, x, y sich folgendermassen ausdrücken:

$$z = \sum^i f_i(s)\, F^{(i)}(s) + \sum^i f_i(\sigma)\, \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$x = \sum^i \varphi_i(s) F^{(i)}(s) + \sum^i \varphi_i(\sigma) \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$y = \sum^i \psi_i(s) F^{(i)}(s) + \sum^i \psi_i(\sigma) \Phi^{(i)}(\sigma),$$

wo $F^{(i)}$ die drei Differentialquotienten $F''(s)$, $F'(s)$ und $F(s)$ darstellt, so finden wir zur Bestimmung der Grösse

$$z - px - qy = w$$

eine Gleichung der Form

$$w = \sum^i \chi_i(s, \sigma)\, F^{(i)}(s) + \sum^i \chi_i(\sigma, s) \Phi^{(i)}(\sigma),$$

die wir als Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten betrachten.

Soll nun unsere Fläche Doppeltangentialebenen der ersten Art besitzen, so ist es nothwendig, dass jedenfalls die eine der Grössen $F(s)$ und $\Phi(\sigma)$ eine mehrdeutige Function des betreffenden Arguments ist.*) Lass mich mit $F_1(s)$ und $F_2(s)$ zwei Werthe von $F(s)$ bezeichnen, die demselben Argumente s entsprechen. Ebenso seien $\Phi_1(\sigma)$ und $\Phi_2(\sigma)$ zwei Werthe von $\Phi(\sigma)$, die demselben σ entsprechen. Alsdann werden die Doppeltangentialebenen der ersten Art bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$w = \sum^i \chi_i(s, \sigma) F_1^{(i)}(s) + \sum^i \chi_i(\sigma, s)\, \Phi_1^{(i)}(\sigma),$$
$$w = \sum^i \chi_i(s, \sigma) F_2^{(i)}(s) + \sum^i \chi_i(\sigma, s) \Phi_2^{(i)}(\sigma)$$

und also genügen sie zugleich der Gleichung

$$w = \sum^i \chi_j(s, \sigma) \frac{F_1^{(i)} + F_2^{(i)}}{2} + \sum^i \chi_i(\sigma, s) \frac{\Phi_1^{(i)} + \Phi_2^{(i)}}{2},$$

die eine neue Minimalfläche bestimmt. Hiermit ist eine neue Minimalfläche gefunden, die in die Doppeldeveloppable der ersten Art eingeschrieben ist.

Die Doppeltangentialebenen der zweiten Art sind bestimmt durch die beiden Gleichungen

*) Ist daher $M = 1$, so existirt keine Doppeldeveloppable der ersten Art.

$$w = \sum^i \chi_i(s, \sigma) F^{(i)}(s) + \sum^i \chi_i(\sigma, s) \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$w = \sum^i \chi_i(\sigma, s) F^{(i)}(\sigma) + \sum^i \chi_i(s, \sigma) \Phi^{(i)}(s)$$

und genügen daher zugleich der Gleichung

$$w = \sum^i \chi_i(s, \sigma) \frac{F^{(i)}(s) + \Phi^{(i)}(s)}{2} + \sum^i \chi_i(\sigma, s) \frac{F^{(i)}(\sigma) + \Phi^{(i)}(\sigma)}{2},$$

die eine neue Minimalfläche, und zwar eine Doppelfläche bestimmt.

Die Doppeldeveloppable der zweiten Art ist daher einer gewissen Doppelfläche umgeschrieben. So z. B. kann in die Doppeldeveloppable zweiter Art einer Enneper'schen Minimalfläche eine Henneberg'sche Minimalfläche eingeschrieben werden.*)

Indem ich schliesse, füge ich noch einige Bemerkungen über die Singularitäten einer Minimalfläche hinzu.

Gehen durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt einer Minimalfläche mehr als eine Minimalcurve der einen Schaar, so gehört dieser Punkt einer auf der Fläche gelegenen Doppelcurve.

Geht durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt nur eine Minimalcurve aus jeder Schaar, und ist dabei der betreffende Punkt kein singulärer Punkt der besprochenen Curven, so ist derselbe auch kein singulärer Punkt der Fläche (vorausgesetzt, dass der Punkt nicht auf der Umhüllungscurve aller Minimalcurven gelegen ist). Ist unser Punkt ein Doppelpunkt oder Spitze der einen Curve, so ist die zweite eine Doppelcurve oder Rückkehrcurve der Fläche.

Soll daher eine Minimalfläche im endlichen Raume gelegene conische Punkte besitzen, so müssen alle Minimalcurven der Fläche durch denselben Punkt gehen. Man sieht so unmittelbar, dass der Tangentenkegel eines solchen conischen Punktes, wie Geiser bemerkt hat**), den Kugelkreis enthält.

§ 16.

Berichtigung eines Fehlers.

In einer früheren Abhandlung in Bd. 2 der norwegischen Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab" beschäftigte ich mich mit ähnlichen Untersuchungen wie die in dieser Arbeit dargestellten. Durch eine Ungenauigkeit kam ich in jener Abhandlung zu dem falchen Schlusse, dass alle algebraischen Doppelflächen imaginär seien, während ich die Existenz der periodischen reellen Doppelflächen richtig erkannte. Dieser Irrthum veranlasste einige falsche Resultate. So behauptete ich

---

*) Die beiden im Texte besprochenen Flächen berühren sich nach einer Minimalcurve, die auf der Enneper'schen Fläche die Umhüllungscurve aller Minimalcurven ist. Diese Bemerkung dehnt sich auf beliebige Minimalflächen aus.

**) Math. Annalen Bd. III, pag. 534.

z. B., dass die Classe einer reellen Minimalfläche immer grösser als fünf sein müsste; während meine Untersuchungen eigentlich nur zeigten, dass eine Minimalfläche, deren Classe kleiner als sechs wäre, eine Doppelfläche sein müsste. Meine Abhandlung gab eine richtige Bestimmung aller Doppelflächen dritter, vierter, fünfter Classe, u. s. w.; wie gesagt behauptete ich aber irrthümlicherweise, dass diese Flächen sämmtlich imaginär seien.

Erst im September 1877 erfuhr ich, dass Herr Henneberg schon im Jahre 1875 eine reelle Minimalfläche fünfter Classe entdeckt hatte. Ich bemerkte dann sogleich meinen Irrthum, und sah zugleich, dass die Classe einer reellen Doppelfläche grösser als vier sein müsste. Hierüber gab ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania Nachricht in einer kleinen Note, die zugleich einige weitere Resultate enthielt.

Nachträglich erfahre ich durch eine briefliche Mittheilung Henneberg's, dass *er schon früher* in einer Vorlesung den Satz bewiesen hatte, dass die Classe einer reellen Minimalfläche grösser als vier sein muss. (Man vergleiche seine elegante Abhandlung im neunten Bande der Annali di matematica.) Meine Untersuchungen gehen indess weiter. So z. B. bestimmen sie *alle* reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir einige weitere Unterschiede zwischen meinen und Herrn Henneberg's Resultaten zu besprechen. Herr Henneberg findet, dass die Ordnung seiner reellen Minimalfläche fünfter Classe gleich siebzehn ist, während nach mir *alle* reellen Minimalflächen fünfter Classe von fünfzehnter Ordnung sind. Nach meiner allgemeinen Theorie der unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche muss die Henneberg'sche Fläche drei unendlich entfernte Gerade enthalten, unter denen eine reell ist, während die beiden anderen den Kugelkreis in den Schnittpunkten der ersten Linie berühren. Henneberg findet aber, dass seine Fläche fünf unendlich entfernte Gerade enthält. Endlich scheint mir, dass Henneberg das Geschlecht seiner Fläche unrichtig bestimmt. Es besteht nämlich überhaupt der Satz, dass das Geschlecht einer jeden Minimalfläche, deren erzeugende Minimalcurven vom Geschlechte Null sind, gleich Null ist.*) In diesen Punkten, die allerdings in Hennebergs werthvoller Arbeit nur eine untergeordnete Wichtigkeit haben, während sie in meinen Untersuchungen eine wesentlichere Rolle spielen, scheint mir Henneberg sich geirrt zu haben.

*) Dieser Satz besteht auch, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.

Christiania, 20. Juni 1878.

Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen.

Von Felix Klein in München.

(Mit 2 lithogr. Tafeln.)

Die functionentheoretische Methode, deren ich mich neuerdings bediente, um die Modulargleichungen für die niedersten Transformationsgrade $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ zu untersuchen*), soll im Folgenden dazu verwandt werden, die Resolventen fünften, siebenten und elften Grades zu definiren, welche man, einem berühmten Satze von Galois zufolge, für $n = 5, 7, 11$ aufstellen kann. Unter der *Definition* einer Gleichung, die (wie die hier in Betracht kommenden) einen Parameter enthält, verstehe ich dabei im Riemann'schen Sinne die Verzweigung, welche die Unbekannte, als Variable aufgefasst, in Bezug auf den Parameter besitzt: Verzweigung so verstanden, dass nicht nur die Lage und Multiplicität der Verzweigungspunkte, sondern auch die Art angegeben wird, wie vermöge der Verzweigungspunkte die einzelnen Functionszweige zusammenhängen.

Es ist ein allgemeines Problem, zu dessen Erledigung seither sehr wenig geschehen ist: die algebraische Gleichung, welche zu einer in diesem Sinne definirten Verzweigung gehört, in einfachster Form wirklich aufzustellen. In den drei hier behandelten Fällen vereinfacht sich dasselbe, ebenso wie in den in meiner früheren Abhandlung behandelten Beispielen, indem das Geschlecht p der Gleichung übereinstimmend gleich *Null* wird. In Folge dessen kann man den Parameter (die absolute Invariante J des elliptischen Integrals) in den drei Fällen bez. gleich setzen einer *rationalen* Function fünften, siebenten, elften Grades der Unbekannten, und wir haben die viel leichtere Aufgabe, diese rationale Function aus der uns bekannten Verzweigungsart zu berechnen. In der That genügen bei $n = 5$ und $n = 7$ ein paar Zeilen Rechnung, um die betr. rationale Function zu bilden, während sich bei $n = 11$ Weitläufigkeiten einstellen, die ich noch nicht überwunden habe.

---

*) *Ueber die Transformationen der elliptischen Functionen etc.*, diese Annalen Bd. XIV, pag. 111 ff. — Citate auf blosse Seitenzahlen, welche im Folgenden vorkommen, beziehen sich auf diese Abhandlung.

Meine Endformeln für $n = 5, 7$ sind übrigens nicht eigentlich neu. Denn bei $n = 5$ komme ich, wie dies vorauszusehen war, zu der bekannten Gleichung:

$$x^5 - 10x^3 + 45x = C,$$

die Brioschi zuerst aufgestellt hat*) und zu der andererseits die Betrachtung des Ikosaeders hinleitet**), — während ich bei $n = 7$ eine Gleichung erhalte, die im Wesentlichen zusammenfällt mit derjenigen, die Hermite in seinen hierhergehörigen Untersuchungen gewonnen hat.***) Es liegt dies an dem gewissermassen zufälligen Umstande, dass bei $n = 7$ die von Hermite gebrauchte Discriminante der zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ bestehenden Modulargleichung mit den *rationalen* Invarianten des elliptischen Integrals enge zusammenhängt; sie ist, abgesehen von Factoren, welche Δ†) verschwinden lassen, geradezu gleich $g_2{}^2$.

§ 1.

Die Angaben von Betti. Plan der Untersuchung.

Das Galois'sche Theorem, um welches es sich hier handelt, wurde bekanntlich zuerst von Betti bewiesen††), der die ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

in Bezug auf die Moduln 5, 7, 11 untersuchte. Die Gesammtheit dieser Substitutionen erweist sich in Bezug auf diese Moduln mit nur 60, 168, 660 äquivalent, und nun kommt das Galois'sche Theorem darauf zurück, dass sich, in den einzelnen Fällen, Untergruppen bilden lassen, welche nur den fünften, siebenten, bez. elften Theil der Gesammtheit enthalten.

Diese Untergruppen lauten nach Betti's Angaben folgendermassen.

1) $n = 5$. Die Untergruppe umfasst alle diejenigen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

welche modulo 5 mit einer der folgenden 12 übereinstimmen:

---

*) Sue metodo di Kronecker etc. Atti del Istituto Lombardo II.

**) Siehe Annalen Bd. IX, pag. 204, Bd. XII, pag. 523.

***) Vgl. Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré (Paris 1859), sowie wegen der hier in Betracht kommenden Gleichung insbesondere: Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré, in Tortolini's Annali di Matematica, II, pag. 59.

†) Wegen der Bezeichnungen siehe immer meine vorige Abhandlung.

††) Sopra l'abbassamento delle equazione modulari delle funzione ellitiche; Tortolini, Annali di scienze matematiche etc. Bd. IV. (1853). Siehe auch Hermite's Bemerkung in einem Briefe an Jacobi, Crelle's Journal 40 p. 289 (1850).

$$\pm\omega,\quad \mp\frac{1}{\omega},\quad \pm\frac{\omega+2}{\omega-2},\quad \mp\frac{\omega-2}{\omega+2},\quad \pm 3\cdot\frac{\omega-1}{\omega+1},\quad \mp 3\cdot\frac{\omega+1}{\omega-1}.$$

Ich werde diese Untergruppe die *Gruppe I* nennen.

2) $n=7$. Bei $n=7$ giebt es *zwei* Untergruppen, die in Betracht kommen, und *die ich mit II_a und II_b bezeichnen will.* Dieselben umfassen alle diejenigen Substitutionen, welche modulo 7 entweder zu folgenden 24:

$$a\omega,\quad -\frac{a}{\omega},\quad a\frac{\omega+2b}{\omega-b},\quad -a\frac{\omega-b}{\omega+2b},$$

oder zu den folgenden

$$a\omega,\quad -\frac{a}{\omega},\quad a\frac{\omega-3b}{\omega-b},\quad -a\frac{\omega-b}{\omega-3b}$$

congruent wird. Hier bedeuten a, b quadratische Reste modulo 7.

3) $n=11$. Auch bei $n=11$ giebt es *zwei* Untergruppen, *die III_a und III_b genannt werden sollen.* Die erste umfasst alle Substitutionen, welche modulo 11 zu folgenden 60 congruent sind:

$$a\omega,\quad -\frac{a}{\omega},\quad a\frac{\omega-2b}{\omega-b},\quad -a\frac{\omega-b}{\omega-2b}.$$

Für die andere lauten diese Formeln:

$$a\omega,\quad -\frac{a}{\omega},\quad a\frac{\omega-6b}{\omega-b},\quad -a\frac{\omega-b}{\omega-6b}$$

Beidemal bedeuten a, b quadratische Reste modulo 11. —

Die verschiedenen Ausdrücke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ sind vermöge der Substitutionen dieser Untergruppen zu nur fünf, sieben, elf *Repräsentanten* äquivalent, für welche man am einfachsten die folgenden nimmt:

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ldots,\ \omega+(n-1). \quad -(n=5,\,7,\,11).-$$

Ich benutze diese Angaben nun folgendermassen. Ich denke mir eine in der positiven Halbebene ω überall eindeutige Function $y(\omega)$, welche die Eigenschaft hat, bei den Substitutionen der Untergruppe I, oder II, oder III ungeändert zu bleiben, nicht aber bei *allen* Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$. Letztere Eigenschaft kommt, wie bekannt, der absoluten Invariante J zu, und überdies nimmt J *nur* für solche Werthe ω denselben Werth an, die durch eine Substitution von der Form $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ mit einander verknüpft sind.

Daher gehören zu jedem J n Werthe von y:

$$y(\omega),\ y(\omega+1),\ \ldots,\ y(\omega+(n-1))$$

und y ist mit J durch eine algebraische Gleichung vom Grade n verbunden.

Man breite jetzt die complexen Werthe von J über eine Ebene aus und construire über letzterer die y entsprechende n-blättrige Fläche. Ich verlange dann zunächst, Lage und Multiplicität ihrer Verzweigungspunkte anzugeben, dann aber zu bestimmen, wie vermöge der Verzweigungspunkte die n verschiedenen Functionszweige zusammenhängen.

Was die erstere Frage betrifft, so können nach den Entwickelungen meiner vorigen Arbeit (pag. 128) Verzweigungspunkte nur bei $J = 0$, 1, ∞ vorkommen, und zwar können bei $J = 0$ (sofern das Blatt nicht unverzweigt bleibt) immer nur je drei, bei $J = 1$ (unter der entsprechenden Einschränkung) immer nur je zwei Blätter cyklisch verbunden sein. Man hat also nur anzugeben: 1) wie bei $J = \infty$ die Verzweigung beschaffen ist, 2) wie viele Blätter bei $J = 0$, resp. $J = 1$ isolirt verlaufen. Dies beantwortet sich, wie ich sogleich bei $n = 5$ ausführe, durch eine einfache Betrachtung der *parabolischen* und der *elliptischen* Substitutionen (siehe pag. 122), welche in der Gesammtheit der Substitutionen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ enthalten sind.

Die zweite Frage erledigt sich durch Betrachtung des zur Function $y(\omega)$ gehörigen *Fundamentalpolygons* (pag. 133). Den n eben angegebenen Repräsentanten entsprechend kann man als Fundamentalpolygon für y in den drei Fällen ein Aggregat von 5, 7, 11 nebeneinander liegenden Elementarvierecken (siehe pag. 122) wählen. Man findet dann leicht, wie die Kanten dieses Fundamentalpolygons auf der betr. Riemann'schen Fläche zu vereinigen sind, und da, wie schon angegeben, $p = 0$ wird, kann man in der Ebene durch nebeneinanderliegende Dreiecke die gewünschte Verzweigung versinnlichen.

§ 2.

Der Fall $n = 5$.

Um die Verzweigungspunkte zunächst der *fünfblättrigen* Fläche zu bestimmen, lassen wir vor allen Dingen J seinen Unendlichkeitspunkt umkreisen. Dann verwandelt sich ein passend gewähltes zugehöriges ω in $\omega + 1$. Die Wurzel $y(\omega)$ geht also in $y(\omega + 1)$ über, diese in $y(\omega + 2)$ u. s. w. Demnach haben wir als ersten Satz: *Bei $J = \infty$ hängen die fünf Blätter in einem Cyklus zusammen.*

Betrachten wir ferner den Werth $J = 1$. Wir können diesem Werthe entsprechend $\omega = i$ wählen, so dass also die fünf Repräsentanten in folgende Zahlen übergehen:

$$i, \quad i + 1, \quad i + 2, \quad i + 3, \quad i + 4.$$

Nun ist jeder Punkt $(i + k)$ festbleibendes Element bei einer *elliptischen*

Substitution von der Periode Zwei (pag. 123), die sich, wie man leicht findet, durch folgende Formel darstellt:

$$(1) \qquad \omega' = \frac{k\omega - (k^2+1)}{\omega - k}.$$

Hier setze man $k = 0, 1, \ldots 4$ und frage nun, ob die betreffende Substitution mit zu der Untergruppe I gehört, welche $y(\omega)$ ungeändert lässt? Ist das der Fall, so ist $y(\omega)$ für diesen Werth von ω unverzweigte Function von J, anderenfalls nicht. — Man findet so, *dass bei* $J = 1$ *nur ein Blatt unverzweigt bleibt.* Denn die Formel (1) giebt für $k = 0, 1, \ldots 4$ nur dann eine Substitution I, wenn $k = 0$ genommen wird, nämlich $\omega' = -\frac{1}{\omega}$.

Genau so beantwortet sich die Frage für $J = 0$. Man wähle als zugehörige Werthe von ω die folgenden:

$$\varrho, \ \varrho + 1, \ \varrho + 2, \ \varrho + 3, \ \varrho + 4,$$

wo $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, und schreibe allgemein eine *der beiden elliptischen Substitutionen von der Periode Drei* hin (pag. 123), welche $\varrho + k$ ungeändert lassen. Man findet für eine der letzteren:

$$(2) \qquad \omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2-k+1)}{\omega - k},$$

und setzt man hier k der Reihe nach $= 0, 1, \ldots 4$, so trifft man zweimal und nur zweimal auf Substitutionen der Gruppe I, nämlich bei $k = 2$ und bei $k = 4$. Daher: *Bei* $J = 0$ *verlaufen zwei Blätter isolirt.*

Fassen wir zusammen, so folgt: *Bei* $J = \infty$ *hängen alle Blätter in einem Cyklus, bei* $J = 1$ *zweimal zwei, bei* $J = 0$ *einmal drei zusammen. Das Geschlecht* p *wird also gleich Null.*

Betrachten wir jetzt das Fundamentalpolygon, wie es durch die Figur 1. auf der ersten beigegebenen Tafel versinnlicht wird.

Der Substitution $\omega' = \omega + 5$ entsprechend sind jedenfalls die beiden verticalen Kanten 1 und 12 zu vereinigen, so dass ein Fünfeck entsteht, wie es Figur 2. vorstellt.

Von den Kanten dieses Fünfecks sind nun (wie in der Figur bereits angedeutet ist) den Substitutionen (1), (2) entsprechend folgende zusammenzufügen: der *einen* Substitution (1) entsprechend 11 und 2, den *zwei* Substitutionen (2) entsprechend einmal 4 und 5, 3 und 6, das andere Mal 8 und 9, 7 und 10. Dadurch ist aber bereits über alle Kanten verfügt, und man erhält die Figur 3., welche die Verzweigung bei $n = 5$ in der gewünschten Weise erläutert.

§ 3.

Der Fall $n = 7$.

Von den beiden Gruppen II_a und II_b will ich hier nur die erste betrachten. Bei II_b ergeben sich durchaus analoge Resultate, mit *einer* Abweichung, die am Schlusse des Paragraphen angegeben wird.

Man schliesst sofort, wie bei $n = 5$:

1) *Bei $J = \infty$ hängen alle Blätter der nun siebenblättrigen Fläche im Cyklus zusammen.*

2) *Bei $J = 1$ hängen zweimal zwei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (1):

$$\omega' = \frac{k\omega - (k^2+1)}{\omega - k}$$

(wo nun k die Werthe $0, 1, \ldots 6$ annehmen kann) finden sich, $k = 0, 4, 5$ entsprechend, *drei*, welche der Gruppe II_a angehören.

3) *Bei $J = 0$ hängen zweimal drei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (2):

$$\omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2-k+1)}{\omega - k}$$

findet sich für $k = 0, 1, \ldots 6$ nur *eine*, welche II_a angehört, nämlich diejenige, welche $k = 2$ entspricht.

Demnach ist also wieder $p =$ Null.

Wir haben des Ferneren ein Fundamentalpolygon, welches durch Figur 4. vorgestellt wird.

Hier sind vor allen Dingen $\omega' = \omega + 7$ entsprechend die beiden Kanten 1 und 16 zu vereinigen, so dass das Siebeneck der Figur 5. entsteht.

Es ist ferner den drei in Betracht kommenden Substitutionen (1) entsprechend 15 mit 2, 9 mit 10, 11 mit 12 zu vereinigen, und der einen Substitution (2) entsprechend 4 mit 5, 3 mit 6. Hieraus folgt von selbst, dass 7 mit 14, 8 mit 13 zu verbinden ist, und man erhält die Zeichnung der Figur 6.

Wie man sieht, ist dieselbe unsymmetrisch. Vertauscht man rechts und links, so erhält man diejenige Figur, welche der Gruppe II_b entspricht.

§ 4.

Der Fall $n = 11$.

Von den beiden Gruppen III_a und III_b, die bei $n = 11$ auftreten, betrachte ich wieder nur die erstere. Dann ergeben sich hinsichtlich der elfblättrigen Fläche, welche das zugehörige $y(\omega)$ als Function von ω darstellt, zunächst folgende Sätze:

1) *Bei $J = \infty$ hängen die 11 Blätter in einem Cyklus zusammen.*

2) *Bei $J = 1$ hängen viermal zwei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (1):

$$\omega' = \frac{k\omega - (k^2 + 1)}{\omega - k}$$

finden sich für $k = 0, 1, 2, \ldots 10$ *drei*, welche der Gruppe III_a angehören, den Werthen $k = 0, 1, 8$ entsprechend.

3) *Bei $J = 0$ hängen dreimal drei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (2):

$$\omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2 - k + 1)}{\omega - k}.$$

gibt es *zwei*, welche zu III_a gehören, entsprechend $k = 4$ und $k = 7$.

Dementsprechend ist $p =$ Null.

Betrachten wir jetzt das Fundamentalpolygon (siehe lithogr. Tafel Fig. 7), so erhalten wir zunächst durch Vereinigung von 1 und 24 das Elfeck der Figur 8. und dann durch Berücksichtigung der zu III_a gehörigen Substitutionen (1), (2) die Figur 9.

Auch sie ist wieder unsymmetrisch; vertauscht man rechts und links, so erhält man diejenige Figur, welche der Gruppe III_b entspricht.

§ 5.

Allgemeines über die Aufstellung der Gleichungen.

Da in den drei Fällen p übereinstimmend gleich Null ist, so kann ich y so wählen (pag. 127), dass J eine rationale Function von y ist:

$$J = \frac{\varphi(y)}{\psi(y)}.$$

(Hier bedeuten φ und ψ ganze Functionen von y bezüglich vom fünften, siebenten, elften Grade.) — Nun sollen für $J = \infty$ sämmtliche Wurzeln y coincidiren. *Daher ist $\psi(y)$ die fünfte, bezüglich siebente oder elfte Potenz eines linearen Ausdrucks.* Man kann also, da y noch drei willkürliche Constante enthält*), *ψ einfach gleich Eins nehmen,* und also schreiben

$$J = \varphi(y).$$

Es enthält y dann noch zwei willkürliche Constante.

---

*) Insofern statt y jede gebrochene lineare Function $\frac{ay + b}{cy + d}$ eingeführt werden könnte.

Nun soll nach den über die Verzweigung gemachten Angaben $\varphi(y)$ in den drei Fällen folgende Eigenschaften besitzen:

1) *Bei* $n = 5$ *soll* $\varphi(y)$ *einen linearen Factor cubisch und* $\varphi(y) - 1$ *einen quadratischen Factor doppelt enthalten*;

2) *Bei* $n = 7$ *soll* $\varphi(y)$ *einen quadratischen Factor cubisch und* $\varphi(y) - 1$ *einen quadratischen Factor doppelt enthalten*;

3) *Bei* $n = 11$ *soll* $\varphi(y)$ *einen cubischen Factor dreifach und* $\varphi(y) - 1$ *einen biquadratischen Factor doppelt enthalten.*

Es fragt sich, wie weit $\varphi(y)$, abgesehen von den zwei noch in y enthaltenen willkürlichen Constanten, durch diese Angaben bestimmt ist. Dies hängt offenbar davon ab, *wie viele n-blättrige Riemann'sche Flächen es gibt, welche die von uns angegebene Zahl und Lage der Verzweigungspunkte besitzen.* Um hierüber zu entscheiden, denke man sich eine solche Fläche längs derjenigen n Linien, welche das Stück der reellen Axe von $J = 0$ bis $J = 1$ überlagern, zerschnitten. Sie wird dann wegen des cyklischen Zusammenhangs der n Blätter bei $J = \infty$ in eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche verwandelt sein, die in eine Ebene ausgebreitet, eben ein solches Fünf-, Sieben-, Elf-Eck ergiebt, wie es Figur 1, 4, 7 vorstellt, — oder vielmehr (wenn man die Mittelpunkte der Seiten, welche $J = 1$ entsprechen, als Ecken mitzählt) ein Zehn-, Vierzehn-, Zweiundzwanzig-Eck. Es handelt sich jetzt offenbar darum, aufzuzählen, wie oft man die Kanten eines Zehn-, Vierzehn-, Zweiundzwanzig-Ecks in der Art zu einem doppelt überdeckten Linienzuge zusammenbiegen kann, dass die Ecken der einen Art eine gewisse gegebene Anzahl von Malen zu drei, die Ecken der anderen Art eine gewisse gegebene Anzahl von Malen zu zwei zusammenstossen, während die übrig bleibenden Ecken der einen, sowie die der anderen Art isolirt bleiben. Der Versuch ergiebt, dass diess bei $n = 5$ überhaupt nur einmal, bei $n = 7$ zweimal, bei $n = 11$ aber zehnmal möglich ist. Ich schliesse also:

Die Anzahl der Functionen $\varphi(y)$, *welche den aufgeführten Bedingungen genügen, ist für* $n = 5, 7, 11$ *bezüglich* 1, 2, 10.

Es wird sich also die Berechnung der Functionen $\varphi(y)$ bei $n = 5$ und $n = 7$ verhältnissmässig einfach gestalten (wie sich sogleich bestätigt), bei $n = 11$ aber zu complicirteren Rechnungen Anlass geben. Wir werden ferner bei $n = 5$ und $n = 7$ die Functionen $\varphi(y)$ unmittelbar alle gebrauchen können, da es sich ja bei $n = 7$ um die *zwei* Gruppen II_a und II_b handelte. Dagegen würden wir bei $n = 11$ den zwei Gruppen III_a und III_b entsprechend unter den 10 Functionen $\varphi(y)$ noch erst zwei auszusuchen haben, was eine neue Art der Fragestellung bedingen würde. Ich lasse desshalb im Folgenden den Fall $n = 11$ unerledigt und behandele nur $n = 5$ und $n = 7$.

§ 6.

Formeln für $n = 5$.

In Anbetracht der beiden in y enthaltenen willkürlichen Constanten können wir bei $n = 5$ setzen:

$$\begin{aligned}\varphi &= C(y^2 + ay + b)(y - 3)^3,\\ \varphi - \psi &= Cy(y^2 + \alpha y + \beta)^2,\\ \psi &= 1.\end{aligned}$$

Man benutze nun zunächst, dass die Functionaldeterminante von $\varphi - \psi$ und ψ den Factor $(y - 3)^2$ enthalten muss. Dies giebt

$$5(y - 3)^2 = 5y^2 + 3\alpha y + \beta,$$

also

$$\alpha = -10, \quad \beta = 45.$$

Man benutze ferner, dass die Functionaldeterminante von φ und ψ den Factor $y^2 + \alpha y + \beta$ enthalten muss. So kommt:

$$5y^2 + (4a - 6)y + (3b - 3a) = 5(y^2 - 10y + 45),$$

oder

$$a = -11, \quad b = 64.$$

Man setze endlich in $(\varphi) - (\psi) = (\varphi - \psi)$ das y gleich Null, so folgt:

$$C = -\frac{1}{1728}.$$

Daher lautet die Gleichung fünften Grades, um deren Aufstellung es sich handelte, folgendermassen:

$$(3) \quad J : J - 1 : 1 = (y^2 - 11y + 64)(y - 3)^3 : y(y^2 - 10y + 45)^2 : -1728.$$

Will man dieselben noch etwas umsetzen, so schreibe man $\frac{27 g_3^2}{\Delta}$ statt $J - 1$, x^2 statt y, und ziehe aus

$$J - 1 = \frac{\varphi - \psi}{\psi}$$

beiderseits die Quadratwurzel. So kommt, wie bereits in der Einleitung gesagt, die Brioschi'sche Gleichung*), in der Form:

$$(4) \qquad x^5 - 10x^3 + 45 = \frac{216 g_3}{\sqrt{-\Delta}}.$$

*) Vergl. diese Annalen Bd. XII. S. 173; vergl. ferner Kiepert, *über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, Borchardt's Journal Bd. 86. [Dec. 78.]

§ 7.

Formeln für $n = 7$.

Man setze bei $n = 7$:

$$\varphi = C y (y^2 + 7y + 7m)^3,$$
$$\varphi - \psi = C(y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)(y^2 + Ay + B)^2,$$
$$\psi = 1.$$

Hier ist der Coefficient von y in dem rechter Hand in φ auftretenden dreifachen Factor gleich 7 genommen, nachdem sich beim Vergleich herausgestellt hatte, dass er nicht gleich Null ist. Bildet man jetzt die Functionaldeterminante von φ und ψ und verlangt, dass sie den Factor $y^2 + Ay + B$ enthalte, so kommt:

$$y^2 + Ay + B = y^2 + 4y + m,$$

also

$$A = 4, \quad B = m;$$

bildet man ferner die Functionaldeterminante von $(\varphi - \psi)$ und ψ und verlangt, dass sie den Factor $(y^2 + 7y + 7m)$ quadratisch enthalte, so folgt:

$$7(y^2 + 7y + 7m)^2 = (3y^2 + 2\alpha y + \beta)(y^2 + 4y + m) + 2(2y + 4)(y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma),$$

also:

$$\alpha = 13, \ \beta = 27 + 19m, \ \gamma = -81 + 108m, \ 4m^2 - 11m + 8 = 0,$$

oder:

$$m = \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{8}, \ \alpha = 13, \ \beta = \frac{425 \pm 19\sqrt{-7}}{8}, \ \gamma = \frac{135 \pm 27\sqrt{-7}}{2}.$$

Setzt man endlich in $(\varphi) - (\psi) = (\varphi - \psi)$ wieder $y = 0$, so ergiebt sich:

$$C = -\frac{1}{\gamma m^2} = \frac{-4}{27(13 \pm 7\sqrt{-7})}.$$

Daher lautet die gesuchte Gleichung siebenten Grades)*:

$$(5) \quad J : J - 1 : 1 = y\left(y^2 + 7y + \frac{77 \pm 7\sqrt{-7}}{8}\right)^3$$
$$: \left(y^3 + 13y^2 + \frac{425 \pm 19\sqrt{-7}}{8}\, y + \frac{135 \pm 27\sqrt{-7}}{2}\right) \cdot \left(y^2 + 4y + \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{8}\right)^2$$
$$: -\frac{27}{4}\left(13 \pm 7\sqrt{-7}\right).$$

Ich werde dieselbe zuvörderst noch in der Weise umändern, dass ich

---

*) Ich habe diese Gleichung bereits in einer Note veröffentlicht, welche am 20. Mai dieses Jahres der Erlanger Societät vorgelegt wurde.

setze und
$$\mathfrak{z} = \varrho y$$
$$\varrho = -2^2 \cdot 7\,(7 \mp \sqrt{-7})$$
wähle. So kommt:

$$\begin{aligned}
J:J-1:1 &= \mathfrak{z}\left(\mathfrak{z}^2 - 2^2 \cdot 7^2 (7 \mp \sqrt{-7})\,\mathfrak{z} + 2^5 \cdot 7^4 (5 \mp \sqrt{-7})\right)^3 \\
&:\left(\mathfrak{z}^3 - 2^2 \cdot 7 \cdot 13 (7 \mp \sqrt{-7})\,\mathfrak{z}^2 + 2^6 \cdot 7^3 (88 \mp 23\sqrt{-7})\,\mathfrak{z}\right. \\
(6) \qquad &\qquad\qquad \left. - 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7^4 (35 \mp 9\sqrt{-7})\right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\mathfrak{z}^2 - 2^4 \cdot 7\,(7 \mp \sqrt{-7})\,\mathfrak{z} + 2^5 \cdot 7^3 (5 \mp \sqrt{-7})\right)^2 \\
&: \mp 2^{27} \cdot 3^3 \cdot 7^{10} \cdot \sqrt{-7}\,.
\end{aligned}$$

Schreibt man nun hier x^3 statt $\mathfrak{z}$, $\frac{g_2^3}{\Delta}$ statt J und zieht aus
$$J = \frac{\varphi}{\psi}$$
beiderseits die Cubikwurzel, so folgt:

$$(7) \quad x^7 - 2^2 \cdot 7^2 (7 \mp \sqrt{-7})\,x^4 + 2^5 \cdot 7^4 (5 \mp \sqrt{-7})\,x \mp 2^9 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot \sqrt{-7} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0\,.$$

Dies ist nun, wie in der Einleitung angedeutet wurde, im Wesentlichen dieselbe Gleichung, zu der Hermite *bei seinen Untersuchungen geführt wurde.*

Hermite's Gleichung ist nämlich diese:
$$\begin{aligned}
\xi^7 - 4^2 \cdot 7^2 \cdot \sqrt{-7} \cdot \alpha \cdot kk'^4 \cdot \xi^4 - 4^4 \cdot 7^4 (\alpha - 3) k^2 k'^8 \cdot \xi \\
+ 4^6 \cdot 7^3 \cdot \sqrt{-7} \cdot kk'^8 (1 - k^2 + k^4) = 0,
\end{aligned}$$
wo α den Ausdruck $\frac{1-\sqrt{-7}}{2}$ bedeuten soll. Schreibt man hier
$$\xi = \sqrt[3]{2kk'^4} \cdot x$$
und wählt in (7) das untere Zeichen, so stimmen beide Gleichungen überein; man hat sich nur der Relation zu erinnern (pag. 115):
$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 k'^4}\,.$$

München, im October 1878.

Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von Felix Klein in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen stellt sich neben die Modulargleichung sechsten Grades und ihre bekannte Resolvente vom fünften Grad, beide beherrschend, die Galois'sche Resolvente sechszigsten Grades, die *Ikosaedergleichung*. Von ihr ausgehend übersieht man Bildungsgesetz und Eigenschaften jener Gleichungen niederen Grades mit grösster Leichtigkeit. Ich wünsche im Folgenden die Theorie der Transformation *siebenter* Ordnung bis zu demselben Punkte zu führen. Wie man bei ihr die Modulargleichung achten Grades in einfachster Form aufzustellen hat, habe ich bereits in meiner Arbeit: *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen* etc. (pag. 111 ff. dieses Bandes) gezeigt; die zugehörige Resolvente siebenten Grades betrachtete ich in der hier voraufgeschickten Note: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen.* Es handelt sich nunmehr darum, *die zugehörige Galois'sche Resolvente vom* 168^ten^ *Grade in zweckmässigster Weise zu bilden und von ihr aus jene niederen Gleichungen abzuleiten.*

Die Wurzel η dieser Galois'schen Resolvente hat, wie bekannt, als Function des Periodenverhältnisses ω betrachtet, die charakteristische Eigenschaft, bei allen denjenigen linearen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur bei denjenigen ungeändert zu bleiben, welche modulo 7 zur Identität congruent sind. Dies ist für mich im Folgenden die Definition der Irrationalität η. Ich beginne also (§ 1.) mit einer kurzen Untersuchung der linearen Substitutionen in Bezug auf den Modul 7, welche durchaus elementarer Natur ist, aber der Vollständigkeit wegen hier eingeschaltet werden musste*). Es ergiebt sich daraus (§ 2.), wie η als Function der absoluten Invariante J verzweigt ist, und vor allen Dingen dies Resultat, dass die zwischen η und J bestehende Gleichung, dem Geschlechte $p = 3$ angehörig, durch 168 eindeutige Transformationen von a priori angebbarer Gruppirung in sich übergeht. Dies führt zur

---

*) Vergl. die allgemeineren Untersuchungen in Serret's Traité d'algèbre supérieure.

Kenntniss einer merkwürdigen Curve vierter Ordnung, welche durch 168 Collineationen der Ebene in sich übergeht (§ 3.) und in Folge dessen eine Reihe besonders einfacher Eigenschaften besitzt (§ 4., 5.). Es genügt, von der Existenz jener 168 Collineationen zu wissen, um mit leichter Mühe das volle System der zur Curve gehörigen Covarianten aufzustellen (§ 6.), und man erhält die Gleichung 168[ten] Grades, um welche es sich handelt, in übersichtlichster Weise, indem man die Grundcurve mit einem covarianten Curvenbüschel von der 42[ten] Ordnung schneidet (ebenda). Will man von der so erhaltenen Gleichung zur Modulargleichung achten Grades oder zur Resolvente siebenten Grades hinabsteigen, so kommen zumal solche Sätze in Betracht, welche man bei der allgemeinen Curve vierter Ordnung hinsichtlich der Berührungscurven dritter Ordnung und gewisser Gruppirungen der Doppeltangenten kennt (§ 7.—10.). Die Wurzeln der gemeinten Gleichungen erweisen sich dabei als rationale Functionen der Coordinaten *eines* Curvenpunktes, und in dieser expliciten Darstellung scheint mir der wesentliche Fortschritt zu liegen, der für die Transformation siebenter Ordnung erreicht ist. — Die nun noch folgenden Paragraphen (11.—15.) haben den Zweck, ein möglichst anschauliches Bild von der Verzweigung der Riemann'schen Fläche zu entwerfen, welche η als Function von J darstellt und die in mehr abstracter Weise schon in § 2. betrachtet wurde. Die Figuren welche ich dabei erhalte, wollen für die hier vorliegenden Fragen dieselbe Bedeutung beanspruchen, welche die *Gestalt* des Ikosaeders für die Probleme fünften Grades hat.

Die hauptsächlichsten der genannten Resultate habe ich bereits in einer Note veröffentlicht, welche ich am 20. Mai dieses Jahres der Erlanger Societät vorlegte.*) Ebendort zeigte ich bereits, wie sich nunmehr die Zurückführung derjenigen Gleichungen siebenten Grades, welche die Gruppe der Modulargleichung haben, auf eben diese Modulargleichung explicite bewerkstelligen lässt. Im Folgenden bin ich auf diese und andere sich anschliessende Fragen noch nicht eingegangen; ich möchte mir vorbehalten, demnächst ausführlicher auf sie zurückzukommen.

§ 1.

Eintheilung der Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ in Bezug auf den Modul 7.

Unter einer Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ schlechthin verstehe ich im Folgenden immer eine solche

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta},$$

*) Ueber Gleichungen siebenten Grades, zweite Mittheilung.

deren Coefficienten ganzzahlig und deren Determinante gleich Eins ist. Dabei will ich, der Kürze wegen, folgende Ausdrucksweise gebrauchen. Zwei Substitutionen S_1 und S_2 sollen *gleichberechtigt* heissen, wenn es eine dritte Substitution S giebt, so dass man die Relation hat:

$$S_1 = S^{-1} \cdot S_2 \cdot S.$$

Nun unterschied ich früher (pag. 122)*) elliptische, parabolische und hyperbolische Substitutionen. Man hat dann ohne Weiteres folgende Sätze:

Gleichberechtigte Substitutionen haben dieselbe Summe $\alpha + \delta$.

Alle elliptischen Substitutionen von der Periode Zwei ($\alpha + \delta = 0$) *sind gleichberechtigt.*

Nimmt man die elliptischen Substitutionen von der Periode Drei ($\alpha + \delta = \pm 1$) *in der Weise paarweise zusammen, wie sie durch Iteration aus einander hervorgehen, so sind alle solchen Paare gleichberechtigt.*

Die parabolischen Substitutionen ($\alpha + \delta = \pm 2$) *zerfallen in unendlich viele Classen; jede Substitution ist mit einer der folgenden:*

$$\omega' = \omega, \quad \omega' = \omega + 1, \quad \omega' = \omega + 2, \ldots$$

gleichberechtigt.

Fortan werden wir nun die Substitutionen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ nicht mehr an sich, sondern in Bezug auf den Modul 7 betrachten, und also zwei Substitutionen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und $\frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$ als identisch betrachten, wenn $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, $\gamma \equiv \gamma'$, $\delta \equiv \delta'$ ist, demnach auch nicht mehr verlangen, dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Eins ist, sondern nur, dass es congruent Eins ist (modulo 7). Wir haben dann jedenfalls den Satz:

Substitutionen, welche früher gleichberechtigt waren, sind es auch jetzt.

Uebrigens giebt es jetzt nur eine endliche Anzahl von Substitutionen; man zählt sofort ab:

Die Zahl der Substitutionen ist 168.

Unter diesen ist eine, S_1, von der Periode 1, nämlich die Identität $\omega' = \omega$. Das ist selbstverständlich.

Um Substitutionen von der Periode 2 zu erhalten, führen wir die Bedingung $\alpha + \delta = 0$ ein, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode Zwei charakterisirte. Wir finden 21 modulo 7 verschiedene Substitutionen; da sie ihre Periode nicht geändert haben können, so folgt:

Es giebt 21 *gleichberechtigte Substitutionen von der Periode Zwei.*

Dieselben sollen S_2 genannt werden; Beispiel: $-\frac{1}{\omega}$.

---

*) Die Citate auf blosse Seitenzahlen beziehen sich immer auf den gegenwärtigen Annalenband.

Auf dieselbe Weise findet man durch Heranziehen der Bedingung $\alpha + \delta = \pm 1$, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode Drei charakterisirte:

Man hat 28 *gleichberechtigte Paare von Substitutionen* S_3 *mit der Periode* 3. Beispiel für ein Paar: $\frac{-2\omega}{3}$, $\frac{-3\omega}{2}$.

Bei den parabolischen Substitutionen war $\alpha + \delta = \pm 2$. Dementsprechend erhalten wir 49 modulo 7 verschiedene Substitutionen. Von diesen ist eine die Identität $\omega' = \omega$. Die übrigen erweisen sich mit $\omega \pm 1$, $\omega \pm 2$, $\omega \pm 3$ gleichberechtigt; sie haben daher, wie diese, die Periode 7.

Es giebt 48 *Substitutionen* S_7 *von der Periode sieben, welche sich auf acht gleichberechtigte Sextupel vertheilen.*

Beispiel eines Sextupels: $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + 6$.

So bleiben noch $168 - 1 - 21 - 56 - 48 = 42$ Substitutionen, für welche $\alpha + \delta \equiv \pm 3$ ist. Iterirt man sie, so wird für die neue Substitution $\alpha' + \delta' \equiv 0$. Unsere Substitutionen ergeben also, wiederholt, Substitutionen von der Periode 2, haben demnach selbst die Periode 4. Ich werde jede solche Substitution mit der inversen zu einem Paare zusammenfassen. Dann folgt:

Es giebt 21 *gleichberechtigte Paare von Substitutionen* S_4 *mit der Periode* 4, *die einzeln den* 21 *Substitutionen* S_2 *zugeordnet sind.*

Beispiel: $\frac{2\omega + 2}{-2\omega + 2}$, $\frac{2\omega - 2}{2\omega + 2}$, zu $-\frac{1}{\omega}$ gehörig.

An diese Unterscheidung der Periodicität unserer Substitutionen knüpft sich sofort die Aufstellung der aus ihnen zusammenzusetzenden *Gruppen.* Zunächst hat man diejenigen Gruppen, welche nur Wiederholungen einer und derselben Substitution enthalten. *Es giebt von solchen Gruppen:*

1) *Eine,* G_1, *welche nur eine Substitution enthält:* $\omega' = \omega$,

2) 21, G_2, *mit zwei Substitutionen, z. B.:* ω, $-\frac{1}{\omega}$,

3) 28, G_3, *mit drei Substitutionen:* ω, $-\frac{2\omega}{3}$, $\frac{3\omega}{2}$,

4) 21, G_4, *mit vier Substitutionen:* ω, $\frac{2\omega + 2}{-2\omega + 2}$, $-\frac{1}{\omega}$, $\frac{2\omega - 2}{2\omega + 2}$,

5) 8, G_7, *mit sieben Substitutionen:* ω, $\omega + 1$, ... $\omega + 6$.

Unter diesen Gruppen sind immer diejenigen, welche gleich viele Substitutionen enthalten, gleichberechtigt. Es genügt daher zum Beweise der nachfolgenden Sätze jedesmal nur ein Beispiel anzuführen, welches sich auf eine einzelne der im Satze gemeinten Gruppen bezieht. Man findet:

1) *Jede Substitution* S_2 *ist mit vier anderen* S_2 *vertauschbar. Diese vier* S_2 *vertheilen sich in der Art auf zwei Paare, dass die Substitutionen eines Paares unter sich ebenfalls vertauschbar sind.*

Beispiel: Die Substitution $-\frac{1}{\omega}$ ist mit folgenden vertauschbar:

$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2},\quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3},\quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

Die beiden ersten sind unter einander gleichfalls vertauschbar, ebenso die beiden letzten.

2) *Demnach giebt es* 14 *Gruppen* G_4' *mit vier Substitutionen, welche, von der Identität abgesehen, nur Substitutionen von der Periode* 2 *enthalten.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2},\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}$

oder auch: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\ \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$

Diese 14 Gruppen sind untereinander nun *nicht* gleichberechtigt, sondern vertheilen sich, den beiden angeführten Beispielen entsprechend, zu je sieben auf zwei Classen. Jede G_2 ist an einer Gruppe G_4' aus jeder Classe betheiligt.

3) *Mit jeder Gruppe* G_3 *sind drei Substitutionen* S_2 *vertauschbar. Also giebt es* 28 *unter einander gleichberechtigte Gruppen* G_6' *von sechs Substitutionen. Jede* G_2 *ist an vier solchen* G_6' *betheiligt.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{3\omega}{2},\ -\frac{2\omega}{3},\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2}{3\omega},\ \frac{3}{2\omega}.$

4) *Die vier Substitutionen* S_2, *welche Satz* (1) *zufolge mit einer gegebenen* S_2 *vertauschbar sind, sind auch mit der* G_4 *vertauschbar, in welcher die gegebene* S_2 *enthalten ist. Dies giebt* 21 *gleichberechtigte Gruppen* G_8' *von acht Substitutionen.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+2}{-2\omega+2},\ \frac{2\omega-2}{+2\omega+2},$

$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2},\quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3},\quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

5) *Mit jeder Gruppe* G_7 *sind* 14 *Substitutionen* S_3 *vertauschbar. Dies giebt acht gleichberechtigte Gruppen* G_{21}' *von* 21 *Substitutionen. Jede* S_3 *ist an zwei solchen Gruppen betheiligt.*

Beispiel: $\omega+k,\ \frac{-2(\omega+k)}{3},\ \frac{-3(\omega+k)}{2}$ für $k=0, 1, \ldots . 6,$

oder auch: die Gesammtheit der Substitutionen $\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega+\delta}.$

6) *Den* $2\cdot 7$ *Gruppen* G_4' (*Satz* (2)) *entsprechend giebt es* $2\cdot 7$ *Gruppen* G_{24}'' *mit* 24 *Substitutionen.* Dieselben entstehen folgendermassen. Man nehme eine G_4' und vervollständige dieselbe:

a) durch diejenigen 6 S_4, deren Wiederholungen die der G_4' angehörigen drei Substitutionen S_2 sind,

b) durch diejenigen 6 S_2, welche mit einer der genannten drei S_2 vertauschbar sind, ohne selbst bereits der G_4' anzugehören.

Wenn man die so zusammengestellten Substitutionen beliebig combinirt, so entstehen nur noch:

c) vier Paare zusammengehöriger Substitutionen S_3, und $4+6+6+4\cdot 2$ ist 24.

Beispiel: G_4': $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2},\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}$;

$$\left\{\begin{array}{l} S_4\text{, welche zu } -\frac{1}{\omega} \text{ gehören: } \frac{2\omega+2}{-2\omega+2},\ \frac{2\omega-2}{2\omega+2};\\ S_4\text{, welche zu } \frac{2\omega+3}{3\omega-2} \text{ gehören: } \frac{\omega+1}{\omega+2},\ \frac{-2\omega+1}{\omega-1};\\ S_4\text{, welche zu } \frac{3\omega-2}{-2\omega-3} \text{ gehören: } \frac{3\omega-3}{-3\omega+1},\ \frac{\omega+3}{3\omega+3};\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Neue } S_2\text{, mit } -\frac{1}{\omega} \text{ vertauschbar: } \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\ \frac{3\omega+2}{2\omega-3};\\ \quad ,,\quad ,,\ ,\ ,,\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2}\quad ,,\quad ,,\quad : \frac{-\omega+1}{-2\omega+1},\ \frac{\omega+2}{-\omega-1};\\ \quad ,,\quad ,,\ ,\ ,,\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}\quad ,,\quad ,,\quad : \frac{3\omega-1}{3\omega-3},\ \frac{-3\omega-3}{\omega+3}.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Paare von } S_3\text{, welche durch Combination entstehen:}\\ \qquad\qquad \frac{-3\omega-1}{2},\ \frac{-2\omega-1}{3};\\ \qquad\qquad \frac{2\omega}{\omega-3},\ \frac{3\omega}{\omega-2};\\ \qquad\qquad \frac{2}{3\omega+1},\ \frac{-\omega+2}{3\omega};\\ \qquad\qquad \frac{-\omega+3}{2\omega},\ \frac{-3}{2\omega+1}.\end{array}\right.$$

Man sieht: Die 24 Substitutionen einer G_{24}'' sind ebenso beschaffen, wie die 24 Vertauschungen von vier Elementen, oder auch wie die 24 Drehungen, welche ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Ich werde von beiden Vergleichungen später eine Anwendung machen. — Uebrigens sind diese G_{24}'' selbstverständlicherweise keine anderen Gruppen, als diejenigen, deren ich mich in dem Aufsatze: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen* bediente. Ich habe sie damals im Anschlusse an Betti in einer etwas anderen Gestalt mitgetheilt, indem ich nämlich nicht daran festhielt, dass $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1$ (mod. 7) sei, sondern nur verlangte, dass $\alpha\delta-\beta\gamma$ congruent einem quadratischen Reste werde, — ein Unterschied, der für die gebrochene Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ bedeutungslos ist.

7) Man beweist endlich durch bekannte Methoden, *dass in der Gesammtheit der* 168 *Substitutionen* $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *keine anderen Untergruppen vorhanden sind, als die nun aufgezählten.*

§ 2.

Die Function $\eta(\omega)$ und ihre Verzweigung in Bezug auf J.

Es sei jetzt η eine algebraische Function von J, welche so verzweigt ist, dass sie, als Function von ω betrachtet, folgende Eigenschaften besitzt:

1) Sie ist innerhalb der positiven Halbebene ω durchaus eindeutig,

2) sie geht durch diejenigen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur durch diejenigen in sich über, welche modulo 7 zur Identität congruent sind.

Ich will mit $\eta(\omega)$ einen der Werthe bezeichnen, welche zu einem gegebenen J gehören. Man erhält dann alle anderen, indem man statt ω die 167 Ausdrücke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ einträgt, welche modulo 7 von ω verschieden sind, denn *alle* Werthe von ω, die zu dem gegebenen J gehören, sind in dieser Form enthalten. Daher:

η ist mit J durch eine Gleichung vom Grade 168 *in η verbunden.*

Es mögen die 168 Wurzeln in irgend einer Reihenfolge mit

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_{168}$$

bezeichnet sein. Wenn jetzt J in der Ebene, welche seine complexen Werthe versinnlicht, einen geschlossenen Weg beschreibt, so erfährt ein beliebiges der zugehörigen ω eine Substitution $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$. Dementsprechend erleiden die η eine bestimmte Permutation, indem in $\eta\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ für ω der eben angegebene Werth eingetragen werden muss. Soll nun nach dieser Permutation (bei allgemeinem Werthe von J) *irgend* ein η_i mit einem Anfangswerthe zusammenfallen, so ist offenbar nöthig, dass die Substitution $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ modulo 7 zur Identität congruent ist; dann aber fallen *alle* Werthe η mit ihren Anfangswerthen zusammen. Denn bezeichnet S irgend eine Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, S_0 eine beliebige solche, die modulo 7 zur Identität congruent ist, und S_0' eine bestimmte derselben Art, so hat man allemal die Relation:

$$SS_0 = S_0'S.$$

Ich drücke das so aus:

Alle Wurzeln η_i sind in Bezug auf J gleichverzweigt.

Die Verzweigungspunkte selbst können nach meinen früheren Angaben nur bei $J = 0,\ 1,\ \infty$ liegen (pag. 128). Umkreist J den Punkt 0, so erfährt ω eine elliptische Substitution von der Periode 3, umkreist es den Punkt 1, so erfährt ω eine elliptische Substitution von

der Periode 2. Endlich, wenn es den Punkt ∞ umkreist, so erfährt ein passend gewähltes ω die parabolische Substitution $\omega' = \omega + 1$. Daher folgt:

Bei $J = 0$ hängen von den 168 Blättern der η repräsentirenden Riemann'schen Fläche 56-mal drei Blätter im Cyklus zusammen, bei $J = 1$ 84-mal zwei Blätter, bei $J = \infty$ 24-mal sieben Blätter.

Das *Geschlecht* der zwischen η und J bestehenden Gleichung erweist sich hiernach gleich *Drei:*

$$p = \tfrac{1}{2}(2 - 2 \cdot 168 + 56 \cdot 2 + 84 \cdot 1 + 24 \cdot 6) = 3.$$

Algebraische Functionen von J, welche in Bezug auf J gleichverzweigt sind, lassen sich durch einander mit Hülfe von J rational darstellen. Daher folgt:

Jede Wurzel η_i unserer Gleichung ist eine rationale Function von jeder anderen Wurzel η_k und J.

Oder anders ausgedrückt:

Man kann 168 rationale Functionen $R(\eta, J)$ mit numerischen Coefficienten bilden, so dass, unter η eine beliebige Wurzel verstanden, folgende Relationen bestehen:

$$\eta_1 = R_1(\eta, J),\ \eta_2 = R_2(\eta, J), \ldots \eta_{168} = R_{168}(\eta, J).$$

Es giebt also, den 168 Substitutionen entsprechend, welche im ersten Paragraphen betrachtet wurden, 168 *eindeutige Transformationen unserer Riemann'schen Fläche in sich.* Die weiteren Schlüsse stützen sich alle darauf, dass man, nach § 1., die Gruppirung jener Substitutionen kennt und dass diese Gruppirung sich bei den nunmehr in Betracht kommenden eindeutigen Transformationen wiederfinden muss.

Doch beachten wir zunächst Folgendes. Durch die Transformationen wird jeder Punkt unserer Riemann'schen Fläche in jeden anderen über ihm resp. unter ihm liegenden Punkt verwandelt. Fragt man also, ob es Punkte der Riemann'schen Fläche giebt, welche bei einigen der 168 Transformationen fest bleiben und aus denen also weniger als 168 verschiedene Punkte hervorgehen, so beantwortet sich diese Frage einfach durch die Verzweigungsstellen, — denn sie sind die einzigen Punkte, welche gleichzeitig verschiedenen Blättern angehören. Mit Rücksicht auf das, was soeben hinsichtlich der Verzweigung gesagt wurde, haben wir also den Satz:

Unter den Gruppen von je 168 durch die Transformationen zusammengeordneten Punkten haben wir, $J = \infty$ entsprechend, eine siebenfach zählende von nur 24, $J = 0$ entsprechend eine dreifach zählende von nur 56, $J = 1$ entsprechend eine doppeltzählende von nur 84. Andere mehrfach zählende Punktgruppen giebt es nicht.

Ich werde diese Punkte, ihrer Wichtigkeit halber, mit einer besonderen Bezeichnung belegen; sie sollen die Punkte a, b, c heissen.

Jeder Punkt a bleibt bei einer Transformation von der Periode 7 ungeändert, d. h. also überhaupt bei den Transformationen einer G_7. Ebenso bleibt jeder Punkt b bei den Transformationen einer G_3, jeder Punkt c bei den Transformationen einer G_2 ungeändert. Nun wissen wir aber, dass es nur acht Gruppen G_7, 28 Gruppen G_3 und 21 Gruppen G_2 giebt, ausserdem 21 Gruppen G_4. So schliessen wir:

Bei den Transformationen einer G_7 bleiben immer drei Punkte a fest, bei den Transformationen einer G_3 zwei Punkte b, bei den Transformationen einer G_2 vier Punkte c.

Bei den Transformationen einer G_4 bleibt kein Punkt ungeändert.

Nun war jede G_7 ausgezeichnete Gruppe in einer G'_{21}, welche neben den Substitutionen der G_7 nur Substitutionen von der Periode 3 umfasste. Die drei Punkte a, welche bei den Transformationen der G_7 ungeändert bleiben, können es bei den anderen Transformationen der G'_{21} nicht thun; denn sonst würde es nicht 24, sondern nur acht Punkte a geben. Daher werden die drei Punkte a durch die neuen Transformationen unter einander vertauscht, und da die Periode der neuen Transformationen Drei ist, so werden sie *cyklisch* vertauscht.

In diesem Sinne bleibt bei den Transformationen einer G'_{21} jedesmal ein Tripel zusammengehöriger Punkte a ungeändert.

Ebenso schliesst man:

Bei den Transformationen einer G_6' bleibt jedesmal ein Paar zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Die G_6' enthält Transformationen von der Periode Drei und solche von der Periode Zwei. Bei den ersteren bleiben die beiden Punkte b einzeln genommen fest, bei den letzteren werden sie wechselseitig vertauscht.

Diese Sätze lassen sich vervielfachen. Ich führe nur noch folgende an.

Jede S_2 war mit vier anderen S_2 vertauschbar. Das heisst:

Bei einer Transformation von der Periode 2 bleiben ausser dem Quadrupel der einzeln festbleibenden Punkte c noch vier andere Quadrupel ungeändert (aber nicht die Punkte c in ihnen).

Ferner war jede S_2 mit vier G_3 vertauschbar. Also:

In demselben Sinne bleiben bei einer Substitution von der Periode Zwei vier Paare zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Ich erinnere endlich daran, dass sich unter den Substitutionen einer G''_{24} vier Gruppen G_3 befanden. Dementsprechend erhalten wir vier Paare zusammengehöriger Punkte b, und nach dem, was über die Beschaffenheit der G''_{24} gesagt wurde, ist deutlich, *dass diese vier Paare vermöge der Transformationen der G''_{24} auf alle Weisen unter einander permutirt werden.*

Die angeführten Sätze sind immer so zu verstehen, dass auch nicht mehr Paare etc., als angegeben ist, ungeändert bleiben resp. auf alle Weisen permutirt werden.

§ 3.

Die Normalcurve von der vierten Ordnung.

Als Unbekannte η in unserer Gleichung 168. Grades kann jede algebraische Function gewählt werden, die innerhalb der nunmehr geschilderten Riemann'schen Fläche eindeutig ist und bei den 168 eindeutigen Transformationen 168 im Allgemeinen verschiedene Werthe annimmt. Wir werden jedenfalls die einfachste Function auswählen wollen, wenn es sich um wirkliche Aufstellung der Gleichung handelt, und dementsprechend beschäftige ich mich zunächst mit dem Probleme, diejenige *Normalcurve niederster Ordnung* anzugeben, auf welche sich die Gleichung η und J eindeutig beziehen lässt. Dies Problem erledigt sich, wie man sehen wird, durch eine Reihe einfacher Schlüsse, welche sich desshalb ermöglichen, *weil man die algebraischen Functionen vom Geschlechte $p = 3$ auf Grund anderer Untersuchungen ziemlich genau kennt.**)

Bei den algebraischen Functionen $p = 3$ sind zwei Fälle hinsichtlich der Normalcurve zu unterscheiden: der *hyperelliptische* und der *allgemeine*. Im ersteren Falle ist die Normalcurve eine Curve fünfter Ordnung mit dreifachem Punkte, im zweiten eine Curve vierter Ordnung.

Ich behaupte nun zunächst: *hyperelliptisch kann unsere Normalcurve nicht sein.* Denn sie muss, wie die Gleichung zwischen η und J, auf die sie eindeutig bezogen ist, durch 168 eindeutige Transformationen der bewussten Gruppirung in sich übergehen. Bei der hyperelliptischen Curve aber hat die einfach unendliche Schaar von Punktpaaren, die bei der C_5 mit dreifachem Punkte durch die von diesem Punkte ausgehenden Strahlen ausgeschnitten wird, gegenüber eindeutiger Transformationen eine invariante Bedeutung. Es müsste also der von dem dreifachen Punkte ausgehende Strahlbüschel auf 168 Weisen eindeutig in sich transformirt werden.**) Nun ist ein Strahlbüschel eine rationale Mannigfaltigkeit von einer Dimension; es müsste also (nach dem von

---

*) Siehe namentlich: *Weber*, *Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p = 3$* (Berlin, 1876).

**) Man könnte an bloss 84 Weisen denken, indem eine Substitution S_2 möglicherweise darin bestehen könnte, dass die beiden von einem Strahl ausgeschnittenen Punkte vertauscht werden, — was sich dann auch, wie im Texte, als unmöglich erweisen würde. Aber das ist schon deshalb unzulässig, weil die Gruppe der 168 Transformationen einfach ist.

mir schon oft angewandten Schlusse) eine Gruppe von 168 linearen Transformationen einer Veränderlichen geben, welche, wohlverstanden, ebenso beschaffen wäre, wie unsere Transformationsgruppe, also z. B. keine Substitution von einer Periode > 7 enthielte. Eine solche Gruppe aber giebt es bekanntlich nicht.

Also ist unsere Normalcurve von der vierten Ordnung.

Jetzt lehrt die Theorie der algebraischen Functionen*), dass allgemein bei einer eindeutigen Transformation einer Curve in sich die von Riemann so genannten Functionen φ linear transformirt werden. Bei der Curve vierter Ordnung nehmen die Functionen φ jeden Werth im Allgemeinen in *vier* Punkten an, und die Punktquadrupel, welche in diesem Sinne einer Function φ entsprechen, können durch die geraden Linien, welche sich in einem bestimmten Punkte der Ebene kreuzen, ausgeschnitten werden. Daher gehört zu jeder linearen Transformation der φ eine Umformung der Ebene, bei welcher jeder geraden Linie eine gerade Linie, jedem Punkte ein Punkt entspricht, d. h. eine *Collineation* im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Daher:

Unsere Curve vierter Ordnung geht durch 168 *Collineationen, welche die bewusste Gruppirung haben, in sich über;*

und vor allen Dingen:

Es giebt eine endliche Gruppe von 168 *Collineationen der Ebene, unter denen keine eine Periode* > 7 *hat.***)

Auf unserer Curve vierter Ordnung werden sich, diesen Collineationen entsprechend, die Punkte im Allgemeinen zu je 168 zusammenordnen. Nur einmal sind es bloss 24 (die Punkte a, wie ich sie auch jetzt nennen werde), ein anderes Mal bloss 56 (die Punkte b), ein drittes Mal bloss 84 (die Punkte c). Andere Gruppen von weniger als 168 zusammengehörigen Punkten giebt es nicht.

Nun aber kennt man auf einer Curve vierter Ordnung Gruppen von 24, 56, 84 ausgezeichneten Punkten, das sind die 24 *Wendepunkte*, die 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten*, die 84 *sextaktischen Punkte*. Diese Punkte sind sämmtlich durch Eigenschaften charakterisirt, welche bei Collineationen der Ebene ungeändert bleiben und werden also bei den 168 Collineationen der Curve in sich bez. unter einander vertauscht. Daher folgt:

---

*) Siehe Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, diese Annalen Bd. VII.

**) In der Aufzählung aller endlichen Gruppen ternärer linearer Substitutionen, welche Camille Jordan gegeben hat (Borchardt's Journal Bd. 84) scheint diese Gruppe übersehen zu sein. [Wie mir Hr. C. Jordan mittheilt, befindet sich der Fehler auf S. 167 der genannten Arbeit, Z. 8 v. u., indem Ω daselbst nicht durch 9φ sondern nur durch 3φ dividirbar zu sein braucht. (Dec. 1878)].

Die Punkte a sind die Wendepunkte, die Punkte b die Berührungspunkte der Doppeltangenten, die Punkte c die sextaktischen Punkte.

Man könnte diesem Schlusse gegenüber vielleicht einwenden, dass möglicherweise die Wendepunkte mit den Berührungspunkten der Doppeltangenten oder mit den sextaktischen Punkten, oder diese beiden letzten Kategorien unter einander zum Theil zusammenfallen. Um diesen Einwand zu entkräften, genügt es, darauf hinzuweisen, dass 56 durch 24 nicht theilbar ist und dass sich 84 aus 56 und 24 nicht ganzzahlig zusammensetzen lässt. In der That können wir, nach dem, was wir von der Riemann'schen Fläche wissen, nun einmal nur Gruppen von 24, 56, 84 Punkten gebrauchen. —

Aber auch die *Tripel* der Punkte a, die *Paare* der Punkte b und die *Quadrupel* der Punkte c bekommen eine einfache Bedeutung.

Was zunächst die *Tripel* betrifft, so beachte man, dass jede Wendetangente der C_4 dieselbe noch in *einem* weiteren Punkte schneidet. Solcher Punkte erhalten wir, entsprechend der Zahl der Wendepunkte, 24. Nun giebt es auf unserer Curve nur *eine* Gruppe von 24 zusammengehörigen Punkten, das sind die Wendepunkte selbst. Wir schliessen also:

Die neuen Punkte fallen mit den Wendepunkten in irgend einer Reihenfolge zusammen.

Mit dem anfänglich gewählten Punkte kann der neue Punkt nicht coincidiren; sonst hätte man eine vierpunktig berührende Tangente und die Wendepunkte wären weder unter sich noch von den Berührungspunkten der Doppeltangenten durchaus verschieden. Daher:

Jede Wendetangente unserer C_4 schneidet dieselbe noch in einem weiteren Wendepunkte.

Nun giebt es Collineationen der C_4 in sich, welche den anfänglich gewählten Wendepunkt fest lassen. Dieselben lassen jedenfalls auch den nun construirten neuen Wendepunkt ungeändert; dann weiter auch denjenigen, welcher aus diesem durch Wiederholung desselben Processes abgeleitet wird, etc. Nun sind aber die *Tripel* zusammengehöriger Punkte a eben dadurch charakterisirt worden, dass sie bei denselben Transformationen ungeändert bleiben. Also folgt:

Die 24 Wendepunkte unserer C_4 vertheilen sich in der Weise auf acht Dreiecke, dass die Dreiecksseiten zugleich die Wendetangenten sind.

Diese Wendedreiecke entsprechen den Tripeln zusammengehöriger Punkte a.

Noch einfacher ist die Bedeutung der *Paare* zusammengehöriger Punkte b. Bleibt bei einer Collineation, welche die C_4 in sich überführt, der eine Berührungspunkt einer Doppeltangente fest, so gewiss auch der andere. Daher:

Den 28 Paaren zusammengehöriger Punkte b entsprechen die 28 Doppeltangenten mit ihren beiden Berührungspunkten.

Um endlich die *Quadrupel* der Punkte c zu interpretiren, beachte man den leicht zu beweisenden Satz, dass in der Ebene jede Collineation von der Periode 2 eine *Perspective* ist. Wir erhalten also den 21 Substitutionen S_2 entsprechend 21 *Axen* und 21 zugehörige *Centra*, in Bezug auf welche unsere C_4 sich selbst perspectivisch ist. Jede Axe schneidet die C_4 in vier Punkten: das sind eben die 4 Punkte c, welche bei der betreffenden S_2 ungeändert bleiben. Also:

Die 84 sextaktischen Punkte unserer C_4 werden von 21 geraden Linien ausgeschnitten.

Die vier Punkte, welche einer Linie angehören, repräsentiren jedesmal ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.

Betrachten wir zuletzt noch die drei am Ende des vorigen Paragraphen angeführten Sätze. So bekommen wir:

Durch jedes Centrum der Perspectivität laufen vier Axen hindurch, auf jeder Axe liegen vier Centra.

Jede Doppeltangente trägt drei Centra, indem durch jedes Centrum vier Doppeltangenten verlaufen.

Bei den 24 Collineationen einer G''_{24} werden vier ausgezeichnete Doppeltangenten auf alle Weise permutirt.

§ 4.

Gleichungsformen der Curve vierter Ordnung.

Die angeführten Sätze sind mehr als hinreichend, um für unsere C_4 verschiedene Gleichungen aufzustellen, in denen die Collineationen der verschiedenen Gruppen ohne Weiteres hervortreten.

Als Coordinatendreieck möge zunächst ein *Wendedreieck* zu Grunde gelegt werden. Seine Seiten seien $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ und sollen bezüglich im Schnitte mit $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$ die Curve osculiren. Dann hat die Gleichung der C_4 jedenfalls folgende Gestalt:

$$A\lambda^3\mu + B\mu^3\nu + C\nu^3\lambda + \lambda\mu\nu(D\lambda + E\mu + F\nu) = 0.$$

Nun soll unsere Curve bei cyklischer Vertauschung der Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Daher ist, wenn wir in die Definition von λ, μ, ν passende Zahlenfactoren aufnehmen, $A = B = C$ und $D = E = F$. Ferner soll die C_4 bei sechs Collineationen von der Periode 7 in sich übergehen, vermöge deren die Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Diese Collineationen drücken sich analytisch jedenfalls so aus, dass die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ mit passenden siebenten Einheitswurzeln multiplicirt werden. Dabei kann der Term $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ unmöglich in ein

Multiplum seiner selbst übergehen; er darf daher in unserer Gleichung nicht vorkommen. *Die Gleichung lautet daher einfach:*

$$(1) \qquad 0 = f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda.$$

Ich will die Collineationen, durch welche f in sich selbst übergeht, immer so angeben, dass sie die Determinante *Eins* besitzen. Dann hat man erstens die Collineation von der Periode Drei:

$$(2) \qquad \lambda' = \mu, \quad \mu' = \nu, \quad \nu' = \lambda,$$

sodann folgende Collineation von der Periode 7:

$$(3) \qquad \lambda' = \gamma\lambda, \quad \mu' = \gamma^4\mu, \quad \nu' = \gamma^2\nu, \quad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

verbindet man beide in beliebiger Wiederholung, *so hat man die G'_{21}, bei welcher das zu Grunde gelegte Wendedreieck ungeändert bleibt.*

Um nunmehr die 6 Collineationen einer G_6' hervortreten zu lassen, werde ich ein neues Coordinatendreieck einführen, dessen Seiten dadurch definirt sind, dass sie bei den Vertauschungen (2) ungeändert bleiben. Dementsprechend setze ich zunächst:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda + \mu + \nu}{\alpha - \alpha^2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu}{\alpha - \alpha^2} \\ x_3 = \dfrac{\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu}{\alpha - \alpha^2} \end{cases} \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Dann wird die Gleichung unserer Curve

$$(5) \quad 0 = f = \tfrac{1}{3}(x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 3x_2^2x_3^2 + x_1((1+3\alpha^2)x_2^3 + (1+3\alpha)x_3^3)).$$

Um hier rechter Hand die dritten Einheitswurzeln fortzuschaffen, setze ich ferner:

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt[3]{7}}, \\ x_2 = y_2\sqrt[3]{3\alpha + 1}, \\ x_3 = y_3\sqrt[3]{3\alpha^2 + 1} \end{cases}$$

und erhalte:

$$(6) \quad 0 = f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}(y_1^4 + 21y_1^2y_2y_3 - 147y_2^2y_3^2 + 49y_1(y_2^3 + y_3^3)).$$

Man sieht hier ohne Weiteres, dass $y_1 = 0$ eine Doppeltangente unserer Curve ist, welche im Schnitt mit $y_2 = 0$ und mit $y_3 = 0$ berührt, und *dass sich die sechs Substitutionen der zugehörigen G_6' aus folgenden beiden zusammensetzen lassen*, von *denen die erste mit* (2) *zusammenfällt:*

$$(7) \qquad y_1' = y_1, \quad y_2' = \alpha y_2, \quad y_3' = \alpha^2 y_3,$$

$$(8) \qquad y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_3, \quad y_3' = -y_2.$$

Die drei Centra, welche auf $y_1 = 0$ liegen, sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$y_2 + y_3 = 0, \quad y_2 + \alpha y_3 = 0, \quad y_2 + \alpha^2 y_3 = 0,$$

während die zugehörigen Axen der Perspectivität folgende sind:

$$y_2 - y_3 = 0, \quad y_2 - \alpha y_3 = 0, \quad y_2 - \alpha^2 y_3 = 0.$$

Um jetzt den Uebergang zu einer G''_{24} zu finden, suche ich vor allen Dingen die Doppeltangenten zu bestimmen, welche von den genannten Centren auslaufen. Durch jedes Centrum gehen vier Doppeltangenten, aber eine derselben fällt bei uns jedesmal mit $y_1 = 0$ zusammen, so dass es sich nur um 9 Doppeltangenten handelt. Betrachten wir zunächst diejenigen, welche durch das erste Centrum hindurchgehen und demnach eine Gleichung folgender Form haben:

$$\sigma y_1 + (y_2 + y_3) = 0.$$

Um sie zu bestimmen, trage man den Werth von y_1 aus vorstehender Gleichung in die Curvengleichung ein, ordne nach $\frac{y_2 y_3}{(y_2 + y_3)^2}$ und bilde die Discriminante der für diese Grösse entstehenden quadratischen Gleichung. So erhält man folgende Gleichung für σ:

$$28\sigma^3 - 21\sigma^2 - 6\sigma - 1 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$\sigma = 1, \quad \sigma = \frac{-1 \pm 3\sqrt{-\frac{1}{7}}}{8}.$$

Die drei durch das Centrum laufenden Doppeltangenten lauten demnach:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$(-7 \pm 3\sqrt{-7})y_1 + 56y_2 + 56y_3 = 0.$$

Die sechs übrigen durch die beiden anderen Centra laufenden Doppeltangenten ergeben sich aus diesen durch die Substitutionen (7).

Ich sage nun, *dass $y_1 = 0$ zusammen mit solchen drei der genannten Doppeltangenten, welche durch* (7) *aus einander hervorgehen, ein Quadrupel von Doppeltangenten bildet, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.* Allgemein nämlich werden die sechs Punkte, welche aus einem beliebigen Punkte durch die Substitutionen der G_6' hervorgehen, mit den Berührungspunkten von $y_1 = 0$ auf einem Kegelschnitte liegen, weil bei den Substitutionen (7), (8) jeder quadratische Ausdruck $y_1^2 + k y_2 y_3$ ungeändert bleibt. Die sechs Berührungspunkte der genannten Tripel von Doppeltangenten gehen aber durch die Substitutionen der G_6' aus einander hervor, denn jede einzelne Doppeltangente bleibt, weil sie durch ein Centrum verläuft, bei einer

Substitution von der Periode 2 ungeändert, während sich die Berührungspunkte auf ihr vertauschen.

Demnach kann jetzt die Gleichung unserer C_4 auf drei Weisen in die Form gesetzt werden: $pqrs - w^2 = 0$, wo p, q, r, s Doppeltangenten, w ein Kegelschnitt ist, der durch ihre Berührungspunkte läuft. Man findet einmal:

$$(9) \quad 0 = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}\{49y_1(y_1+y_2+y_3)(y_1+\alpha y_2+\alpha^2 y_3)(y_1+\alpha^2 y_2+\alpha y_3) - 3(4y_1^2-7y_2y_3)^2\},$$

das andere Mal:

$$(10) \quad 0 = f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}} \cdot \Big\{\frac{y_1}{7\cdot 8^3}((-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56y_2+56y_3)\cdot$$
$$\cdot((-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56\alpha y_2+56\alpha^2 y_3)\cdot$$
$$\cdot((-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56\alpha^2 y_2+56\alpha y_3)$$
$$-3\Big(\frac{1\pm 3\sqrt{-7}}{16}\cdot y_1^2-7y_2y_3\Big)^2\Big\}.$$

Die Gleichungsform (9) wird uns später (im letzten Paragraphen) von Wichtigkeit sein, *die andere ergiebt, wie ich nun zeigen werde, ohne Weiteres die Substitutionen einer* G''_{24}.

Man setze nämlich:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = (21\mp 9\sqrt{-7})y_1, \\ \mathfrak{z}_2 = (-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56y_2+56y_3, \\ \mathfrak{z}_3 = (-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56\alpha y_2+56\alpha^2 y_3, \\ \mathfrak{z}_4 = (-7\pm 3\sqrt{-7})y_1+56\alpha^2 y_2+56\alpha y_3, \end{cases}$$

so dass $\Sigma\mathfrak{z} = 0$ ist. Dann geht (10), von einem Zahlenfactor abgesehen, in folgende Gleichung über:

$$(12) \quad (\Sigma\mathfrak{z}^2)^2 - (14\pm 6\sqrt{-7})\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4 = 0$$

und diese Gleichung bleibt bei den 24 Collineationen ungeändert, welche durch die Vertauschungen der $\mathfrak{z}$ *dargestellt sind. Dies also sind die Collineationen der betreffenden* G''_{24}.

Man sieht: bei den Collineationen einer G''_{24} bleibt allemal ein Kegelschnitt ungeändert:

$$\Sigma\mathfrak{z}^2 = 0,$$

welcher durch die Berührungspunkte der ausgezeichneten Doppeltangenten hindurchläuft. Da es $2\cdot 7$ Gruppen G''_{24} giebt und alle Doppeltangenten unter einander gleichberechtigt sind, so giebt es $2\cdot 7$ derartiger Kegelschnitte, von denen jedesmal sieben zusammengehörige die Berührungspunkte sämmtlicher Doppeltangenten ausschneiden Diese Kegelschnitte werden weiterhin von grösster Wichtigkeit werden.

§ 5.

Die 168 Collineationen bezogen auf das Wendedreieck. Sonstige Formeln.

De Gleichungen, welche nach (4), (6) zwischen den Variablen λ, μ, ν und y_1, y_2, y_3 bestehen, lassen sich so schreiben:

$$(12a)\quad\begin{cases} -\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\lambda = y_1 + \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\mu = y_1 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha\,\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\nu = y_1 + \alpha\,\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3. \end{cases}$$

Vertauscht man nun hier y_1, y_2, y_3 nach (8) mit $-y_1$, $-y_3$, $-y_2$ und schreibt dementsprechend:

$$-\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\lambda' = -y_1 - \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\mu' = -y_1 - \alpha\,\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\,\sqrt[3]{7}\,\nu' = -y_1 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha\,\sqrt[3]{(73\alpha+1)}\cdot y_3,$$

eliminirt sodann zwischen beiden Gleichungssystemen die y_1, y_2, y_3, *so hat man offenbar den Uebergang von einem Wendedreiecke* $\lambda\mu\nu = 0$ *zu einem anderen* $\lambda'\mu'\nu' = 0$ *gefunden.* Die Rechnung ergiebt ein sehr einfaches Resultat, wenn man die bekannten Ausdrücke für die rechts stehenden Cubikwurzeln in dritten und siebenten Einheitswurzeln benutzt*). Sei nämlich:

$$(13)\qquad A = \frac{\gamma^5-\gamma^2}{\sqrt{-7}},\quad B = \frac{\gamma^3-\gamma^4}{\sqrt{-7}},\quad C = \frac{\gamma^6-\gamma}{\sqrt{-7}},$$
$$\sqrt{-7} = \gamma + \gamma^4 + \gamma^2 - \gamma^6 - \gamma^3 - \gamma^5,$$

so kommt einfach:

$$(14)\qquad\begin{cases} \lambda' = A\lambda + B\mu + C\nu, \\ \mu' = B\lambda + C\mu + A\nu, \\ \nu' = C\lambda + A\mu + B\nu. \end{cases}$$

Verbindet man nun diese Substitution (welche die Periode 2 hat) auf alle Weisen mit beliebigen Wiederholungen der beiden (2), (3):

$$\lambda' = \mu,\qquad \mu' = \nu,\qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma\lambda,\qquad \mu' = \gamma^4\mu,\qquad \nu' = \gamma^2\nu,$$

so hat man explicite die 168 Collineationen, welche die Curve vierter Ordnung, oder, besser gesagt, die ternäre biquadratische Form

---

*) Es ist

$$\sqrt[3]{7(3\alpha+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha\,(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha^2(\gamma^4+\gamma^3),$$
$$\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha^2(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha\,(\gamma^4+\gamma^3).$$

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda$$

in sich überführen.

An dieses Resultat anknüpfend lassen sich die Coordinaten sämmtlicher singulärer Elemente, welche unsere Curve besitzt, ohne Weiteres angeben; man hat jedesmal nur die Coordinaten eines einzigen Elementes der gewollten Art zu bestimmen und auf diese die 168 Collineationen anzuwenden. Auf solche Art ergeben sich sofort die Coordinaten der 24 Wendepunkte und der zugehörigen Wendetangenten. Was die Doppeltangenten angeht, so bemerke ich, dass die Doppeltangente $y_1 = 0$ des vorigen Paragraphen auf unser Wendedreieck bezogen die Gleichung erhält $\lambda + \mu + \nu = 0$, und dass die Berührungspunkte auf ihr die Coordinaten $1 : \alpha : \alpha^2$ resp. $1 : \alpha^2 : \alpha$ besitzen. Um endlich die 21 Axen der Perspectivität und die zugehörigen Centra zu bestimmen, genügt es, diese Elemente für die Substitution (14) auszurechnen. Man findet als Axe der Perspectivität:

$$\lambda' + \lambda = \mu' + \mu = \nu' + \nu = 0 \tag{15}$$

und entsprechend für die Coordinaten des Centrums:

$$-B - C : B : C$$

oder, was auf dasselbe hinaus kommt:

$$B : -B - A : A, \text{ resp. } C : A : -C - A.$$

Im Folgenden werde ich vor allen Dingen diejenigen Ausdrücke in λ, μ, ν gebrauchen, welche gleich Null gesetzt die *acht Wendedreiecke*, resp. die *zweimal sieben Kegelschnitte* darstellen, von denen am Ende des vorigen Paragraphen die Rede war. Ich will diese Ausdrücke hier so mittheilen, wie sie aus einander durch die 168 Substitutionen von der Determinante Eins hervorgehen.

Es sei das als Coordinatendreieck benutzte Wendedreieck mit δ_∞ bezeichnet und unter Zufügung eines später zweckmässigen Zahlenfactors rechter Hand gesetzt:

$$\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu. \tag{16}$$

Dann ergiebt sich für die übrigen Wendedreiecke ($x = 0, 1, \ldots 6$):

$$\begin{aligned}\delta_x = & -7(A\gamma^x\lambda + B\gamma^{4x}\mu + C\gamma^{2x}\nu)\cdot(B\gamma^x\lambda + C\gamma^{4x}\mu + A\gamma^{2x}\nu) \\ & \cdot(C\gamma^x\lambda + A\gamma^{4x}\mu + B\gamma^{2x}\nu) \\ = & +\lambda\mu\nu - (\gamma^{3x}\lambda^3 + \gamma^{5x}\mu^3 + \gamma^{6x}\nu^3) + (\gamma^{6x}\lambda^2\mu + \gamma^{3x}\mu^2\nu + \gamma^{5x}\nu^2\lambda) \\ & + 2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu + \gamma^x\nu^2\mu + \gamma^{2x}\mu^2\lambda).\end{aligned} \tag{17}$$

Wir erhalten ferner für zwei der 14 Kegelschnitte, wenn wir in die Gleichung $\Sigma\mathfrak{z}^2 = 0$ des vorigen Paragraphen rückwärts die y und für diese die λ, μ, ν eintragen, unter Zufügung eines geeigneten Zahlenfactors:

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = 0.$$

Dementsprechend kommt, wenn wir allgemein die linke Seite der Kegelschnittsgleichung mit c_x bezeichnen, für $x = 0, 1, 2, \ldots 6$:

$$(18)\quad c_x = (\gamma^{2x}\cdot\lambda^2 + \gamma^x\cdot\mu^2 + \gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu + \gamma^{3x}\cdot\nu\lambda + \gamma^{5x}\cdot\lambda\mu).$$

Diese beiden Ausdrücke sind es, welche später die einfachsten Resolventen achten und siebenten Grades ergeben werden.

§ 6.

Aufstellung der Gleichung 168ten Grades.

Als Unbekannte η der Gleichung 168ten Grades kann, wie schon gesagt, jede auf unserer C_4 eindeutige Function, also jede rationale Function von $\lambda : \mu : \nu$ gewählt werden, welche in den 168 durch die Collineationen zusammengeordneten Punkten im Allgemeinen verschiedene Werthe aufweist. Es scheint am einfachsten, $\frac{\lambda}{\mu}$ oder $\frac{\lambda}{\nu}$ selbst zu wählen. Das Resultat gewinnt aber ausserordentlich an Uebersichtlichkeit, wenn wir nicht *einen* solchen Quotienten, sondern gleichzeitig *beide* einführen, die dann durch die Gleichung

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

an einander gebunden sind. Es lässt sich dann nämlich J als rationale Function 42ter Ordnung von $\lambda : \mu : \nu$ dartellen

$$(19)\qquad J = R(\lambda, \mu, \nu),$$

wo R ein *sehr einfaches* Bildungsgesetz hat, und *diese Gleichung* (19) *von der* 42ten *Ordnung zusammen mit der Gleichung vierter Ordnung* $f = 0$ *vertritt dann die eine Gleichung* 168ten *Grades, von welcher bislang immer die Rede war.* Ein ähnliches Verfahren scheint allemal angebracht, wenn es sich um Aufstellung einer Gleichung handelt, deren Geschlecht p grösser als Null ist.

Die Function $R(\lambda, \mu, \nu)$ muss vor allen Dingen die Eigenschaft haben, bei den 168 Collineationen ungeändert zu bleiben. Um R zu finden beschäftige ich mich daher zunächst damit, alle *ganzen* Functionen von λ, μ, ν aufzustellen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Dabei wird selbstverständlicherweise vorausgesetzt, dass die 168 Collineationen mit der Determinante *Eins* genommen werden. — Wir kennen *eine* solche ganze Function, das ist

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda;$$

wir wissen ferner, dass die *Covarianten* von f jedenfalls dieselbe Eigenschaft haben. Eine leichte Discussion zeigt dann, dass sich die Covarianten von f mit den gesuchten Functionen decken, und lässt zugleich ihr volles System mit den zwischen den Systemformen bestehenden Relationen aufstellen. Die rationale Function R erweist

sich als die einfachste aus den Covarianten zu bildende Verbindung nullter Dimension. — Das ist dieselbe Methode, deren sich Gordan und ich in unseren neueren Arbeiten wiederholt bedienten.

Wir haben als erste Covariante von f die Hesse'sche ∇ von der sechsten Ordnung:

$$(20)\quad \nabla = \frac{1}{54}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} \end{vmatrix} = 5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda).$$

Gleich Null gesetzt bestimmt sie auf $f = 0$ die 24 Wendepunkte, also in der That eine Gruppe zusammengehöriger Punkte. Nun gab es auf $f = 0$ keine andere Gruppe von nur 24 Punkten und überhaupt keine von einer geringeren Punktzahl. Wir schliessen daraus, dass es keine ungeändert bleibende ganze Function von geringerer als sechster Ordnung geben kann, und dass jede Function sechster Ordnung bis auf einen Zahlenfactor mit ∇ übereinstimmen muss. Gäbe es nämlich noch eine andere Function der sechsten Ordnung, so würde sich dieselbe jedenfalls in der Form

$$k \cdot \nabla + l \cdot \varphi \cdot f$$

darstellen lassen, wo k, l Constante sind, — denn gleich Null gesetzt muss sie auf $f = 0$ eben auch die 24 Wendepunkte bestimmen. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Function zweiten Grades und eine solche Function kann, wie oben bemerkt, nicht existiren. Genau ebenso schliesst man: *Die nächst höhere in Betracht kommende ganze Function ist vom Grade* 14 *und schneidet, gleich Null gesetzt, aus* $f = 0$ *die* 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten aus.*

Nun kann man auf verschiedene Weisen eine Covariante vierzehnter Ordnung bilden. Bekanntlich gab schon Hesse für die allgemeine Curve vierter Ordnung eine Curve vierzehnter Ordnung an, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. In unserem Falle geschieht das von *jeder* Covariante 14ter Ordnung, die nicht eben ein Multiplum von $f^2\nabla$ ist, und es genügt also, irgend eine hinzuschreiben. Ich wähle:

$$(21)\quad C = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} \\ \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^{14} + \mu^{14} + \nu^{14}) + \cdots$$

Ich bilde mir ferner *eine Function vom* 21^{ten} *Grade, die Functionaldeterminante von* f, ∇, C:

$$(22)\qquad K = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \lambda} & \frac{\partial \nabla}{\partial \lambda} & \frac{\partial C}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \mu} & \frac{\partial C}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \nu} & \frac{\partial C}{\partial \nu} \end{vmatrix} = -(\lambda^{21} + \mu^{21} + \nu^{21}) \cdots$$

Gleich Null gesetzt ergiebt K auf $f = 0$ die 84 sextaktischen Punkte. Man kann auch wieder erschliessen, dass es ausser K keine ungeändert bleibende Function von der 21^{ten} Ordnung giebt. Denn eine solche müsste sich in der Gestalt darstellen lassen:

$$kK - l\varphi f^{\nu},$$

wo k, l Constante bedeuten. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Function vom Grade $21 - 4\nu$, schnitte also, gleich Null gesetzt, aus $f = 0$ eine Anzahl von Punkten aus, die durch 4 aber nicht durch 8 theilbar wäre. Nun umfassen die einzigen Punktgruppen, welche hier in Betracht kommen können, 24 und 56 Punkte; daher hat man Widerspruch. Jetzt erinnere man sich, dass wir früher die 84 sextaktischen Punkte durch 21 gerade Linien, *die* 21 *Axen der Perspectivität*, ausgeschnitten haben (siehe Gleichung (15)). Es folgt also:

Die Gleichung $K = 0$ *stellt das Aggregat der* 21 *Axen dar.*

Will man *allgemein* 168 zusammengehörige Punkte auf $f = 0$ ausschneiden, so genügt es offenbar, den Curvenbüschel

$$\nabla^7 = k\, C^3$$

für veränderliches k zu betrachten. Hieraus folgt vor allen Dingen, *dass man für geeignete Werthe von* k, l *unter der Bedingung* $f = 0$ *eine Relation folgender Form hat:*

$$(23)\qquad \nabla^7 = k \cdot C^3 + l \cdot K^2,$$

es folgt dann aber ferner, *dass* f, ∇, C, K, *zwischen denen diese eine Relation besteht, das volle System der in Betracht kommenden Formen bilden und also um so mehr das volle System der Covarianten von* f.

Um die in (23) vorkommenden Constanten k, l zu bestimmen, setze ich zunächst $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Dann wird nach Formel (20), (21), (22):

$$(23)\qquad \nabla = 0 \quad C = 1, \quad K = -1$$

und übrigens $f = 0$. Also folgt:

$$k = -l.$$

Ich nehme ferner für f die Form (6):

$$f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}} \cdot \{y_1^4 + 21 y_1^2 y_2 y_3 - 147 y_2^2 y_3^2 + 49 y_1 (y_2^3 + y_3^3)\}$$

und berechne einige Terme von ∇, C, K. So kommt:

$$\nabla = \frac{1}{27}\{7^2 \cdot y_3^6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y_1 y_2 y_3^4 \cdots\},$$

$$C = \frac{2^3 \cdot 7^5 \cdot \sqrt[3]{7}}{3^6}\, y_2 y_3^{13} \cdots,$$

$$K = \frac{-2^3 \cdot 7^7}{3^9} \cdot y_3^{21} \cdots.$$

Setzt man nun hier $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, so ergiebt sich ausser $f=0$:

$$(23\,b) \qquad \nabla = \frac{7^2}{3^3}, \quad C = 0, \quad K = \frac{-2^3 \cdot 7^7}{3^9}$$

und also:

$$l = \frac{1}{2^6 \cdot 3^3}, \qquad k = \frac{-1}{2^6 \cdot 3^3}.$$

Die Relation zwischen ∇, C, K *lautet daher:*

$$(24) \qquad (-\nabla)^7 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{K}{216}\right)^2.$$

Auf Grund dieser Relation bestimmt sich jetzt die Function $R(\lambda, \mu, \nu) = J$ unmittelbar. J soll in den Berührungspunkten der Doppeltangenten gleich Null werden, in den sextaktischen Punkten gleich Eins, in den Wendepunkten unendlich, es soll überdies jeden anderen Werth in 168 zusammengehörigen Punkten und nur in diesen annehmen. *Daher hat man folgende Gleichung:*

$$(25) \qquad J : J-1 : 1 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 : 27\left(\frac{K}{216}\right)^2 : -\nabla^7$$

und diese Gleichung, zusammen mit

$$f = 0$$

repräsentirt das Problem 168^{ten} *Grades, dessen Formulirung unsere Aufgabe war.*

Will man statt J die Invarianten g_2, g_3, Δ des elliptischen Integrals benutzen, so kann man auch schreiben:

$$(26) \qquad \begin{cases} g_2 = \dfrac{C}{12}, \\[2mm] g_3 = \dfrac{K}{216}, \\[2mm] \sqrt[7]{\Delta} = -\nabla. \end{cases}$$

§ 7.

Resolventen niederen Grades.

Die Gruppe der 168 Collineationen besass Untergruppen G'_{21} und G'_{24} von 21 bez. 24 Collineationen. Demnach besitzt unser Problem

168^{ten} Grades Resolventen vom achten und vom siebenten Grad. Wie diese Resolventen in einfachster Form lauten werden, kann nicht zweifelhaft sein. Denn es müssen eben diejenigen Gleichungen achten und siebenten Grades sein, welche ich früher von der directen Betrachtung der ω-Substitutionen ausgehend als einfachste ihrer Art aufgestellt habe. Es handelt sich also nur mehr darum, von den jetzigen Betrachtungen aus den Uebergang zu jenen Gleichungen zu finden. Dies gelingt (wie immer bei diesen Untersuchungen) auf doppelte Weise.

Entweder, man sucht die einfachste *rationale* Function $r(\lambda, \mu, \nu)$, welche in den durch die G'_{21} oder die G''_{24} zusammengeordneten Punkten denselben Werth annimmt, und fragt, wie sie mit J zusammenhängt. —

Oder, man bestimmt die niedrigste *ganze* Function von λ, μ, ν, welche bei den Substitutionen der G'_{21} resp. der G''_{24} ungeändert bleibt und bestimmt ihren Zusammenhang mit ∇, C, K, bez. Δ, g_2, g_3.

Beide Methoden haben ihre eigenthümlichen Vorzüge, und so mag im Folgenden die zweite der ersten jedesmal als Ergänzung beigegeben sein.

§ 8.

Die Resolvente vom achten Grade.

Betrachten wir die G'_{21}, welche durch Combination folgender Substitutionen entsteht:

$$\lambda' = \mu, \qquad \mu' = \nu, \qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma \cdot \lambda, \quad \mu' = \gamma^4 . \mu, \quad \nu' = \gamma^2 \cdot \nu.$$

Ungeändert bleibt bei ihr vor allen Dingen das Wendedreieck $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$ (16), ungeändert bleibt ferner jedenfalls ∇, also auch die rationale Function $\sigma = \frac{\delta_\infty^2}{\nabla}$. Ueberdies hat letztere die Eigenschaft, jeden vorgegebenen Werth nur in 21 Punkten von $f=0$ anzunehmen, denn der Büschel von Curven sechster Ordnung $\delta_\infty^2 - \sigma\nabla = 0$ hat drei feste Grundpunkte, die Coordinateneckpunkte, einfach zählend mit $f=0$ gemein. Wenn wir also, wie nun geschehen soll, σ als Unbekannte einführen, *so wird J eine rationale Function achten Grades von σ*:

$$J = \frac{\varphi(\sigma)}{\psi(\sigma)}. \tag{27}$$

Bestimmen wir jetzt — wie ich es bei analogen Aufgaben wiederholt that — welche Multiplicität den einzelnen Factoren in φ, ψ, $\varphi - \psi$ zukommt.

J wird unendlich in den 24 Wendepunkten, und zwar siebenfach. In dreien dieser Punkte wird σ siebenfach gleich Null, nämlich in den Coordinateneckpunkten; denn δ_∞ verschwindet in ihnen vierfach, ∇ nur

einfach. In den übrigen 21 Wendepunkten wird σ des Nenners ∇ wegen unendlich, aber nur einfach. Daher besteht $\psi(\sigma)$ aus einem einfachen und einem siebenfachen Factor, von denen der erstere für $\sigma = 0$, der andere für $\sigma = \infty$ verschwindet. *Es ist also, von einem constanten Factor abgesehen, $\psi(\sigma)$ gleich σ.*

J wird Null in den 56 Berührungspunkten der Doppeltangenten, und zwar dreifach. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich die Doppeltangenten in $7 + 21$ *), ihre Berührungspunkte also in $2 . 7 + 2 . 21$. In den ersteren nimmt σ den ihm zukommenden Werth dreifach, in den anderen nur einfach an. Das heisst: *φ enthält zwei einfache und zwei dreifache lineare Factoren.*

J wird endlich gleich Eins und zwar doppelt, in den 84 sextaktischen Punkten. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich diese Punkte in $4 . 21$, σ nimmt an jeder dieser Stellen seinen Werth nur einfach an. Daher: *$(\varphi - \psi)$ ist das volle Quadrat eines Ausdrucks vierten Grades (von nicht verschwindender Discriminante).*

Dies sind nun hinsichtlich φ, ψ, $\varphi - \psi$ eben dieselben Angaben, welche mich früher (pag. 141, 142) zur Aufstellung der Modulargleichung achten Grades führten:

$$(28) \qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ & : (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 \\ & : 1728\tau. \end{aligned}$$

Zu eben dieser Gleichung gelangen wir also auch jetzt, wenn wir ein geeignetes Multiplum von σ mit τ bezeichnen.

Um dieses Multiplum zu bestimmen, gehe ich zu dem Coordinatensystem der y zurück (Formel (12a)). Es ist dann $7^2\lambda^2\mu^2\nu^2$ vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ gleich $\frac{(5-3\alpha)\cdot 7^2}{3^3}$, und vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ gleich $\frac{(5-3\alpha^2)\cdot 7^2}{3^3}$. Für ∇ hat man in beiden Fällen (Formel (23b)) $\frac{7^2}{3^3}$, daher für σ bezüglich die Werthe $(5 - 3\alpha)$ und $(5 - 3\alpha^2)$. Aber die beiden Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, $y_3 = \begin{cases}1\\0\end{cases}$ sind die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$, d. h. einer von den sieben durch die G'_{21} zusammengeordneten Doppeltangenten. Demnach ist für ihn $J = 0$ und es verschwindet in (28) insbesondere der einfache Factor $\tau^2 + 13\tau + 49$. Dessen Wurzeln lauten $3\alpha - 5$ und $3\alpha^2 - 5$. *Daher ist einfach:*

$$\tau = -\sigma$$

oder anders ausgesprochen:

---

*) Derartige Angaben verificirt man sofort durch die früher mitgetheilten Formeln.

Eine Wurzel τ der Gleichung (28) *hat den Werth:*

$$(29) \qquad \tau_\infty = -\frac{\delta_\infty^2}{\nabla} = \frac{-7^2\lambda^2\mu^2\nu^2}{\nabla}.$$

Dann folgt aus (17), *dass die übrigen Wurzeln τ_x folgende Werthe aufweisen:*

$$(30) \quad \tau_x = \frac{-\delta_x^2}{\nabla} = -\frac{\left\{\begin{array}{c}\lambda\mu\nu-(\gamma^{3x}\lambda^3+\gamma^{5x}\mu^3+\gamma^{6x}\nu^3)+(\gamma^{6x}\lambda^2\mu+\gamma^{3x}\mu^2\nu+\gamma^{5x}\nu^2\lambda) \\ +2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu+\gamma^{x}\nu^2\mu+\gamma^{2x}\mu^2\lambda)\end{array}\right\}^2}{\nabla}$$

und somit haben wir, wie es in der Einleitung verlangt wurde, die Wurzeln der Modulargleichung achten Grades als rationale Functionen eines Punktes der Curve $f = 0$ dargestellt.

Die Gleichung (28) lässt sich, wie ich bereits pag. 148 erwähnte, in der Weise umgestalten, dass man statt τ schreibt z^2, statt $J - 1$ $\frac{27 g_3^2}{\Delta}$ und nun beiderseits die Quadratwurzel zieht. So kommt:

$$(31) \qquad z^8 + 14z^6 + 63z^4 + 70z^2 - \frac{216\, g_3}{\sqrt{\Delta}} \cdot z - 7 = 0,$$

wo wir nach Formel (26)

$$\frac{216\, g_3}{\sqrt{\Delta}} = \frac{K}{\sqrt{-\nabla^7}}$$

setzen können. Tragen wir hier für z nach (29), (30) seinen Werth $\frac{\delta}{\sqrt{-\nabla}}$ ein, so erhalten wir folgende Relation:

$$(32) \qquad \delta^8 - 14\delta^6\nabla + 63\delta^4\nabla^2 - 70\delta^2\nabla^3 - \delta K - 7\nabla^4 = 0.$$

Das Zeichen des vorletzten Gliedes bestimmt sich so, wie es angegeben ist, wenn man etwa für λ, μ, ν die Werthe 1, 0, 0 und für δ irgend einen der Werthe δ_x einträgt.

Eben auf diese Gleichung (32) *wird man nun geführt, wenn man sich des formentheoretischen Ansatzes bedient.* Die einfachste *ganze* Function von λ, μ, ν nämlich, welche bei der G'_{21} ungeändert bleibt, ist $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$. Bei den 168 Collineationen nimmt δ acht verschiedene Werthe an, deren symmetrische Functionen ganze Functionen von ∇, C, K sein müssen (da $f = 0$ genommen ist). Somit genügt δ einer Gleichung achten Grades, die wegen der Dimension von ∇, C, K nothwendig folgende Gestalt hat:

$$\delta^8 + a\nabla \cdot \delta^6 + b\nabla^2 \cdot \delta^4 + c\nabla^3 \cdot \delta^2 + dK \cdot \delta + e\nabla^4 = 0,$$

und bestimmt man hier die Coefficienten a, b, ... e, indem man für δ, ∇, K ihre Werthe in λ, μ, ν einträgt und übrigens $f = 0$ berücksichtigt, so gelangt man eben zur Gleichung (32). Diese Ableitung hat den Vorzug, dass sie a priori übersehen lässt, wesshalb in (32) nur gewisse Potenzen von δ vorkommen.

§ 9.

Berührungscurven dritter Ordnung. — Auflösung der Gleichung 168ten Grades.

Die acht Wurzeln der Gleichung (32) drücken sich nach (16), (17) folgendermassen aus:

$$(33)\quad \begin{cases} \delta_\infty = -\,7\,\lambda\mu\nu, \\ \delta_x = \lambda\mu\nu - \gamma^{-x}(\nu^3-\lambda^2\mu) - \gamma^{-4x}(\lambda^3-\mu^2\nu) - \gamma^{-2x}(\mu^3-\nu^2\lambda) \\ \qquad\qquad + 2\gamma^{x}\cdot\nu^2\mu \qquad + 2\gamma^{4x}\cdot\lambda^2\nu \qquad + 2\gamma^{2x}\cdot\mu^2\lambda. \end{cases}$$

Nun gab ich bereits in meiner vorigen Arbeit an (pag. 148), dass die Gleichung (31) und also auch die Gleichung (32) *eine Jacobi'sche Gleichung achten Grades ist*, das heisst, dass sich die aus ihren Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln mit Hülfe von vier Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 folgendermassen zusammensetzen lassen*):

$$(34)\quad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_x} = \qquad A_0 + \gamma^{\varrho x}A_1 + \gamma^{4\varrho x}A_2 + \gamma^{2\varrho x}A_3. \end{cases}$$

(ϱ bedeutet hier irgend eine durch 7 nicht theilbare ganze Zahl). Es fragt sich, wie sich diese Angabe, die ich der l. c. mitgetheilten transcendenten Auflösung von (31) entnommen hatte, algebraisch bestätigt. Dies erledigt sich durch die Betrachtung gewisser *Berührungscurven dritter Ordnung***), welche unsere Curve $f=0$ besitzt, oder, anders ausgesprochen, durch die Betrachtung gewisser *auf* $f=0$ *existirender Wurzelfunctionen dritter Ordnung.*

Eine Curve vierter Ordnung hat bekanntlich 64 dreifach unendliche Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung, 36 von *gerader*, 28 von *ungerader* Charakteristik. *Es ist nun hier ein System von gerader Charakteristik dadurch ausgezeichnet, dass es die acht Wendedreiecke als Berührungscurven in sich schliesst.*

Jedenfalls kann ein Wendedreieck unmittelbar als Berührungscurve dritter Ordnung betrachtet werden, indem seine 12 Durchschnittspunkte

*) Wegen der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades vergl. eine Notiz von Brioschi in den Rendiconti del Istituto Lombardo von 1868 (erläutert von Jung und Armenante im 7ten Bande des Giornale di Matematiche, pag. 98ff.), sowie eine im Texte noch nicht verwerthete Bemerkung am Schlusse meiner wiederholt citirten Erlanger Note. Ich hoffe bald ausführlicher auf den Gegenstand zurückkommen zu können. (Vergl. auch die neuerdings erschienene Arbeit Brioschi's: Sopra una classe di equazioni modulari, Annali di Matematica, t. IX. [Dec. 1878]).

**) D. h. Curven dritter Ordnung, welche $f=0$ sechsmal einfach berühren.

mit der Curve vierter Ordnung sogar in nur *drei* Schnittpunkte (zu je vier) zusammenfallen. Betrachten wir nun etwa das Dreieck δ_∞. Durch seine Schnittpunkte mit der C_4 legen wir die dreifach unendliche Zahl von Curven dritter Ordnung, welche in ihnen die C_4 berühren; ihre Gleichung ist:

$$(35) \qquad k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda = 0.$$

Sie schneiden jede die C_4 in noch sechs weiteren Punkten, und in diesen Punkten berührt dann, wie bekannt, eine neue Curve dritter Ordnung desselben Systems, zu welchem δ_∞ gehört; zugleich erzielt man auf diese Weise *alle* Curven des fraglichen Systems. Nun findet man die Identität:

$$(36) \quad \begin{aligned} &(k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda)^2 - (a^2\lambda\mu + b^2\mu\nu + c^2\nu\lambda)\cdot f \\ &= \lambda\mu\nu\cdot\{k^2\lambda\mu\nu - (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &\qquad + [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^2)\nu^2\lambda]\}. \end{aligned}$$

Die Gesammtheit der in Betracht kommenden Berührungscurven dritter Ordnung ist daher durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(37) \quad \begin{aligned} 0 = k^2\lambda\mu\nu &- (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &+ [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^2)\nu^2\lambda]. \end{aligned}$$

Setzt man nun hier

$$k = 1, \quad a = \gamma^{-x}, \quad b = \gamma^{-4x}, \quad c = \gamma^{-2x},$$

so entsteht rechter Hand der Ausdruck δ_x, und es gehören also, wie behauptet wurde, die acht Wendedreiecke demselben Systeme von Berührungscurven an.*)

Nun kommen die Formeln (34) einfach auf den Satz zurück, *dass sich die Wurzelfunctionen eines Systems gerader Charakteristik linear aus vier unabhängigen zusammensetzen lassen.* Man wähle nämlich solche vier Wurzelfunctionen, welche Berührungscurven (37) entsprechen, für die der Reihe nach

$$\begin{aligned} &k = 1, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \\ &k = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

genommen ist, und setze dementsprechend:

$$(38) \quad \begin{cases} A_0 = \sqrt{\lambda\mu\nu}, \\ A_1 = \sqrt{-\mu^3 - \nu^2\lambda}, \quad A_2 = \sqrt{-\nu^3 - \lambda^2\mu}, \quad A_3 = \sqrt{-\lambda^3 - \mu^2\nu}. \end{cases}$$

*) Dass dies System von *gerader* Charakteristik ist, folgt aus der sogleich anzugebenden irrationalen Gleichungsform.

Dann hat man bei richtiger Wahl der Vorzeichen vermöge $f=0$ folgende Relationen:

$$(39)\qquad \begin{cases} A_0 A_1 = \lambda^2\mu, & A_0 A_2 = \mu^2\nu, \quad A_0 A_3 = \nu^2\lambda, \\ A_1 A_2 = \lambda\mu^2, & A_2 A_3 = \mu\nu^2, \quad A_3 A_1 = \nu\lambda^2,\text{*)} \end{cases}$$

und es lässt sich die Gleichung (37) in folgender irrationaler Form schreiben:

$$(40)\qquad k A_0 + a A_1 + b A_2 + c A_3 = 0.$$

Insbesondere wird mit Rücksicht auf (33):

$$(41)\qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_x} = \qquad A_0 + \gamma^{-x}\cdot A_1 + \gamma^{-4x}\cdot A_2 + \gamma^{-2x} A_3. \end{cases}$$

Dies sind nun in der That die Formeln (34), *indem nur statt der damals unbestimmt gelassenen Zahl* ϱ *jetzt* (-1) *gesetzt ist.*

Man kann diese Formeln benutzen, um unsere Gleichung 168[ten] Grades explicite durch elliptische Functionen zu lösen**). Die Wurzeln δ von (32) sind den Wurzeln z von (31) proportional, und für letztere gab ich pag. 145, 148 meiner vorigen Arbeit den Ausdruck in $q=e^{i\pi\omega}$ an. Dementsprechend haben wir hier:

$$(42)\qquad \delta_\infty : \delta_x = -7\sqrt[6]{q^7}\cdot\Pi(1-q^{14n})^2 : \sqrt[6]{\gamma^x\cdot q^{1/7}}\,\Pi\left(1-\gamma^{2nx}\cdot q^{\frac{2n}{7}}\right)^2.$$

Die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke liefern vermöge der Reihenentwickelung

$$q^{\frac{1}{12}}\cdot\Pi(1-q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\cdot q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}$$

die A_0, A_1, A_2, A_3 ihrem Verhältnisse nach, und benutzt man nun, dass nach Formel (39):

$$(43)\qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{A_0}{A_2},\quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{A_0}{A_3},\quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{A_0}{A_1}$$

ist, so findet man folgende Lösungen der Gleichung 168[ten] *Grades:*

---

*) In Folge dessen hat man zwischen den A_0, A_1, A_2, A_3 eine Reihe identischer Relationen, welche alle durch Nullsetzen folgender Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & -A_2 & 0 \\ A_2 & 0 & A_0 & -A_3 \\ A_3 & -A_1 & 0 & A_0 \end{vmatrix}$$

erhalten werden.

**) Sie muss sich auch durch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung lösen lassen; wie hat man dieselbe aufzustellen?

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\mu} &= q^{\frac{4}{7}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+h}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+13h+2}},\\
\frac{\mu}{\nu} &= q^{\frac{2}{7}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+19h+4}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+37h+16}},\\
\frac{\nu}{\lambda} &= q^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+25h+7}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+31h+11}}.
\end{aligned}\right.$$

Es genügt, dieses eine Lösungssystem zu berechnen, denn die 167 *anderen ergeben sich aus diesem einen durch die Collineationen des* § 5.

Ich habe dabei nur die *Verhältnisse* $\lambda:\mu:\nu$ berechnet; will man von der Formulirung ausgehen, wie sie Gleichung (26) vertritt, so erhält man natürlich entsprechende Formeln für die *absoluten Werthe* von λ, μ, ν.

§ 10.

Die Resolvente siebenten Grades.

Bei den Substitutionen einer G''_{24} blieb jedesmal ein Kegelschnitt c_x ungeändert, welcher die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten ausschnitt; nach Gleichung (18) können wir setzen:

$$(45)\quad c_x=(\gamma^{2x}\cdot\lambda^2+\gamma^{x}\cdot\mu^2+\gamma^{4x}\cdot\nu^2)+\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu+\gamma^{3x}\cdot\nu\lambda+\gamma^{5x}\cdot\lambda\mu).$$

Bilden wir jetzt die rationale Function:

$$(46)\qquad x=\frac{c_x^3}{\nabla}\,.$$

Da Zähler und Nenner bei den 24 Substitutionen der G''_{24} ungeändert bleiben, da ferner der Büschel von Curven sechster Ordnung $\nabla - x\cdot c_x{}^3=0$ keine festen Grundpunkte mit der C_4 gemein hat, so schliessen wir, dass x jeden Werth einmal in solchen 24 Punkten annimmt, welche durch die 24 Substitutionen der G''_{24} zusammengeordnet werden. Daher:

J ist eine rationale Function siebenten Grades von x:

$$(47)\qquad J=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,.$$

Wir betrachten nun wieder die Werthe $J=\infty, 0, 1$.

Die 24 Wendepunkte, in denen J siebenfach unendlich wird, bilden den Substitutionen der G''_{24} gegenüber nur eine, einfach zählende Gruppe. $\psi(x)$ ist also die siebente Potenz eines linearen Factors.

Aber x wird, nach Formel (46) in den Wendepunkten selbst unendlich. *Daher ist $\psi(x)$ eine Constante.*

Von den 56 Berührungspunkten der 28 Doppeltangenten liegen acht auf $c_x = 0$, in ihnen also wird x dreifach Null. Die anderen 48 vertheilen sich auf 2 . 24 (welche je 12 Doppeltangenten angehören). Desshalb: *φ enthält neben dem einfachen Factor x noch die dritte Potenz eines quadratischen Factors von nicht verschwindender Discriminante.*

Die 84 sextaktischen Punkte endlich vertheilen sich den 24 Substitutionen der G''_{24} gegenüber auf $3 \cdot 12 + 2 \cdot 24$. Also: *$\varphi - \psi$ enthält einen cubischen Factor einfach und einen quadratischen doppelt.*

Nun sind es eben wieder diese an φ, ψ gestellten Forderungen gewesen, welche ich früher benutzte, um die einfachste Gleichung 7^{ten} Grades aufzustellen (pag. 427), welche folgendermassen lautete:

$$(48)\quad J:J-1:1 = y\left(y^2 - 2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})y + 2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})\right)^3$$
$$:\left(y^3 - 2^2\cdot 7\cdot 13(7\mp\sqrt{-7})y^2 + 2^6\cdot 7^3(88\mp 23\sqrt{-7})y - 2^8\cdot 3^3\cdot 7^4(35\mp 9\sqrt{-7})\right)$$
$$\cdot\left(y^2 - 2^4\cdot 7(7\mp\sqrt{-7})y + 2^5\cdot 7^3(5\mp\sqrt{-7})\right)^2$$
$$:\mp 2^{27}\cdot 3^3\cdot 7^{10}\cdot\sqrt{-7}.$$

Wir schliessen, dass die Unbekannte y bis auf einen constanten Factor mit unserem jetzigen x übereinstimmt, wobei es aber noch fraglich ist, ob das obere Vorzeichen von $\sqrt{-7}$ in (45) *dem oberen oder dem unteren Vorzeichen in* (48) *entspricht.*

Um dies zu entscheiden, gestalte ich (48) zunächst in der Weise um, dass ich $y = z^3$, $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ setze und dann beiderseits die Cubikwurzel ziehe.

$$(49)\quad z^7 - 2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})z^4 + 2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})z \mp 2^9\cdot 3\cdot 7^3\sqrt{-7}\cdot\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0.$$

Schreibt man hier nach Gleichung (26) statt $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ $\frac{C}{12\sqrt[3]{-\nabla^7}}$, trägt andererseits für z, unter k eine unbekannte Constante verstanden, ein $\frac{kc}{\sqrt[3]{\nabla}}$, so folgt:

$$(50)\quad k^7c^7 - 2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})k^4\cdot\nabla c^4 + 2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})k\nabla^2 c$$
$$\pm 2^7\cdot 7^3\sqrt{-7}\cdot C = 0.$$

Dies giebt:

$$k^3\Sigma c_x^3 = 3\cdot 2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})\cdot(5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda)),$$
$$k^7\cdot\Pi c_x = \mp 2^7\cdot 7^3\cdot\sqrt{-7}\,(\lambda^{14} + \mu^{14} + \nu^{14} + \cdots),$$

(selbstverständlich vermöge $f=0$). — *Die beiden Gleichungen werden nun in der That befriedigt, wenn man*

$$k = \pm 2\sqrt{-7}$$

wählt und dem oberen Vorzeichen in k das obere in (49) *und das untere in* (45) *entsprechen lässt.*

Mit anderen Worten: *Die Wurzeln z der Gleichung* (49), *resp. y der Gleichung* (48) *haben in λ, μ, ν folgende Werthe:*

$$(51)\quad z = y^{1/3} = \frac{\pm 2\sqrt{-7}\left\{(\gamma^{2x}\cdot\lambda^2+\gamma^{x}\cdot\mu^2+\gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1\mp\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu+\gamma^{3x}\cdot\nu\lambda+\gamma^{6x}\cdot\lambda\mu)\right\}}{\sqrt[3]{\nabla}}$$

und finden sich die y somit, wie es in der Einleitung verlangt wurde, als rationale Functionen eines Punktes unserer C_4 explicite angegeben.

Die Gleichung (50) aber geht in folgende über:

$$(52)\qquad c^7 + \frac{7}{2}(-1\mp\sqrt{-7})\nabla c^4 - 7\left(\frac{5\mp\sqrt{-7}}{2}\right)\nabla^2 c - C = 0.$$

Auf eben diese Gleichung würde der formentheoretische Ansatz selbstverständlich von vorneherein geführt haben. Denn die niedrigste ganze Function von λ, μ, ν, welche bei den 24 Substitutionen einer G_{24}'' ungeändert bleibt, ist eben das zugehörige c_x, und dieses c_x muss einer Gleichung siebenten Grades genügen, deren Coefficienten ganze Functionen von ∇, C, K sind, die also, wegen der Dimension dieser Formen in λ, μ, ν, jedenfalls folgende Gestalt hat:

$$c^7 + \alpha\nabla c^4 + \beta\nabla^2 c + \gamma C = 0,$$

wo nun α, β, γ durch Eintragung der Werthe in λ, μ, ν zu bestimmen sind. Dieser Ansatz hat wieder den Vorzug, a priori zu zeigen, dass in (52) resp. (49) eine grosse Anzahl von Gliedern fehlen müssen.

§ 11.

Ersetzung der Riemann'schen Fläche des § 2. durch eine regulär eingetheilte Oberfläche.

Ich wünsche nun noch die Beziehung der Irrationalität $\lambda:\mu:\nu$ zu der absoluten Invariante J, resp. zu den Wurzeln τ und y der Gleichungen achten und siebenten Grades so anschaulich, wie möglich, durch die Hülfsmittel der Analysis situs zu erläutern. Dabei erinnere ich zunächst an die Figuren, welche ich pag. 136, 137 für die Gleichung achten Grades und auf den beiden der vorangehenden Arbeit beigefügten Tafeln für die Gleichungen siebenten Grades gegeben habe, und beginne übrigens mit einer allgemeinen Erläuterung be-

treffend solche *Riemann'sche Flächen, die zu Galois'schen Resolventen mit einem rational vorkommenden Parameter gehören* (vergl. p. 148 ff.). Es sei $F(\eta, z) = 0$ eine derartige Gleichung vom Grade N, die dann die charakteristische Eigenschaft hat, dass jede Wurzel η_i in Bezug auf den Parameter z ebenso verzweigt ist, wie jede andere η_k, und die dementsprechend durch N eindeutige Transformationen in sich übergeht (siehe § 2. dieser Arbeit). Die complexen Werthe von z mögen in eine Ebene ausgebreitet werden, und $z_1, z_2, \ldots z_n$ sollen diejenigen Stellen sein, an denen Verzweigungen stattfinden. Diese Verzweigungen sind für alle Blätter gleichmässig; ich will annehmen, dass in z_1 je ν_1 Blätter, in z_2 je ν_2 Blätter etc. zusammenhängen. Man lege dann in der z-Ebene durch $z_1, z_2, \ldots z_n$ irgend eine in sich zurückkehrende Curve (einen Absonderungsabschnitt), welche die Ebene z und gleichzeitig jedes der N über ihr hinerstreckten Blätter der η versinnlichenden Riemann'schen Fläche in zwei Gebiete zerlegt. Das eine Gebiet denke ich mir schraffirt, das andere freigelassen, — und verwandele nun die über der z-Ebene mehrblättrig verlaufende Fläche unter Beibehaltung der Schraffirung in eine im Raume gelegene stetig gekrümmte Fläche von gleichem Zusammenhange. Dieselbe ist dann in $2N$ abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte n-Ecke zerlegt, welche in den verschiedenen Ecken bezüglich zu $2\nu_1, 2\nu_2, \ldots 2\nu_n$ zusammenstossen, und die, im Sinne der Analysis situs, abwechselnd congruent und symmetrisch sind; die Kanten dieser Polygone sind das Bild des in der *z-Ebene* gezogenen Absonderungsschnittes. Die N eindeutigen Transformationen der Gleichung $F(\eta, z) = 0$ in sich sprechen sich darin aus, dass man die so erhaltene Fläche auf N Weisen eindeutig auf sich selbst beziehen kann. Man ordne nämlich einem beliebigen schraffirten oder nicht schraffirten n-Ecke der Fläche ein beliebiges anderes zu, das ebenfalls schraffirt oder nicht schraffirt ist: setzt man dann fest, dass nebeneinanderliegenden n-Ecken ebensolche entsprechen sollen, so wird vermöge der ersten Zuordnung *jedem* n-Eck unserer Fläche ein und nur ein bestimmtes anderes *n-Eck* entsprechen. Ich will Oberflächen, welche in diesem Sinne in alternirende Gebiete getheilt sind, *als regulär eingetheilte Oberflächen* bezeichnen; sie umfassen als besonderen Fall, bei $p = 0$, diejenigen Eintheilungen der Kugelfläche in 24, 48, 120 Dreiecke, welche man beim Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder kennt. — Wir können dann den allgemeinen Satz aussprechen:

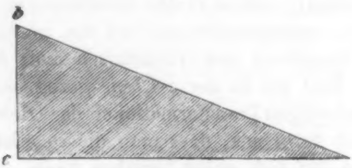
Jede Galois'sche Resolvente $F(\eta, z) = 0$ *wird durch eine regulär eingetheilte Oberfläche versinnlicht.*

Und auch umgekehrt: *Jede regulär eingetheilte Oberfläche definirt eine besondere Classe Galois'scher Resolventen mit einem Parameter.* Denn sie definirt eine Verzweigung von η in Bezug auf z von der

Eigenschaft, dass jede Wurzel η_i sich durch jede andere η_k und den Parameter z rational ausdrückt*).

In dem besonderen Falle nun, der hier vorliegt, haben wir 168 Blätter und drei Verzweigungspunkte. Indem ich statt z wieder J schreibe, entsprechen die letzteren $J = 0, 1, \infty$. Bei $J = 0$ hängen die Blätter zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei, bei $J = \infty$ zu je sieben zusammen. Dementsprechend erhalten wir zur Versinnlichung unserer Irrationalität eine regulär eingetheilte Oberfläche, *welche von* 2 . 168 *Dreiecken überdeckt ist, die* 24-*mal zu vierzehn*, 56-*mal zu sechs*, 84-*mal zu vier zusammenstossen*. Die Ecken dieser Dreiecke sind keine anderen als die früher (§ 2.) so genannten Punkte a, b, c, eine Bezeichnung, an der ich auch jetzt festhalten will. — Der Absonderungsschnitt in der Ebene J mag fortan so gewählt sein, dass er mit der reellen Axe zusammenfällt. Dann entsprechen die zweierlei Dreiecke, welche unsere Fläche überdecken, den beiden Halbebenen J, *die Kanten der Dreiecke also den reellen Werthen von* J. Ich will (wie ich es immer that) diejenigen Gebiete schraffiren, welche der positiven Halbebene J entsprechen. So hat man bei den schraffirten Dreiecken folgende Aufeinanderfolge der Ecken:

Fig. 1.

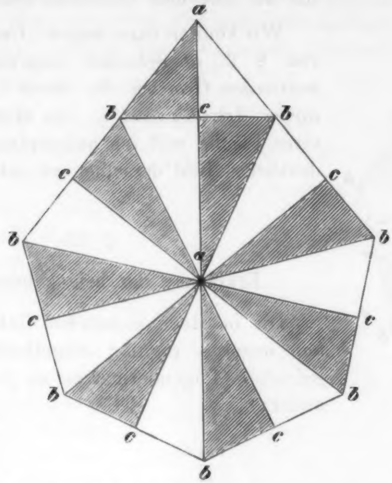


Vergleichen wir die so definirte Fläche mit der in unendlich viele Dreiecke eingetheilten ω-Ebene (p. 115), so ist vor allen Dingen deutlich, dass sich unsere Irrationalität über *ein* schraffirtes resp. nicht schraffirtes Dreieck bewegt, wenn ω ein schraffirtes oder nicht schraffirtes Dreieck durchläuft. Nun erläuterte die Zeichnung auf pag. 136 die Beziehung zwischen ω und der Wurzel τ der Modulargleichung achten Grades, die Figuren 4, 5 auf der ersten der vorangehenden Arbeit beigegebenen Tafel die Beziehung zwischen ω und der Wurzel y der Gleichung siebenten Grades. Uebertragen wir diese Figuren auf unsere regulär eingetheilte Fläche, und beachten, dass τ und y *rationale* Functionen von $\lambda : \mu : \nu$ sind, dass also jedem Punkte unserer Fläche nur ein Werth von τ und ein Werth von y entspricht so erhalten wir folgende Sätze:

*) Es scheint eine sehr nützliche Aufgabe zu sein, für die niedrigsten p alle regulär eingetheilten Oberflächen aufzuzählen und die zugehörigen Gleichungen $F(\eta, z) = 0$ zu untersuchen.

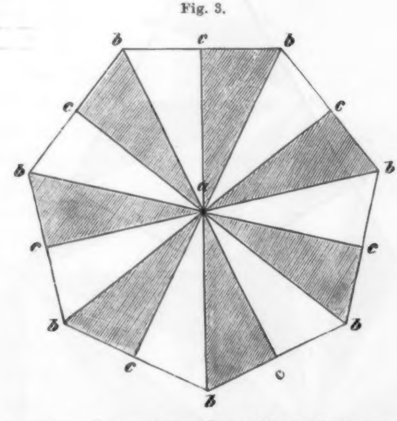
Unsere regulär eingetheilte Fläche kann in 21 Gebiete der folgenden Gestalt zerlegt werden:

Fig. 2.



sie kann ferner in 24 Siebenecke zerlegt werden, wie sie beistehende Figur versinnlicht.

Fig. 3.

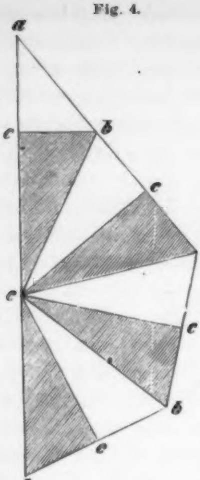


Die Gebiete der ersten Art entsprechen der richtig zerschnittenen Ebene τ, die anderen der zweckmässig zerschnittenen Ebene y).*

---

*) Die Zusammenfassung in 24 Siebenecke ist also dem analog, dass man die 120 beim Ikosaeder auftretenden Dreiecke zu je 10 in die 12 Fünfecke des Pentagondodekaeders vereinigt.

Fig. 4.



Die Figur (2) wird durch ihre Mittellinie in zwei symmetrische Hälften zerlegt, von denen ich die eine hier besonders abzeichne.

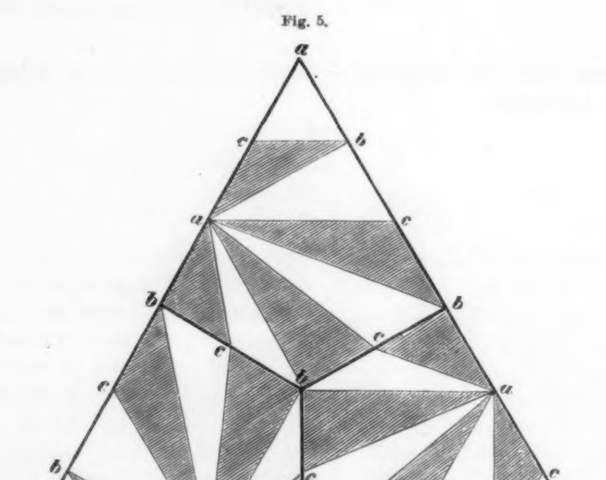
Wir können dann sagen: *Unsere Fläche wird von § 2. abwechselnd congruenten und symmetrischen Gebieten der durch diese Figur definirten Art überdeckt*).* An diese Zerlegung unserer Fläche will ich anknüpfen, um ein völlig deutliches Bild derselben zu entwickeln.

§ 12.

Erklärung der beigegebenen Tafel.

Die in Rede stehenden Gebiete legen sich auf unserer regulär eingetheilten Oberfläche jedenfalls folgendermassen zu je dreien an einander:

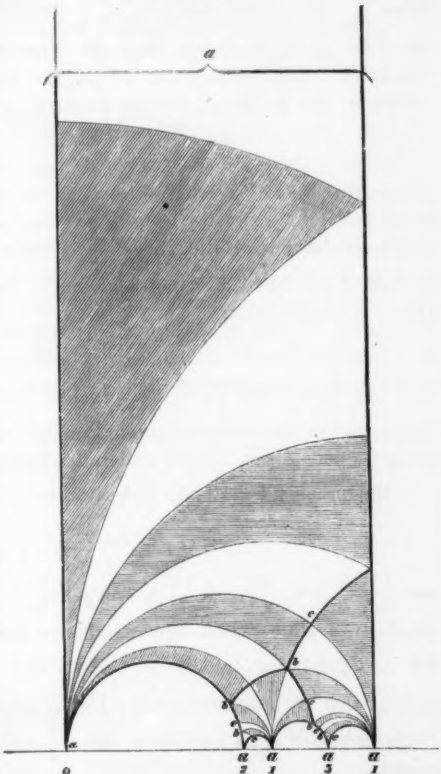
Fig. 5.



*) Jedes derartige Gebiet entspricht der richtig zerschnittenen Halbebene τ; siehe die Figur auf pag. 137.

Die Figur nun, welche die beigegebene Tafel enthält, ist dadurch entstanden, dass ich 14 solcher grosser Dreiecke in abwechselnd symmetrischer Aufeinanderfolge um einen Mittelpunkt gruppirte. Dabei wählte ich, um eine möglichst übersichtliche Gestalt zu bekommen, die kleinen Dreiecke (welche den Halbebenen J entsprechen) als Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Ich behaupte: *Diese Figur ist das Bild unserer regulär eingetheilten Oberfläche, sofern wir die 14 Begränzungslinien derselben uns noch in geeigneter Weise paarweise verbunden denken.*

Fig. 6.



In der That enthält unsere Figur 2 · 168 kleine Kreisbogendreiecke, welche überall da, wo sie zusammenstossen, das von uns angegebene Verhalten zeigen. Von dieser Bemerkung ausgehend, kann man eine geeignete Verbindung der Begränzungslinien suchen, und dann den Beweis führen, dass eine andere Gruppirung der 2 . 168 Dreiecke, als die so erhaltene, nicht möglich ist.

Um jedoch diese Betrachtung nicht zu abstract zu gestalten, greife ich zurück auf die ω-Ebene und zeichne in ihr zunächst dasjenige Aggregat von Elementardreiecken, welches Figur (5) entspricht. So erhalte ich das nebenstehende Bild.

Reiht man 14 derartige Figuren in abwechselnd symmetrischer Lage in der ω-Ebene an einander, so hat man, was der auf der Tafel enthaltenen Figur entspricht. Es handelt sich dann vor allen Dingen um den Nachweis, der sich sofort ergiebt, dass der so in der ω-Ebene abgegränzte Raum als *Fundamentalpolygon* für unsere Irrationalität

dienen kann, das heisst, dass sowohl die 168 schraffirten als auch die 168 nicht schraffirten Dreiecke, welche unsere Figur umfasst, aus einem schraffirten resp. nicht schraffirten Dreiecke durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ hervorgehen, welche modulo 7 alle verschieden sind. Es handelt sich ferner darum, die Zusammengehörigkeit der Kanten zu bestimmen, die auf der Tafel mit 1, 2, ... 14 bezeichnet sind. Jeder solchen Kante entspricht in der ω-Ebene ein *Paar* von Halbkreisen, die auf der reellen Axe senkrecht stehen; der Kante 1 z. B. das Paar der Kreise, von denen der eine durch $\omega = \frac{2}{7}$ und $\omega = \frac{1}{3}$, der andere durch $\omega = \frac{1}{3}$ und $\omega = \frac{3}{7}$ hindurchgeht. Wenn ich jetzt z. B. behaupte, dass die Kanten 1 und 6 mit einander zu vereinigen sind, so habe ich zu zeigen, dass die entsprechenden Halbkreise in der ω-Ebene, welche folgende gegenseitige Lage haben:

Fig. 7.

durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ aus einander hervorgehen, welche modulo 7 zur Identität congruent sind. Dies ist in der That der Fall. Denn die Substitution

$$\omega' = \frac{113\omega - 35}{42\omega - 13}$$

lässt aus $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$ bez. $\frac{19}{7}$, $\frac{8}{3}$ hervorgehen und verwandelt also den Halbkreis, der in den erstgenannten Punkten die reelle Axe trifft, in denjenigen, der in den beiden anderen schneidet.

Entsprechend lässt die Substitution

$$\omega' = \frac{55\omega - 21}{21\omega - 8}$$

aus $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ bez. $\frac{8}{3}$ und $\frac{18}{7}$ hervorgehen, was hinsichtlich des anderen Paares von Halbkreisen den nämlichen Schluss begründet. Ich habe auf der Tafel die Zahlen $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{18}{7}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{19}{7}$ an den entsprechenden Stellen beigesetzt. *Die Kanten* 1 *und* 6 *sind nach dem Vorhergehenden so zu vereinigen, dass* $\frac{2}{7}$ *mit* $\frac{19}{7}$, $\frac{3}{7}$ *mit* $\frac{18}{7}$ *zusammenkommt.*

Auf solche Weise findet man, *dass überhaupt folgende Kanten zu vereinigen sind:*

1—6, 3—8, 5—10, 7—12, 9—14, 11—2, 13—4,

und dass jedesmal gleichartige Ecken zusammenkommen. Was dabei unter „gleichartig" zu verstehen sei, zeigt die Figur; die kleinen Nebenfiguren (auf der Tafel) erläutern, wie sich dementsprechend die 7 Ecken der einen Art und die 7 Ecken der anderen Art je zu einem Punkte a zusammenschliessen.

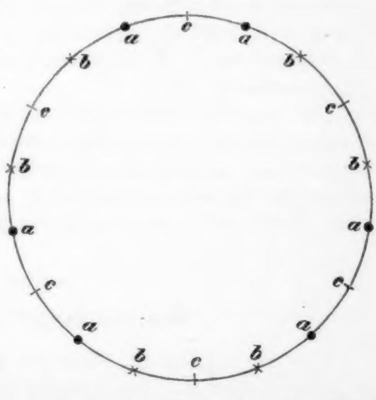
Wollte man, diesen Angaben entsprechend, die betr. Kanten durch Zusammenbiegen wirklich vereinigen, so erhielte man zunächst eine sehr unübersichtliche Figur. Es ist daher besser, für's Erste bei der auf der Tafel gegebenen Figur zu bleiben und sie durch die Tabelle, welche sich auf die Zusammengehörigkeit der Kanten bezieht, und die beiden Nebenfiguren zu ergänzen. Auf solche Weise gewinnt man die Sätze, welche ich im folgenden Paragraphen zusammenstelle.

§ 13.

Die 28 Symmetrielinien.

Als eine *Symmetrielinie* unserer Oberfläche will ich eine solche Linie bezeichnen, welche, aus lauter Dreiecksseiten bestehend, nirgendwo eine Knickung erfährt, die also durch die Punkte a, b, c sozusagen *geradlinig* hindurchlaufen. Als Symmetrielinien kann man diese Curven bezeichnen, weil die Fläche in Bezug auf sie in der That symmetrisch ist. Denn eine solche Symmetrielinie wird z. B. von der verticalen Mittellinie unserer Figur gebildet, sofern man sie noch durch Kante 5, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Kante 10 zu einer geschlossenen Curve ergänzt; — und diese beiden Kanten liegen in Bezug auf die Mittellinie symmetrisch und übrigens ist auch die Verbindungsweise der übrigen Kanten in Bezug auf die Mittellinie symmetrisch.

Fig. 8.



Das Beispiel zeigt zugleich, dass eine solche Symmetrielinie je sechs Punkte a, b, c in der auf nebenstehender Figur angegebenen Aufeinanderfolge enthält.

Hiernach hat man vor allen Dingen:

Es giebt 28 Symmetrielinien. Dieselben erschöpfen, da sie alle Dreiecksseiten enthalten, zugleich die Gesammtheit derjenigen Punkte unserer Fläche, welche *reellen* Werthen von J entsprechen.

Diese Symmetrielinien sind für viele Zwecke das einfachste Orientirungsmittel auf unserer Fläche; ich will sie hier dazu benutzen, um die zusammengehörigen Punkte a, b, c zu definiren. Es ist dann leicht, sich eine Vorstellung von den zugehörigen eindeutigen Transformationen unserer Fläche in sich zu bilden.

Man findet:

Die 7 Symmetrielinien, welche sich in einem Punkte a schneiden, schneiden sich auch in den beiden zugehörigen Punkten a. Ein Beispiel giebt der Mittelpunkt unserer Figur zusammen mit den 7 Ecken der einen und den 7 Ecken der anderen Art. — Hiernach lässt sich der Process, vermöge dessen man von der geschlossenen regulär eingetheilten Fläche zu unserer Figur kommt, folgendermassen beschreiben: Man wählt auf der Fläche ein Tripel zusammengehöriger Punkte a und zerschneidet sie längs derjenigen 7 Stücke von Symmetrielinien, die von einem dieser Punkte a zu einem anderen hinreichen. Dann ist sie, da für sie $p = 3$ war, einfach zusammenhängend mit einer Randcurve geworden, — und breitet man sie nun in eine Ebene aus, so hat man die auf der Tafel gegebene Figur. — Durch je *zwei* Tripel zusammengehöriger Punkte a verläuft offenbar *eine* Symmetrielinie; die Punkte der beiden Tripel folgen auf ihr alternirend.

Man findet ferner:

Die 3 Symmetrielinien, welche durch einen Punkt b laufen, schneiden sich wieder in dem zugehörigen Punkte b. — Beispiele für solche Punktepaare b geben in der Figur die Punkte A, A'; B, B'; C, C'; D, D', die ich noch weiterhin betrachten werde. — Jedem solchen Tripel von Symmetrielinien, und also jedem Punktepaare b, ist eine bestimmte Symmetrielinie dadurch zugeordnet, dass sie die Linien des Tripels in 2 Punkten c schneidet. In diesem Sinne gehören die 28 Punktepaare b und die 28 Symmetrielinien eindeutig zusammen.

Man findet endlich:

*Die zwei Symmetrielinien, welche durch einen Punkt c laufen, schneiden sich in einem zweiten Punkte c. Es giebt dann jedesmal noch **zwei** weitere Symmetrielinien, welche den beiden ersten nirgends begegnen und die sich gegenseitig ebenfalls in zwei Punkten c schneiden. Auf solche Weise erhält man ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.*

§ 14.

Definitive Gestalt unserer Fläche.

Eine Figur pflegt in demselben Maasse anschaulicher zu sein, als sie regelmässiger ist. Ich wünsche also der hier vorliegenden regulär eingetheilten Oberfläche eine solche Gestalt zu ertheilen, dass möglichst viele der 168 eindeutigen Transformationen der Fläche durch gewöhn-

liche *Drehungen* vermittelt werden. Man kennt alle endlichen Gruppen, welche sich aus Drehungen zusammensetzen lassen; sie entsprechen den regulären Körpern. Eine Gruppe von 168 Drehungen, wie sie hier in Betracht kommen könnte, giebt es nicht. Dagegen wurde bereits bemerkt (§ 1.), dass die 24 Substitutionen einer G''_{24} sich ebenso zusammensetzen, wie die Drehungen, die ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Es scheint daher von vorneherein nicht unmöglich, *unserer Fläche eine solche Gestalt zu geben, dass sie durch die Oktaederdrehungen in sich übergeht.*

Zu dem Zwecke sind zuvörderst auf unserer Figur solche vier Punktepaare b zu bezeichnen, welche bei den Substitutionen der G''_{24} permutirt werden. Diess kann in sehr einfacher Weise geschehen, wenn man je 14 Dreiecke, die in einem Punkte a zusammenlaufen, zu einem Siebeneck zusammenfasst und also die ganze Fläche, wie schon oben besprochen, in 24 Siebenecke zerlegt. *Man kann dann nämlich auf* $2 \cdot 7$ *Weisen vier Punktepaare* b *so aussuchen, dass durch die an sie anstossenden Siebenecke sämmtliche* 24 *Siebenecke erschöpft werden**). Eben solche vier Punktepaare sind die schon ebengenannten A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. Sechs weitere Quadrupel bekommt man, wenn man unsere Figur um ihren Mittelpunkt wiederholt durch den siebenten Theil des Kreisumfangs dreht; die übrigen sieben ergeben sich, wenn man die so erhaltenen 7 an einer Symmetrielinie, also etwa an der verticalen Mittellinie, spiegelt.

Jetzt zerschneide man unsere Figur (nachdem man die zusammengehörigen Kanten vereinigt hat) längs der durch stärkeres Ausziehen gekennzeichneten drei Zickzacklinien (welche von den punktirten Linien durchsetzt werden). Sie ist dann in eine sechsfach zusammenhängende Fläche mit sechs Randcurven verwandelt, *und diese Fläche kann man nun, wie man findet, in der Art auf eine Kugel regulär ausbreiten, dass die acht Punkte* A, A' *etc. in die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen Würfels fallen, dass die Ecken des zugehörigen Oktaeders unbedeckt bleiben, und dass die* 12 *den Halbirungspunkten der Oktaederkanten entsprechenden Punkte mit Punkten* c *coincidiren.* Der grösseren Deutlichkeit wegen füge ich eine Zeichnung bei, welche den einzelnen Oktanten der Kugelfläche vorstellt. (Siehe Fig. 9 auf p. 468.)

Die drei Siebenecke, welche im Mittelpunkte des Oktanten zusammenstossen, greifen zum Theil über ihn hinaus. Da aber das Nämliche von den Siebenecken geschieht, welche die Seiten-Oktanten über-

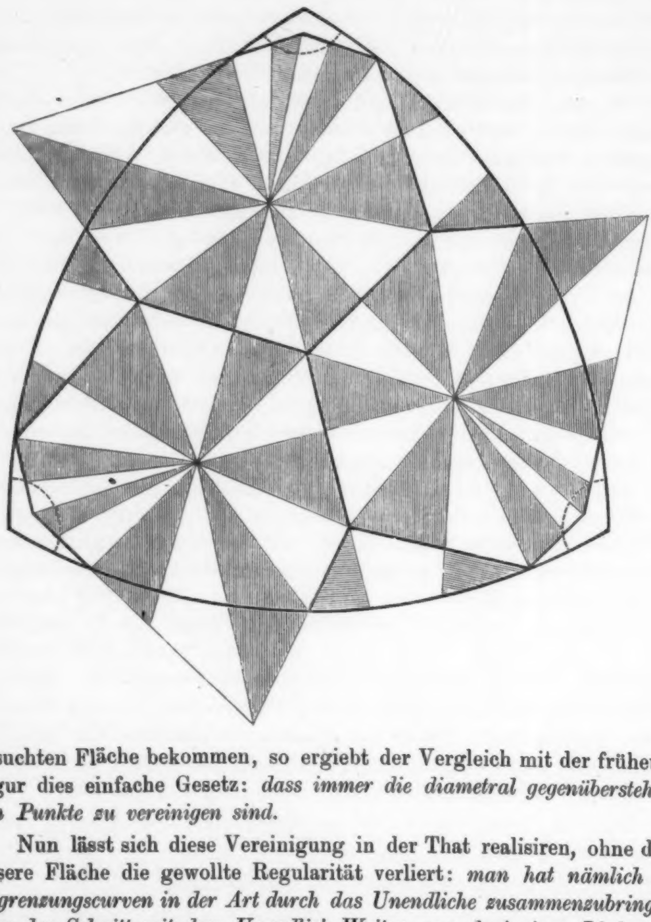
---

*) Auch die Existenz der Resolventen achten Grades ist mit Hülfe dieser Siebenecke kurz zu beweisen: *Man kann auf acht Weisen drei Siebenecke so aussuchen, dass die angrenzenden Siebenecke die Gesammtheit der noch übrigen* 21 *erschöpfen.*

decken, so bleiben von der Fläche des Oktanten nur die drei Ecken unbedeckt.

Fragen wir jetzt, wie die Randcurven, welche sich um die Oktaederecken herumlegen, zu vereinigen sind, damit wir ein Bild der

Fig. 9.



gesuchten Fläche bekommen, so ergiebt der Vergleich mit der früheren Figur dies einfache Gesetz: *dass immer die diametral gegenüberstehenden Punkte zu vereinigen sind.*

Nun lässt sich diese Vereinigung in der That realisiren, ohne dass unsere Fläche die gewollte Regularität verliert: *man hat nämlich die Begrenzungscurven in der Art durch das Unendliche zusammenzubringen, dass der Schnitt mit dem Unendlich-Weiten aus denjenigen Linien besteht, welche auf der beigegebenen Tafel, wie auch auf Figur* 9, *durch Punktirung kenntlich gemacht sind.* Die Siebenecke, welche von der Mitte des Oktanten ausgehen, erstrecken sich also zum Theil durch

das Unendliche hindurch, so dass im Ganzen 12 Punkte c unendlich weit liegen. — Die Fläche selbst aber läuft etwa so ins Unendliche, wie das Aggregat dreier unter sich congruenter Rotationshyperboloide mit rechtwinkelig gekreuzten Axen. *Dies ist die einfachste Gestalt, deren unsere regulär eingetheilte Fläche fähig erscheint**).

Will man sich jetzt überzeugen, dass bei den 24 Transformationen, welche durch die Oktaederdrehungen versinnlicht sind, wirklich jedesmal die früher angegebene Zahl von Punkten festbleibt, so berücksichtige man, *dass bei Drehungen von der Periode Zwei nicht nur die Punkte der Rotationsaxe, sondern auch sämmtliche Punkte der zur Rotationsaxe senkrechten unendlich fernen Geraden festbleiben.* Nun wird unsere Fläche von den Oktaederdiagonalen gar nicht geschnitten, von den zu ihnen senkrechten unendlich weiten Linien viermal. Diejenigen Diametrallinien, welche die Kantenhalbirungspunkte des Oktaeders verbinden, schneiden zweimal, desgleichen die zu ihnen gehörigen unendlich fernen Linien. Die Würfeldiagonalen haben ebenfalls zwei und nur zwei Schnittpunkte. Hiernach bleibt bei einer Drehung von der Periode Vier *kein* Punkt fest, bei jeder Drehung von der Periode Zwei ein *Punktquadrupel*, bei jeder Drehung von der Periode Drei ein *Punktepaar*, wie es sein sollte.

§ 15.

Die reellen Punkte der Curve vierter Ordnung.

Ich wünsche nun noch zum Schlusse zu zeigen, wie weit diese Lagenverhältnisse hervortreten, wenn man *die reellen Punkte der Curve vierter Ordnung*

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

ins Auge fasst. Das Coordinatendreieck mag gleichseitig genommen sein, die Coordinaten selbst proportional mit den Abständen von den Dreiecksseiten. Dann stellt die Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$ die unendlich ferne Gerade dar; ihre Berührungspunkte $1 : \alpha : \alpha^2$ und $1 : \alpha^2 : \alpha$ sind die beiden Kreispunkte. Die unendlich ferne Gerade ist also *isolirte* Doppeltangente. Die sechs Collineationen der zugehörigen G_6' sind die einzigen unter den 168, welche reell sind; sie bestehen aus den drei Drehungen durch 120 Grad um den Mittelpunkt des Coordinatendreiecks und aus den Umklappungen um gewisse drei durch den Mittelpunkt hindurchlaufende gerade Linien. Diese Linien sind die einzigen unter den 21 Axen der Perspectivität, welche reell sind; die zugehörigen Centra liegen senkrecht zu ihnen unendlich weit.

---

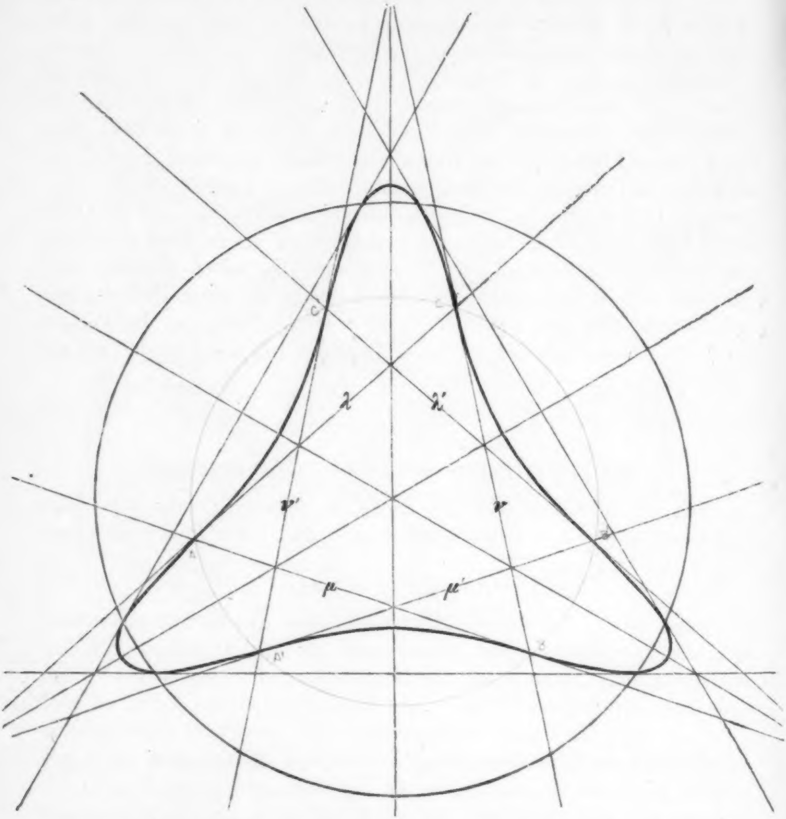
*) Ich habe für das mathematische Institut der technischen Hochschule dahier ein Modell der so gestalteten Fläche anfertigen lassen.

Die betreffenden Umklappungen lassen aus dem Wendedreiecke $\lambda\mu\nu = 0$ noch ein zweites reelles Wendedreieck $\lambda'\mu'\nu' = 0$ entstehen.

Man beachte nun vor Allem die Gleichungsform (9):

$$49 y_1 (y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3) - 3(4y_1^2 - 7 y_2 y_3)^2 = 0.$$

Fig. 10.



Hier setze man für y_1, als unendlich ferne Gerade, 1, für y_2 und y_3, insofern die betr. Linien durch die Kreispunkte laufen, $x + iy$ und $x - iy$. So kommt:

$$49\,(2x+1)(-x+\sqrt{3}\cdot y+1)(-x-\sqrt{3}\cdot y+1)-3(4-7(x^2+y^2))^2=0.$$

Die Doppeltangenten

$$2x+1=0, \quad -x+\sqrt{3}\cdot y+1=0, \quad -x-\sqrt{3}\cdot y+1=0$$

bilden wieder ein gleichseitiges Dreieck; seine Höhe ist $\frac{3}{2}$, seine Kantenlänge $\sqrt{3}$. Aus ihnen schneidet der um den Mittelpunkt des Dreiecks herumgelegte Kreis vom Radius $\frac{2}{\sqrt{7}}$ reelle Berührungspunkte aus, *so dass wir drei nicht isolirte Doppeltangenten haben.* Alle anderen Doppeltangenten werden, wie man findet, imaginär. *Unsere Curve ist also eine eintheilige Curve**), *welche in das Dreieck der nicht isolirten Doppeltangenten eingeschrieben ist.* In der beistehenden, übrigens nur schematischen Figur sind neben den drei in Rede stehenden Doppeltangenten der Kreis durch die Berührungspunkte, die drei reellen Axen der Perspectivität und die beiden reellen Wendedreiecke kenntlich gemacht.

Der so gewonnene reelle Curvenzug hat für die zugehörige Riemann'sche Fläche eine sehr einfache Bedeutung: *er stellt eine der* 28 *Symmetrielinien vor.* Denn reellen Werthen von λ, μ, ν entsprechen reelle Werthe von J, und durch reelle Werthe von J sind die Symmetrielinien charakterisirt. — Diese Symmetrielinie ist der unendlich fernen isolirten Doppeltangente eindeutig zugeordnet und geht daher, wie diese, durch die reellen Substitutionen einer G_6' in sich über. Sie enthält von den Punkten a, b, c je sechs, und, wie die Figur zeigt, in der That in derselben Reihenfolge, welche, nach Figur 8, bei Symmetrielinien überhaupt Statt hat.

München, im Anfang November 1878.

---

*) Siehe Zeuthen, sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre, diese Annalen Bd. VII.

Ueber die Festlegung projectiv-veränderlicher ebener Systeme.

Von L. Burmester in Dresden.

(Mit 1 lithogr. Tafel.)

Allgemeine Aufgaben und fundamentale Sätze.

§ 1.

Im VI^ten Bande dieser „Annalen" S. 205 erwähnt Clebsch der Aufgabe: „Auf 8 in einer Ebene gegebene Gerade 8 Punkte so zu bestimmen, dass sie 8 gegebenen Punkten eines ebenen Systems collinear entsprechen", ohne den Weg der Lösung und den Beweis der Bestimmtheit derselben anzugeben. Er bemerkt nur andeutungsweise, dass man durch die Untersuchung des Connexes 1^ter Ordnung und 1^ter Classe zur Construction des Resultates gelangen könne. Ich habe mich jedoch vergeblich bemüht eine leicht übersichtliche constructive Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe des genannten Connexes zu finden, und daher sah ich mich genöthigt diese Aufgabe auf andere Weise zu bewältigen. Wir können das ebene System, von dem 8 Punkte gegeben sind, als collinear-veränderlich betrachten und demnach die Aufgabe stellen: Die 8 gegebenen Punkte des collinear-veränderlichen ebenen Systems auf 8 gegebene Gerade zu legen. Bei diesen Betrachtungen wird es aber nothwendig die Bestimmtheit der Aufgabe darzulegen und überhaupt die Bedingungen anzugeben, welche zur Festlegung des veränderlichen Systems erforderlich sind. Da die constructive Lösung dieser Aufgabe zu fundamentalen neuen Beziehungen führt, aus denen sich viele interessante geometrische Resultate ergeben, so wollen wir uns einen synthetisch-geometrischen Weg bahnen, auf dem wir durch lineare Construction zur Lösung dieser Aufgabe gelangen, und nebenher die Früchte der geometrischen Entwickeluug empfangen. Durch analytische Betrachtung ergiebt sich, dass zur symmetrischen Bestimmung der gegebenen 8 Punkte und 8 Gerade 32 Constanten erforderlich sind, die man in letzter Instanz auf 26 Constanten reduciren kann, und hieraus ersehen wir schon, dass die constructive Durchführung der Lösung unserer Aufgabe naturgemäss nicht einfach ist. Aber wir wollen uns bestreben den theoretischen Con-

structionsweg möglichst bequem zu machen, so dass die Umständlichkeit der graphischen Ausführung nicht in dem Masse empfunden wird, wie es die Wirklichkeit mit sich bringt, und deshalb werden wir in dem Folgenden mit einfacheren Aufgaben beginnen, die uns stufenweise zu Lösung der genannten Aufgabe leiten. Aus den allgemeinen Ergebnissen, die sich auf das collinear-veränderliche System beziehen, wollen wir aber zugleich die speciellen Beziehungen entnehmen, welche bei den affin-veränderlichen und ähnlich-veränderlichen ebenen Systemen auftreten und welche uns die Mittel zur Lösung der hierauf bezüglichen analogen Aufgaben liefern. Um aber diesen drei veränderlichen Systemen eine gemeinsame Benennung zu geben, haben wir die Bezeichnung „projectiv-veränderliche ebene Systeme" gewählt.

Damit unsere Darlegung aus *einem* Gusse hervorgeht, wollen wir von dem folgenden Hauptsatze ausgehen, der die einzige Grundlage der gesammten weiteren Entwickelung bildet.

A) „Sind drei Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen."*)

Hieraus folgen mit Beachtung der Reciprocität die vollständigeren speciellen Sätze, auf die wir uns in der Folge vorzugsweise stützen werden.

B) „Sind drei Systempunkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest und bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden, so erzeugen alle beweglichen Systempunkte collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den drei durch die drei festen Punkte bestimmten festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Kegelschnitte, welche die festen Systemgeraden berühren."

B') „Sind drei Systemgerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest und dreht sich eine Systemgerade um einen Punkt, so erzeugen alle beweglichen Systemgeraden collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach den drei durch die drei festen Geraden bestimmten festen Systempunkten gehen, und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kegelschnitte, welche die festen Systempunkte enthalten."

Um noch zwei Sätze abzuleiten, welche für die folgenden Betrachtungen erforderlich sind, denken wir uns die Verbindungsgeraden der homologen Punkte A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 .. zweier in einer Ebene liegender collinearer Systeme S_1, S_2 gezogen, die Schnittpunkte, welche eine der selbstentsprechenden Geraden λ der beiden Systeme

*) Dieser Satz, den ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 20, S. 384 mitgetheilt habe, gilt auch, wenn zwei der festen Punkte imaginär sind.

mit diesen Verbindungsgeraden liefert, bezeichnen wir resp. mit $A_\lambda B_\lambda C_\lambda D_\lambda \ldots$, und bestimmen auf diesen Geraden die Punkte $A_x B_x C_x D_x \ldots$, welche ein ebenes System S_x bilden, so dass $A_\lambda A_1 A_2 A_x \barwedge B_\lambda B_1 B_2 B_x \barwedge C_\lambda C_1 C_2 C_x \barwedge D_\lambda D_1 D_2 D_x \barwedge \ldots$ ist. Die beiden Systeme S_1, S_2 haben drei selbstentsprechende Punkte, welche wir mit P, Q, R bezeichnen wollen, von denen auch zwei auf einer stets realen selbstentsprechenden Geraden λ liegend imaginär sein können. Bestimmen wir nun die Punkte $B_3 C_3 D_3 \cdots$ eines Systems S_3, so dass die Punkte $PQRA_x B_3 C_3 D_3 \cdots$ den Punkten $PQRA_1 B_1 C_1 D_1 \cdots$ collinear entsprechen, so ist nach dem Satze B.) $A_\lambda A_1 A_2 A_x \barwedge B_\lambda B_1 B_2 B_3 \barwedge C_\lambda C_1 C_2 C_3 \barwedge D_\lambda D_1 D_2 D_3 \barwedge \cdots$; hiernach fallen auch die Punkte $B_3 C_3 D_3 \cdots$ resp. mit den Punkten $B_x C_x D_x \cdots$ zusammen und folglich sind die beiden Systeme S_3, S_x identisch. Hieraus ergeben sich, da zwei collineare ebene Systeme durch vier Paar entsprechender Punkte bestimmt sind, die Sätze:

C.) „Bewegen sich vier Punkte eines collinear-veränderlichen Systems derart, dass sie vier collineare gerade Punktreihen erzeugen, von denen vier entsprechende Punkte auf einer selbstentsprechenden Geraden zweier Systemphasen liegen, so bleiben drei Systempunkte und die drei durch sie bestimmten Systemgeraden fest; alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den drei festen Geraden liegen und deren Träger die Verbindungsgeraden homologer Punkte zweier Systemphasen sind.“

C′.) „Bewegen sich vier Gerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems derart, dass sie vier collineare Strahlenbüschel erzeugen, von denen vier entsprechende Strahlen sich in einem selbstentsprechenden Punkt zweier Systemphasen schneiden, so bleiben drei Systemgerade und die drei durch sie bestimmten Systempunkte fest; alle beweglichen Systemgeraden erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen durch die drei festen Punkte gehen und deren Mittelpunkte die Schnittpunkte homologer Geraden zweier Systemphasen sind.“

§ 2.

Den Anfang unserer Entwickelung bilden nach dieser Vorbereitung die beiden folgenden leichten Aufgaben, von denen wir nur die Lösung der linksstehenden ausführen, weil hiermit auch zugleich die Lösung der reciproken rechtsstehenden Aufgabe gegeben ist.

Aufgabe 1. *Fünf Punkte $ABCDE$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems S sind gegeben, es soll eine Phase S_1 desselben*

Aufgabe 1′. *Fünf Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems $\mathfrak{S}$ sind gegeben, es soll eine Phase $\mathfrak{S}_1$ desselben*

bestimmt werden, in der die homologen Punkte von ABC resp. mit drei gegebenen Punkten $A_1\,B_1\,C_1$ zusammenfallen und die homologen Punkte von DE resp. auf zwei gegebenen Geraden $d\,e$ liegen.

bestimmt werden, in der die homologen Geraden von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ resp. mit drei gegebenen Geraden $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ zusammenfallen und die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ resp. durch zwei gegebene Punkte $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ gehen.

Wir nehmen auf der Geraden d einen Punkt D' beliebig an und bestimmen den Punkt E' so, dass $A_1B_1C_1D'E'$ collinear $ABCDE$ ist. Betrachten wir in der Systemphase $A_1B_1C_1D'E'$ die drei Punkte $A_1B_1C_1$ als fest, während D' sich auf der Geraden d bewegt, so beschreibt der Systempunkt E' eine Gerade e_E, die wir nach dem Satze A.) erhalten, indem wir zu dem Strahlenbüschel $D'(A_1B_1C_1d)$ das collineare Strahlenbüschel $E'(A_1B_1C_1e_E)$ construiren. Diese Bestimmung des vierten Strahles e_E ist bekanntlich auch dann noch linear ausführbar, wenn zwei von den festen Punkten $A_1B_1C_1$ imaginär und als Doppelpunkte zweier collinearer Punktreihen gegeben sind. Die Gerade e_E schneidet die Gerade e in dem Punkte E_1, der eindeutig bestimmt ist, wenn die Gerade e_E nicht mit e zusammenfällt. Ist der Punkt E' während der Bewegung nach E_1 gelangt, dann hat der Punkt D' auf der Geraden d eine bestimmte Lage D_1 angenommen, welche wir erhalten, indem wir $A_1B_1C_1D_1E_1$ collinear $ABCDE$ machen; die gesuchte Systemphase S_1 ist aber schon durch die vier Punkte $A_1B_1C_1E_1$ gegeben. Aus dieser linearen Lösung der beiden Aufgaben folgen die Sätze 1, 1′ und I, I′, welche sich ihrer Form nach sehr unterscheiden, ihrem Inhalte nach aber im Wesentlichen übereinstimmen.

1. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn drei Systempunkte fest und zwei Systempunkte gezwungen sind, auf zwei festen Geraden zu bleiben.*

1′. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn drei Systemgerade fest und zwei Systemgerade gezwungen sind, durch zwei feste Punkte zu gehen.*

I. *Ein System S_1, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Paar homologe Punkte A_1A, B_1B, C_1C, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen.*

I′. *Ein System $\mathfrak{S}_1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Paar homologe Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}$, zwei Gerade $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ gehen.*

Fallen die beiden festen Geraden in einer Geraden, und reciprok die beiden festen Punkte in einem Punkt zusammen, so ergeben sich aus den Sätzen 1 und 1′ beziehlich die bekannten speciellen Sätze, welche wir nur der systematischen Vollständigkeit wegen mit anführen.

1_1. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn drei Systempunkte und eine Systemgerade fest sind.

$1_1'$. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn drei Systemgerade und ein Systempunkt fest sind.

Durch eine analoge Specialisirung folgt aus den Sätzen I und I′:

I_1. Ein System S_1, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Paar homologe Punkte $A_1 A$, $B_1 B$, $C_1 C$, und zwei homologe Gerade $\delta_1 \delta$ gegeben sind.

I_1'. Ein System $\mathfrak{S}_1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Paar homologe Gerade $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}$, und zwei homologe Punkte $\Delta_1 \Delta$ gegeben sind.

Da alle in einer Ebene liegende affine Systeme die unendlich ferne Gerade selbstentsprechend gemeinsam haben, so folgt aus 1′, 1_1, $1_1'$ und ferner aus I′, I_1, I_1':

$1_{\mathrm{I}}'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systemgerade fest und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen.

1_2. Ein affin-veränderliches ebenes System ist unbeweglich, wenn drei Systempunkte fest sind.

$1_2'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist unbeweglich, wenn zwei Systemgerade und ein Systempunkt fest sind.

I_{I}'. Ein System $\mathfrak{S}_1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Gerade $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}$, zwei Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ gehen.

I_2. Ein System S_1, welches einem ebenen System S affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Paar homologe Punkte $A_1 A$, $B_1 B$, $C_1 C$ gegeben sind.

I_2'. Ein System $\mathfrak{S}_1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Gerade $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}$ und zwei homologe Punkte $\Delta_1 \Delta$ gegeben sind.

Da alle in einer Ebene liegende ähnliche Systeme die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte als selbstentsprechende Punkte besitzen, so ergeben sich aus den Sätzen 1, 1′ und I, I′ beziehlich die folgenden speciellen Sätze:

1_3. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn ein Systempunkt fest ist, und zwei Systempunkte gezwungen sind auf zwei festen Geraden zu bleiben.

$1_3'$. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn ein Systempunkt*) fest ist, und zwei Systemgerade gezwungen sind, durch zwei feste Punkte zu gehen.

I_3. Ein System S_1, welches einem ebenen System S ähnlich ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Punkte $C_1 C$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen.

I_3'. Ein System $\mathfrak{S}_1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ ähnlich ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Punkte $\Gamma_1\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ gehen.

Es seien in einer Ebene drei Gerade cde und in einem collinear-veränderlichen ebenen System S_1 fünf Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ gegeben, von denen die drei Punkte $C_1 D_1 E_1$ resp. auf den drei Geraden cde liegen. Auf der Geraden c nehmen wir noch zwei beliebige Punkte $C_2 C_3$ an und denken uns in der vorhin angegebenen Weise auf den Geraden d, e resp. die Punkte $D_2 D_3$, $E_2 E_3$ bestimmt, so dass $A_1 B_1 C_2 D_2 E_2$ und $A_1 B_1 C_3 D_3 E_3$ homologe Punkte zweier Phasen S_2, S_3 des collinear-veränderlichen ebenen Systems $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ sind. Die beiden Systeme S_1, S_2 haben ausser den beiden selbstentsprechenden Punkten $A_1 B_1$, die auch imaginär sein können, noch einen reellen selbstentsprechenden Punkt, den wir mit Γ bezeichnen wollen. Denken wir uns nun die Punkte $D_x E_x$ einer Systemphase S_x so bestimmt, dass die Punkte $A_1 B_1 \Gamma C_3 D_x E_x$ resp. den Punkten $A_1 B_1 \Gamma C_1 D_1 E_1$ homolog sind; dann liegen nach dem Satze B.) auch die Punkte $D_x E_x$ beziehlich auf den Geraden de. Da nach dem Satze I eine Phase $A_1 B_1 C_3 D_3 E_3$ des Systems $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ bestimmt ist, wenn die Punkte $A_1 B_1 C_3$ den Punkten $A_1 B_1 C_1$ homolog sind und die zu $D_1 E_1$ homologen Punkte $D_3 E_3$ resp. auf den Geraden de liegen, so sind die beiden Systemphasen S_3 und S_x identisch. Demnach haben die drei Systemphasen $S_1 S_2 S_3$ ausser den beiden selbstentsprechenden Punkten $A_1 B_1$ noch den selbstentsprechenden Punkt Γ gemeinsam und hieraus ergeben sich die Sätze:

α. Sind zwei Systempunkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, und bewegen sich drei

α′. Sind zwei Systemgerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, und drehen sich*

*) Der reelle Schnittpunkt der beiden imaginären selbstentsprechenden festen Geraden.

Systempunkte auf drei Geraden, so ist noch ein dritter Systempunkt fest und alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den drei durch die drei festen Punkte bestimmten festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Kegelschnitte, welche die festen Systemgeraden berühren.

drei Systemgerade um drei Punkte, so ist noch eine dritte Systemgerade fest und alle beweglichen Systemgeraden erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach den drei durch die drei festen Geraden bestimmten festen Systempunkten gehen, und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kegelschnitte, welche die festen Systempunkte enthalten.

Für ähnlich-veränderliche Systeme ergiebt sich aus dem Satze α der folgende Satz:

α_1. Bewegen sich drei Systempunkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems auf drei Geraden, so ist ein Systempunkt fest, alle beweglichen Systempunkte erzeugen ähnliche gerade Punktreihen und alle Systemgeraden umhüllen Parabeln.

Liegt eine der festen Systemgeraden im Unendlichen, so folgt aus dem Satze α' der specielle Satz:

α_1'. Ist eine Systemgerade eines affin-veränderlichen ebenen Systems fest und drehen sich drei Systemgerade um drei Punkte, so ist noch eine zweite Systemgerade fest und alle beweglichen Systemgeraden erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach dem festen Schnittpunkt und den unendlich fernen Punkten der beiden festen Systemgeraden gehen, alle beweglichen Systempunkte beschreiben homothetische Hyperbeln, welche durch den festen Schnittpunkt gehen.

§ 3.

Mittelst der Aufgaben 1, 1' und der Sätze α, α' gelangen wir zu der Lösung der folgenden Aufgaben:

Aufgabe 2. *Sechs Punkte $ABCDEF$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems S sind gegeben, es soll eine Phase S^1 desselben bestimmt werden, in der die homologen Punkte von AB resp. mit zwei gegebenen Punkten $A^1 B^1$ zusammenfallen und die homologen Punkte von $CDEF$ resp. auf vier gegebenen Geraden $cdef$ liegen.*

Aufgabe 2'. *Sechs Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems $\mathfrak{S}$ sind gegeben, es soll eine Phase $\mathfrak{S}^1$ desselben bestimmt werden, in der die homologen Geraden von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ resp. mit zwei gegebenen Geraden $\mathfrak{a}^1\,\mathfrak{b}^1$ zusammenfallen und die homologen Geraden von $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}$ resp. durch vier gegebene Punkte $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ gehen.*

Wir nehmen auf der Geraden c zwei Punkte $C_1 C_2$ beliebig an und bestimmen in der angegebenen Weise auf den Geraden $d\,e$ resp. die Punkte $D_1 D_2$, $E_1 E_2$, so dass $A^1 B^1 C_1 D_1 E_1$ und $A^1 B^1 C_2 D_2 E_2$ homologe Punkte zweier Phasen S_1, S_2 des collinear-veränderlichen Systems $ABCDE$ sind; ferner bestimmen wir in diesen Phasen S_1, S_2 die Punkte $F_1 F_2$, die dem Punkt F in S homolog sind, und ziehen die durch $F_1 F_2$ gehende Gerade f_F, welche die Gerade f in F^1 trifft. Bezeichnen wir nun die Schnittpunkte, welche die durch $A^1 B^1$ gehende selbstentsprechende Gerade λ der Phasen S_1, S_2 mit den Geraden $c\,d\,e\,f_E$ bildet, resp. mit $C_\lambda D_\lambda E_\lambda F_\lambda$ und bestimmen wir auf den Geraden $c\,d\,e$ resp. die Punkte $C^1 D^1 E^1$, indem wir

$$C_\lambda C_1 C_2 C^1 \barwedge D_\lambda D_1 D_2 D^1 \barwedge E_\lambda E_1 E_2 E^1 \barwedge F_\lambda F_1 F_2 F^1$$

machen, so sind nach dem Satze C.) $A^1 B^1 C^1 D^1 E^1 F^1$ die Punkte der gesuchten Phase S^1 des collinear-veränderlichen Systems S, von denen $C^1 D^1 E^1 F^1$ resp. auf den gegebenen Geraden $c\,d\,e\,f$ liegen; und diese Phase S^1 ist eindeutig bestimmt, wenn die Gerade f_F nicht mit der Geraden f zusammenfällt. Da die Phase S^1 schon durch vier Punkte $A^1 B^1 C^1 F^1$ bestimmt ist, so genügt es, nachdem der Punkt F^1 gefunden ist, wenn wir nur noch den Punkt C^1 ermitteln, indem wir

$$C_\lambda C_1 C_2 C^1 \barwedge F_\lambda F_1 F_2 F^1$$

machen. Mit dieser linearen Lösung der Aufgabe 2 ist zugleich die lineare Lösung der reciproken Aufgabe 2′ gegeben, und wir erhalten demnach die Sätze:

2. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systempunkte fest und vier Systempunkte gezwungen sind, auf vier festen Geraden zu bleiben.*

2′. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systemgerade fest und vier Systemgerade gezwungen sind, durch vier feste Punkte zu gehen.*

II. *Ein System S^1, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Punkte AA^1, BB^1, vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $c\,d\,e\,f$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen.*

II′. *Ein System $\mathfrak{S}^1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Gerade $\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}$, vier Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ gehen.*

Fällt ein Paar von den vier Geraden und reciprok ein Paar von den vier Punkten zusammen, so ergeben sich beziehlich die speciellen Sätze:

2_1. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systempunkte und eine Systemgerade fest, und zwei Systempunkte gezwungen sind, auf zwei festen Geraden zu bleiben.

II_1. Ein System S^1, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Punkte A^1A, B^1B, zwei homologe Gerade $\gamma^1\gamma$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen.

$2_1'$. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systemgerade und ein Systempunkt fest, und zwei Systemgerade gezwungen sind, durch zwei feste Punkte zu gehen.

II_1'. Ein System $\mathfrak{S}^1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Gerade $\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}$, zwei homologe Punkte $\Gamma^1\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ gehen.

Für affin-veränderliche ebene Systeme ergeben sich aus $2'$, 2_1, $2_1'$ und II', II_1, II_1' resp. die Sätze:

$2_1'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn eine Systemgerade fest ist, und vier Systemgerade gezwungen sind, durch vier feste Punkte zu gehen.

2_2. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn zwei Systempunkte fest und zwei Systempunkte gezwungen sind, auf zwei festen Geraden zu bleiben.

$2_2'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn eine Systemgerade und ein Systempunkt fest ist, und zwei Systemgerade gezwungen sind, durch zwei feste Punkte zu gehen.

II_1'. Ein System $\mathfrak{S}^1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Gerade $\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}$, vier Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ gehen.

II_2. Ein System S^1, welches einem ebenen System S affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei Paar homologe Punkte A^1A, B^1B, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen.

II_2'. Ein System $\mathfrak{S}^1$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Gerade $\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}$, zwei homologe Punkte $\Gamma^1\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$ gehen.

Für ähnlich-veränderliche ebene Systeme erhalten wir aus 2 und II die Sätze:

2_3. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn vier Systempunkte gezwungen sind, auf vier festen Geraden zu bleiben.

II_3. Ein System S^1, welches einem ebenen System S ähnlich ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $cdef$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen.

Hieraus folgt, wenn zwei Gerade in einer Geraden zusammenfallen:

2_4. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn eine Systemgerade fest ist und zwei Systempunkte gezwungen sind, auf zwei festen Geraden zu bleiben.

II_4. Ein System S^1, welches einem ebenen System S ähnlich ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Gerade γ^1, γ, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen.

Es seien in einer Ebene fünf Gerade $bcdef$ und in einem collinear-veränderlichen ebenen System S^1 sechs Punkte $A^1B^1C^1D^1E^1F^1$ gegeben, von denen die fünf Punkte $B^1C^1D^1E^1F^1$ resp. auf den fünf Geraden $bcdef$ liegen. Auf der Geraden b nehmen wir zwei beliebige Punkte B^2B^3 an, und denken uns, wie eben gezeigt wurde, auf den vier Geraden $cdef$ resp. die Punkte C^2C^3, D^2D^3, E^2E^3, F^2F^3 bestimmt, so dass $A^1B^2C^2D^2E^2F^2$ und $A^1B^3C^3D^3E^3F^3$ homologe Punkte zweier Phasen S^2S^3 des collinear-veränderlichen ebenen Systems $A^1B^1C^1D^1E^1F^1$ sind. Die beiden Systeme S^1S^2 haben ausser dem selbstentsprechenden Punkt A^1 noch zwei selbstentsprechende Punkte $\mathsf{B}\Gamma$, die auch imaginär sein können. Denken wir uns nun die Punkte $C_xD_xE_xF_x$ einer Systemphase S_x so bestimmt, dass die Punkte $A^1\mathsf{B}\Gamma B^3C_xD_xE_xF_x$ resp. den Punkten $A^1\mathsf{B}\Gamma B^1C^1D^1E^1F^1$ homolog sind; dann liegen nach dem Satze B.) auch die Punkte $C_xD_xE_xF_x$ beziehlich auf den Geraden $cdef$. Da nach dem Satze II. eine Phase $A^1B^3C^3D^3E^3F^3$ des Systems $A^1B^1C^1D^1E^1F^1$ bestimmt ist, wenn die Punkte A^1B^3 den Punkten A^1B^1 homolog sind und die zu $C^1D^1E^1F^1$ homologen Punkte $C^3D^3E^3F^3$ resp. auf den Geraden $cdef$ liegen, so sind die beiden Systemphasen S^3 und S_x identisch. Demnach haben die drei Systemphasen $S^1S^2S^3$ ausser dem selbstentsprechenden Punkt A^1 noch zwei selbstentsprechende Punkte $\mathsf{B}\Gamma$ gemeinsam und somit erhalten wir die Sätze:

β. Ist ein Systempunkt eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, und bewegen sich fünf Systempunkte auf fünf Geraden, so

β′. Ist eine Systemgerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, und drehen sich fünf Systemgerade um fünf Punkte, so

*sind noch zwei andere Systempunkte fest, und alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den durch die drei festen Punkte bestimmten festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Kegelschnitte, welche die festen Systemgeraden berühren.**)

sind noch zwei andere Systemgerade fest, und alle beweglichen Systemgerade erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach den durch die drei festen Geraden bestimmten festen Systempunkten gehen, und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kegelschnitte, welche die festen Systempunkte enthalten.

Fallen zwei der fünf Geraden und zwei der fünf Punkte zusammen, dann folgen aus β, β' beziehlich die Sätze:

β_1. Ist ein Systempunkt und eine Systemgerade eines collinearveränderlichen ebenen Systems fest, und bewegen sich drei Systempunkte auf drei Geraden, so sind noch zwei auf der festen Systemgeraden liegende Systempunkte fest, und alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen etc.

β_1'. Ist eine Systemgerade und ein Systempunkt eines collinearveränderlichen ebenen Systems fest, und drehen sich drei Systemgerade um drei Punkte, so sind noch zwei durch den festen Systempunkt gehende Systemgerade fest, und alle beweglichen Systemgeraden erzeugen collineare Strahlenbüschel etc.

Liegt eine feste Systemgerade im Unendlichen, dann erhalten wir aus β', β_1 und β_1' beziehlich die folgenden Sätze:

β_I'. Drehen sich fünf Systemgerade eines affinen ebenen Systems um fünf Punkte, so sind zwei Systemgerade fest und alle beweglichen Systemgerade erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach dem festen Schnittpunkt und den unendlich fernen Punkten der beiden festen Systemgeraden gehen, und alle

*) Nach diesem Satze giebt es für jeden Punkt der Ebene, den wir als festen Systempunkt betrachten, einfach unendlich viele collineare ebene Systeme, von denen fünf Systempunkte beziehlich auf fünf in einer Ebene gegebenen Geraden liegen; und in allen diesen Fällen liegen dann alle nicht selbstentsprechende homologe Punkte auf Geraden. Demnach ist der folgende von Clebsch im VI. Bande dieser „Annalen" S. 205 mitgetheilte Satz falsch: „*Bei allen Collineationen, bei welchen die zu gegebenen fünf Punkten gehörigen Punkte auf gegebenen Geraden liegen, existirt immer noch ein sechster Punkt, dessen entsprechende Punkte sämmtlich auf einer Geraden liegen, und zwar wird der sechste Punkt und diese Gerade linear construirt.*" Da wir in der Ebene zweifach unendlich viele Punkte als feste Systempunkte annehmen können und da zu jedem einfach unendlich viele der genannten Systeme gehören, so giebt es überhaupt dreifach unendlich viele der genannten collinearen ebenen Systeme.

beweglichen Systempunkte beschreiben homothetische Kegelschnitte, welche den festen Punkt enthalten.

β_2. Ist ein Systempunkt eines affin-veränderlichen ebenen Systems fest und bewegen sich drei Systempunkte auf drei Geraden, so sind zwei durch den festen Systempunkt gehende Systemgerade fest, und alle beweglichen Systempunkte erzeugen ähnliche gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den beiden festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Parabeln, welche die beiden festen Systemgeraden berühren.

β_2'. Ist ein Systempunkt eines affin-veränderlichen ebenen Systems fest und drehen sich drei Systemgerade um drei Punkte, so sind zwei durch den festen Systempunkt gehende Systemgerade fest, und alle beweglichen Systemgerade erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach dem Schnittpunkt und den unendlich fernen Punkten der beiden festen Systemgeraden gehen, und alle beweglichen Systempunkte beschreiben homothetische Kegelschnitte, welche den festen Systempunkt enthalten.

§ 4.

Durch die Lösung der Aufgaben 2, 2′ und durch die Sätze β, β' werden wir zu der Lösung der folgenden Aufgaben geführt:

Aufgabe 3. *Sieben Punkte $ABCDEFG$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems S sind gegeben, es soll eine Phase S_I desselben bestimmt werden, in der der homologe Punkt von A mit dem gegebenen Punkt A_I zusammenfällt, und die homologen Punkte von $BCDEFG$ resp. auf sechs gegebenen Geraden $bcdefg$ liegen.*

Aufgabe 3′. *Sieben Gerade $\mathfrak{abcdefg}$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems $\mathfrak{S}$ sind gegeben, es soll eine Phase $\mathfrak{S}_I$ desselben bestimmt werden, in der die homologe Gerade von $\mathfrak{a}$ mit der gegebenen Geraden $\mathfrak{a}_I$ zusammenfällt, und die homologen Geraden $\mathfrak{bcdefg}$ resp. durch die sechs gegebenen Punkte $\mathfrak{BCDEFG}$ gehen.*

Wir nehmen auf der Geraden b zwei Punkte B^1B^2 beliebig an und bestimmen in der angegebenen Weise auf den Geraden $cdef$ resp. die Punkte C^1C^2, D^1D^2, E^1E^2, F^1F^2, so dass $A_IB^1C^1D^1E^1F^1$ und $A_IB^2C^2D^2E^2F^2$ homologe Punkte zweier Phasen S^1S^2 des collinear-veränderlichen Systems $ABCDEF$ sind; ferner bestimmen wir in diesen Phasen S^1S^2 die Punkte G^1G^2, die dem Punkte G in S homolog sind, und ziehen die durch G^1G^2 gehende Gerade g_G, welche die Gerade g in dem Punkte G_I trifft, und construiren die linear bestimmbare nicht durch den selbstentsprechenden Punkt A_I gehende selbstentsprechende Gerade λ der Systeme S^1S^2. Bezeichnen wir die Schnittpunkte, welche diese selbstentsprechende Gerade λ mit den

Geraden $bcdefg_G$ bildet, resp. mit $B_\lambda C_\lambda D_\lambda E_\lambda F_\lambda G_\lambda$ und bestimmen wir auf den Geraden $bcdef$ die Punkte $B_I C_I D_I E_I F_I$, indem wir

$$B_\lambda B^1 B^2 B_I \barwedge C_\lambda C^1 C^2 C_I \barwedge D_\lambda D^1 D^2 D_I \barwedge E_\lambda E^1 E^2 E_I \barwedge F_\lambda F^1 F^2 F_I$$
$$\barwedge G_\lambda G^1 G^2 G_I$$

machen, so sind nach dem Satze C.) $A_I B_I C_I D_I E_I G_I$ die Punkte der Phase S_I des collinear-veränderlichen Systems S, von denen $B_I C_I D_I$ $E_I F_I G_I$ resp. auf den gegebenen Geraden $bcdefg$ liegen, und diese Phase S_I ist eindeutig bestimmt, wenn die Gerade g_G nicht mit der der Geraden g zusammenfällt. Da die Phase S_I schon durch vier Punkte $A_I B_I C_I G_I$ bestimmt ist, so genügt es, nachdem der Punkt G_I gefunden ist, wenn wir die Punkte $B_I C_I$ ermitteln, indem wir

$$B_\lambda B^1 B^2 B_I \barwedge C_\lambda C^1 C^2 C_I \barwedge G_\lambda G^1 G^2 G_I$$

machen. Mit dieser linearen Lösung der Aufgabe 3 ist zugleich die lineare Lösung der reciproken Aufgabe 3′ gewonnen und somit ergeben sich die Sätze:

3. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn ein Systempunkt fest ist, und sechs Systempunkte gezwungen sind auf sechs festen Geraden zu bleiben.*

3′. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn eine Systemgerade fest ist, und sechs Systemgerade gezwungen sind durch sechs feste Punkte zu gehen.*

III. *Ein System S_I, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Punkte $A_I A$, sechs Punkte $BCDEFG$ in S und sechs Gerade $bcdefg$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $BCDEFG$ liegen.*

III′. *Ein System $\mathfrak{S}_I$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I \mathfrak{a}$, sechs Gerade $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{S}$ und sechs Punkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ gehen.*

Fallen 1, 2, 3 Paar Gerade in je einer Geraden und andererseits 1, 2, 3 Paar Punkte in je einem Punkt zusammen, so erhalten wir beziehlich die folgenden speciellen Sätze.

3_1. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) ein Systempunkt und eine Systemgerade fest und vier Systempunkte gezwungen sind auf vier festen Geraden zu bleiben,

$3_1'$. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) eine Systemgerade und ein Systempunkt fest und vier Systemgerade gezwungen sind durch vier feste Punkte zu gehen,

b) ein Systempunkt und zwei Systemgerade fest und zwei Systempunkte gezwungen sind auf zwei festen Geraden zu bleiben,

c) ein Systempunkt und drei Systemgeraden fest sind. ($1_1'$.)

III$_1$. Ein System S_I, welches einem ebenen System S collinear ist, ist bestimmt, wenn

a) zwei homologe Punkte $A_I A$, zwei homologe Gerade $\beta_I \beta$, vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $cdef$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen,

b) zwei homologe Punkte $A_I A$, zwei Paar homologe Gerade $\beta_I \beta$, $\gamma_I \gamma$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen,

c) zwei homologe Punkte $A_I A$ und drei Paar homologe Gerade $\beta_I \beta$, $\gamma_I \gamma$, $\delta_I \delta$ gegeben sind. (I$_1'$.)

b) eine Systemgerade und zwei Systempunkte fest und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen,

c) eine Systemgerade und drei Systempunkte fest sind. (1_1.)

III$_1'$. Ein System $\mathfrak{S}_I$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist bestimmt, wenn

a) zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I \mathfrak{a}$, zwei homologe Punkte $\mathsf{B}_I \mathsf{B}$, vier Gerade $\mathfrak{cdef}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{CDEF}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{cdef}$ gehen,

b) zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I \mathfrak{a}$, zwei Paar homologe Punkte $\mathsf{B}_I \mathsf{B}$, $\Gamma_I \Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{de}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{DE}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{de}$ gehen.

c) zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I \mathfrak{a}$ und drei Paar homologe Punkte $\mathsf{B}_I \mathsf{B}$, $\Gamma_I \Gamma$, $\Delta_I \Delta$ gegeben sind. (I$_1$.)

Für affin-veränderliche ebene Systeme folgen aus $3'$, 3_1, $3_1'$ und III$'$, III$_1$, III$_1'$ beziehlich die Sätze.

$3_I'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn sechs Systemgerade gezwungen sind durch sechs feste Punkte zu gehen.

3_2. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) ein Systempunkt fest ist, und vier Systempunkte gezwungen sind auf vier festen Geraden zu bleiben,

b) ein Systempunkt und eine Systemgerade fest und zwei Systempunkte gezwungen sind auf zwei festen Geraden zu bleiben,

c) ein Systempunkt und zwei Systemgerade fest sind.

$3_2'$. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) ein Systempunkt fest ist und vier Systemgerade gezwungen sind durch vier feste Punkte zu gehen,

b) zwei Systempunkte fest und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen,

c) drei Systempunkte fest sind.

III′. Ein System S_I, welches einem ebenen System S affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn sechs Gerade $\mathfrak{bcdefg}$ in $\mathfrak{S}$ und sechs Punkte $\mathfrak{BCDEFG}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{bcdefg}$ gehen.

III$_2$. Ein System S_I, welches einem ebenen System S affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) zwei homologe Punkte $A_I A$, vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $cdef$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen,

b) zwei homologe Punkte $A_I A$, zwei homologe Gerade $\beta_I\beta$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen,

c) zwei homologe Punkte $A_I A$, zwei Paar homologe Gerade $\beta_I\beta$, $\gamma_I\gamma$ gegeben sind.

III$_2$′. Ein System $\mathfrak{S}_I$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) zwei homologe Punkte $\mathsf{B}_I\mathsf{B}$, vier Gerade $\mathfrak{cdef}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{CDEF}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{cdef}$ gehen,

b) zwei Paar homologe Punkte $\mathsf{B}_I\mathsf{B}$, $\Gamma_I\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{de}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{DE}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{de}$ gehen,

c) drei Paar homologe Punkte $\mathsf{B}_I\mathsf{B}$, $\Gamma_I\Gamma$, $\Delta_I\Delta$ gegeben sind.

Aus $3_1'$, b), c) und III$_1'$, b), c) folgen für ähnliche ebene Systeme die Sätze:

$3_3'$. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) eine Systemgerade fest ist, und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen,

b) eine Systemgerade und ein Systempunkt fest ist.

III$_3'$. Ein System $\mathfrak{S}_I$, welches einem System $\mathfrak{S}$ ähnlich ist, ist bestimmt, wenn

a) zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}$, zwei Gerade $\mathfrak{de}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{DE}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{de}$ gehen,

b) zwei homologe Gerade $\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}$, zwei homologe Punkte $\Delta_I\Delta$ gegeben sind.

Es seien in einer Ebene sieben Gerade $abcdefg$ und in einem collinear-veränderlichen ebenen System S_I sieben Punkte $A_I B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ gegeben, die beziehlich auf diesen Geraden liegen. Auf der Geraden a nehmen wir zwei beliebige Punkte $A_{II} A_{III}$ an, und denken uns nach der vorhergegangenen Aufgabe 3. auf den sechs Geraden $bcdefg$ resp. die Punkte $B_{II} B_{III}$, $C_{II} C_{III}$, $D_{II} D_{III}$, $E_{II} E_{III}$, $F_{II} F_{III}$, $G_{II} G_{III}$ bestimmt, so dass $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II} E_{II} F_{II} G_{II}$ und $A_{III} B_{III} C_{III} D_{III} E_{III} F_{III} G_{III}$ homologe Punkte zweier Phasen S_{II}, S_{III} des collinear-veränderlichen Systems $A_I B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ sind. Die beiden Systeme S_I, S_{II} besitzen drei selbstentsprechende Punkte $\mathsf{AB\Gamma}$, von denen auch zwei imaginär sein können. Denken wir uns nun die Punkte $B_x C_x D_x E_x F_x G_x$ einer Systemphase S_x so bestimmt, dass die Punkte $\mathsf{AB\Gamma} A_{III} B_x C_x D_x E_x F_x G_x$ resp. den Punkten $\mathsf{AB\Gamma} A_I B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ homolog sind; dann liegen nach dem Satze B. auch die Punkte $B_x C_x D_x E_x F_x G_x$ beziehlich auf den Geraden $bcdefg$. Da nach dem Satze III. eine Phase $A_{III} B_{III} C_{III} D_{III} E_{III} F_{III} G_{III}$ des Systems $A_I B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ bestimmt ist, wenn der Punkt A_{III} dem Punkt A_I homolog ist, und die zu $B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ homologen Punkte $B_{III} C_{III} D_{III} E_{III} F_{III} G_{III}$ resp. auf den Geraden $bcdefg$ liegen, so sind die beiden Systemphasen S_{III} und S_x identisch. Demnach haben die drei Systemphasen $S_I S_{II} S_{III}$ drei gemeinsame selbstentsprechende Punkte $\mathsf{AB\Gamma}$ und daraus ergeben sich die Sätze:

γ. *Bewegen sich sieben Systempunkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems auf sieben Geraden, so sind drei Systempunkte fest, und alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den drei durch die drei festen Punkte bestimmten festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Kegelschnitte, welche die festen Systemgeraden berühren.*

γ'. *Drehen sich sieben Systemgerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems um sieben Punkte, so sind drei Systemgerade fest, und alle beweglichen Systemgerade erzeugen collineare Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen nach den drei durch die drei festen Geraden bestimmten festen Systempunkten gehen, und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kegelschnitte, welche die festen Systempunkte enthalten.*

Fallen in diesen Sätzen beziehlich 1, 2, 3 Paar Gerade in je einer Geraden und 1, 2, 3 Paar Punkte in je einem Punkt zusammen, dann folgen hieraus die speciellen Sätze:

γ_1. Bewegen sich von einem collinear-veränderlichen ebenen System

γ_1'. Drehen sich von einem collinear-veränderlichen ebenen System

a) fünf Systempunkte auf fünf Geraden und ist eine Systemgerade fest,
b) drei Systempunkte auf drei Geraden und sind zwei Systemgerade fest,
c) ein Systempunkt auf einer Geraden und sind drei Systemgerade fest,

so sind drei Systempunkte fest und alle beweglichen Systempunkte erzeugen collineare gerade Punktreihen etc.

a) fünf Systemgerade um fünf Punkte und ist ein Systempunkt fest,
b) drei Systemgerade um drei Punkte und sind zwei Systempunkte fest,
c) eine Systemgerade um einen Punkt und sind drei Systempunkte fest,

so sind drei Systemgerade fest und alle beweglichen Systemgeraden erzeugen collineare Strahlenbüschel etc.

Liegt eine der festen Systemgeraden im Unendlichen, so folgt aus dem Satze γ_1:

γ_2. Bewegen sich von einem affin-veränderlichen ebenen System
a) fünf Systempunkte auf fünf Geraden,
b) drei Systempunkte auf drei Geraden und ist eine Systemgerade fest,
c) ein Systempunkt auf einer Geraden und sind zwei Systemgerade fest,

so erzeugen alle beweglichen Systempunkte ähnliche gerade Punktreihen, welche von zwei festen Systemgeraden in entsprechenden Punkten getroffen werden und alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Parabel, welche die beiden festen Systemgeraden berühren.

Für ähnlich-veränderliche ebene Systeme ergeben sich aus γ_1', b), c) die Sätze:

γ_3'. Drehen sich drei Gerade eines ähnlich-veränderlich ebenen Systems um drei Punkte, so ist ein Systempunkt fest, alle Systemgerade erzeugen congruente Strahlenbüschel und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kreise, welche durch den festen Systempunkt gehen.

γ_4'. Dreht sich eine Systemgerade eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems um einen Punkt und ist ein Systempunkt fest, so erzeugen alle Systemgerade congruente Strahlbüschel und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Kreise, welche durch den festen Punkt gehen.

§ 5.

Nach der vorangegangenen Vorbereitung können wir nun auch mittelst der Aufgaben 3, 3' und der abgeleiteten Sätze γ, γ' die folgenden Aufgaben lösen, welche das Hauptziel unserer Abhandlung bilden.

Aufgabe 4. *Acht Punkte $ABCDEFG$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems S sind gegeben, es soll eine Phase S_0 desselben bestimmt werden, deren homologe Punkte resp. auf acht gegebenen Geraden $abcdefgh$ liegen.*

Aufgabe 4'. *Acht Gerade $\mathfrak{abcdefgh}$ eines collinear-veränderlichen ebenen Systems $\mathfrak{S}$ sind gegeben, es soll eine Phase $\mathfrak{S}_0$ desselben bestimmt werden, deren homologe Geraden resp. durch acht gegebene Punkte $\mathfrak{ABCDEFGH}$ gehen.*

Wir nehmen auf der Geraden a zwei Punkte $A_I A_{II}$ beliebig an und bestimmen nach der Aufgabe 3. auf den Geraden $bcdefg$ resp. die Punkte $B_I B_{II}$, $C_I C_{II}$, $D_I D_{II}$, $E_I E_{II}$, $F_I F_{II}$, $G_I G_{II}$, so dass $A_I B_I C_I D_I E_I F_I G_I$ und $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II} E_{II} F_{II} G_{II}$ homologe Punkte zweier Phasen $S_I S_{II}$ des collinear-veränderlichen Systems $ABCDEFG$ sind; ferner bestimmen wir in diesen Phasen $S_I S_{II}$ die Punkte $H_I H_{II}$, die dem Punkt H in S homolog sind, und ziehen die durch $H_I H_{II}$ gehende Gerade h_H, welche die Gerade h im Punkt H_0 trifft. Hierauf bestimmen wir auf den Geraden $bcdefg$ nach der Aufgabe 3 die Punkte $B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0$, so dass $B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0$ homologe Punkte einer Phase S_0 des collinear-veränderlichen Systems $BCDEFGH$ sind, und ermitteln den zu A homologen Punkt A_0 des Systems S_0, der nach dem Satze γ auf der Geraden a liegen muss. Dann ist S_0 die gesuchte Phase, deren acht Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0$ resp. auf den acht gegebenen Geraden $abcdefgh$ liegen. Aus dieser linearen Lösung der Aufgabe 4 ergiebt sich zugleich die lineare Lösung der reciproken Aufgabe 4' und wir erhalten demnach die Sätze:

4. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn acht Systempunkte gezwungen sind auf acht festen Geraden zu bleiben.*

4'. *Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn acht Systemgerade gezwungen sind durch acht feste Punkte zu gehen.*

IV. *Ein System S_0, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn acht Punkte $ABCDEFGH$ in S und acht Gerade $abcdefgh$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $ABCDEFGH$ liegen.*

IV'. *Ein System $\mathfrak{S}_0$, welches einem ebenen System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn acht Gerade $\mathfrak{abcdefgh}$ in $\mathfrak{S}$ und acht Punkte $\mathfrak{ABCDEFGH}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{abcdefgh}$ gehen.*

Fallen in diesen Sätzen beziehlich 1, 2, 3, 4 Paar Gerade in je einer Geraden und 1, 2, 3, 4 Paar Punkte in je einem Punkt zusammen, dann erhalten wir die folgenden speciellen Sätze:

4_1. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) eine Systemgerade fest ist, und sechs Systempunkte gezwungen sind auf sechs festen Geraden zu bleiben,
b) zwei Systemgerade fest und vier Systempunkte gezwungen sind auf vier festen Geraden zu bleiben,
c) drei Systemgerade fest und zwei Systempunkte gezwungen sind auf zwei festen Geraden zu bleiben (1.),
d) vier Systemgerade fest sind.

$4_1'$. Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) ein Systempunkt fest ist, und sechs Systemgerade gezwungen sind durch sechs feste Punkte zu gehen,
b) zwei Systempunkte fest und vier Systemgerade gezwungen sind durch vier feste Punkte zu gehen,
c) drei Systempunkte fest und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen (1'.),
d) vier Systempunkte fest sind.

IV_1. Ein System S_0, welches einem ebenen System S collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) zwei homologe Gerade $\alpha_0\alpha$, sechs Punkte $ABCDEFG$ in S und sechs Gerade bcd efg gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $BCDEFG$ liegen,
b) zwei Paar homologe Gerade $\alpha_0\alpha$, $\beta_0\beta$, vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $cdef$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen,
c) drei Paar homologe Gerade $\alpha_0\alpha$, $\beta_0\beta$, $\gamma_0\gamma$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen (I.),
d) vier Paar homologe Gerade $\alpha_0\alpha$, $\beta_0\beta$, $\gamma_0\gamma$, $\delta_0\delta$ gegeben sind.

IV_1'. Ein System $\mathfrak{S}_0$, welches einem System $\mathfrak{S}$ collinear ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) zwei homologe Punkte $\mathsf{A}_0\mathsf{A}$, sechs Gerade $\mathfrak{bcdefg}$ in $\mathfrak{S}$ und sechs Punkte $\mathfrak{BCDEFG}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{bcdefg}$ gehen,
b) zwei Paar homologe Punkte $\mathsf{A}_0\mathsf{A}$, $\mathsf{B}_0\mathsf{B}$, vier Gerade $\mathfrak{cdef}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{CDEF}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden $\mathfrak{cdef}$ gehen,
c) drei Paar homologe Punkte $\mathsf{A}_0\mathsf{A}$, $\mathsf{B}_0\mathsf{B}$, $\Gamma_0\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{de}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{DE}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{de}$ gehen (I'.),
d) vier Paar homologe Punkte $\mathsf{A}_0\mathsf{A}$, $\mathsf{B}_0\mathsf{B}$, $\Gamma_0\Gamma$, $\Delta_0\Delta$ gegeben sind.

Liegt eine feste Systemgerade im Unendlichen, so folgt aus dem Satze 4_1:

4_2. Ein affin-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) sechs Systempunkte gezwungen sind auf sechs festen Geraden zu bleiben,
b) eine Systemgerade fest ist, und vier Systempunkte gezwungen sind auf vier festen Geraden zu bleiben,
c) zwei Systemgerade fest und zwei Systempunkte gezwungen sind auf zwei festen Geraden zu bleiben,
d) drei Systemgerade fest sind.

Fallen zwei homologe Gerade $\alpha_0 \alpha$ im Unendlichen zusammen, so ergiebt sich aus IV_1:

IV_2. Ein System S_0, welches einem ebenen System S affin ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) sechs Punkte $BCDEFG$ in S und sechs Gerade $bcdefg$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $BCDEFG$ liegen,
b) zwei homologe Gerade $\beta_0 \beta$, vier Punkte $CDEF$ in S und vier Gerade $cdef$ gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von $CDEF$ liegen,
c) zwei Paar homologe Gerade $\beta_0 \beta$, $\gamma_0 \gamma$, zwei Punkte DE in S und zwei Gerade de gegeben sind, auf denen resp. die homologen Punkte von DE liegen,
d) drei Paar homologe Gerade $\beta_0 \beta$, $\gamma_0 \gamma$, $\delta_0 \delta$ gegeben sind.

Sind in $4_1'$, b), c), d) zwei feste Systempunkte imaginär und fallen dieselben mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, so folgt:

$4_2'$. Ein ähnlich-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, wenn

a) vier Systemgerade gezwungen sind durch vier feste Punkte zu gehen,
b) ein Systempunkt fest ist, und zwei Systemgerade gezwungen sind durch zwei feste Punkte zu gehen,
c) zwei Systempunkte fest sind.

Sind in IV_1', b), c), d) $\mathsf{A}_0\mathsf{A}$, $\mathsf{B}_0\mathsf{B}$ imaginäre selbstentsprechende Punkte und fallen dieselben beziehlich mit den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, so ergiebt sich:

IV_2'. Ein System $\mathfrak{S}_0$, welches einem ebenen System ähnlich ist, ist im Allgemeinen bestimmt, wenn

a) vier Gerade $\mathfrak{cdef}$ in $\mathfrak{S}$ und vier Punkte $\mathfrak{CDEF}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{cdef}$ gehen,

b) zwei homologe Punkte $\Gamma_0\Gamma$, zwei Gerade $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{S}$ und zwei Punkte $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ gegeben sind, durch die resp. die homologen Geraden von $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ gehen,

c) zwei Paar homologe Punkte $\Gamma_0\Gamma$, $\Delta_0\Delta$ gegeben sind.

Es ist nicht unsere Absicht die vielen geometrischen Beziehungen, welche sich durch einfache Combination aus unseren Darlegungen ergeben, hier anzuführen und daher wollen wir nur noch die folgende kurz andeuten.

Wenn sich sieben Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems auf sieben Geraden bewegen, so sind nach dem Satze γ. drei Systempunkte PQR fest, von denen auch zwei imaginär sein können, und nach dem Satze A. sind dann die sieben Geraden mit den auf ihnen liegenden Punkten einer Systemphase entsprechende Elemente in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Systempunkte PQR als selbstentsprechende Punkte besitzen. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz, neben dem man auch leicht den reciproken Satz niederschreiben kann:

Sind $ABCDEFG$ sieben Punkte, welche beziehlich auf sieben in einer Ebene befindlichen Geraden $abcdefg$ liegen, so giebt es im Allgemeinen drei Punkte PQR, welche die Eigenschaft haben, dass die sieben Strahlenbüschel

$$A(PQRa),\quad B(PQRb),\quad C(PQRc),\quad D(PQRd),\quad E(PQRe),$$
$$F(PQRf),\quad G(PQRg)$$

collinear sind.

Das von Herrn Chasles angeregte sogenannte Problem der Projectivität, welches von Herrn R. Sturm*) in umfassender Weise behandelt worden ist, erhält zunächst für die Ebene eine höhere Allgemeinheit und lautet:

Zu zwei Gruppen von gleicher Anzahl zugeordneter Punkte einer Ebene zwei entsprechende collineare ebene Systeme zu finden, in denen homologe Gerade resp. durch zugeordnete Punkte gehen.

Wenn in jeder Gruppe acht Punkte gegeben sind, giebt es nach dem Satze IV'. unendlich viele Paare entsprechender Systeme, deren Lage und Gestalt noch ganz willkürlich ist; daher muss sich, wenn die Aufgabe Bestimmtheit erlangen soll, die Anzahl der Punkte noch sehr erhöhen. Es fragt sich nun wie gross diese Anzahl Punkte ist, wie viel Paare entsprechender collinearer Systeme es giebt und welche gegenseitige Lage die durch die zugeordneten Punkte gehenden Geraden in den Systemen erhalten.

*) Das Problem der Projectivität etc. Mathem. Annalen Bd. I, S. 533.

Constructive Ausführung specieller Aufgaben.

§ 6.

Nach den vorangegangenen Darlegungen können wir in den behandelten acht allgemeinen Aufgaben die Construction des Resultates linear ausführen; wenn wir aber diese Aufgaben dadurch specialisiren, dass wir unendlich ferne Elemente in unsere Betrachtung aufnehmen, so ist die constructive Bestimmung des Resultates nur mittelst Lineal und Zirkel, beziehungsweise Parallelziehens, erreichbar, und daher erfordern die analogen Aufgaben für affin-veränderliche und ähnlich-veränderliche ebene Systeme eine besondere Behandlung.

Aufgabe 5. *Sechs Punkte $ABCDEF$ eines affin-veränderlichen ebenen Systems S sind gegeben, es soll eine Phase S_0 desselben bestimmt werden, deren homologe Punkte resp. auf sechs gegebenen Geraden $abcdef$ liegen.* (Fig. 1, auf der beigegebenen Tafel.)

Durch den Punkt F des gegebenen Systems ziehen wir die Geraden FC, FD, welche die Gerade AB resp. in den Punkten γ, δ treffen, ferner verlängern wir die Geraden EF, ED, welche die Gerade AB beziehlich in den Punkten ε, ζ schneiden. Auf den Geraden abf nehmen wir resp. die Punkte A_1B_1F' als homologe Punkte von ABF beliebig an, und machen $\gamma_1\delta_1A_1B_1 \backsim \gamma\delta AB$. Bewegt sich der Punkt F' auf der Geraden f, während A_1, B_1 fest sind, so bleiben alle auf der Geraden A_1B_1 liegenden Punkte des affin-veränderlichen Systems A_1B_1F' fest und alle beweglichen Systempunkte beschreiben Gerade, welche zu f parallel sind. Auf der Geraden γ_1F' machen wir $\gamma_1F'C' \backsim \gamma FC$, führen $C'C_1$ parallel f, ziehen durch den Schnittpunkt C_1, welchen diese Parallele mit c bildet, die Gerade γ_1C_1, die f in F_1 trifft.

Dann liegen die vier Punkte $A_1B_1C_1F_1$ einer Phase S_1 des Systems S resp. auf den vier Geraden $abcf$. Ferner bestimmen wir in S_1 den Punkt D_1, der D entspricht, indem wir $\delta_1F_1D_1 \backsim \delta FD$ machen.

Hierauf nehmen wir wieder auf den Geraden ab beziehlich die Punkte A_2B_2 beliebig an, machen $\gamma_2\delta_2A_2B_2 \backsim \gamma\delta AB$, bestimmen in gleicher Weise mittelst γ_2, δ_2 die Punkte $C_2F_2D_2$; und schliesslich nehmen wir zum dritten Male auf a, b resp. die Punkte A_3B_3 beliebig an, machen $\gamma_3\delta_3A_3B_3 \backsim \gamma\delta AB$ und bestimmen mittels γ_3, δ_3 die Punkte $C_3F_3D_3$.

Wir ziehen dann die Geraden D_1D_2, D_2D_3, D_3D_1, welche die Gerade d resp. in den Punkten D^3, D^1, D^2 treffen, und bestimmen auf den Geraden abf resp. die Punkte A^1A^2, B^1B^2, F^1F^2 und controlweise die Punkte A^3, B^3, F^3, so dass

$$A_2A^1A_3 \sim B_2B^1B_3 \sim F_2F^1F_3 \sim D_2D^1D_3,$$
$$A_3A^2A_1 \sim B_3B^2B_1 \sim F_3F^2F_1 \sim D_3D^2D_1,$$
$$A_1A^3A_2 \sim B_1B^3B_2 \sim F_1F^3F_2 \sim D_1D^3D_2$$

ist.

Hierauf machen wir:

$$\varepsilon^1A^1B^1\zeta^1 \sim \varepsilon^2A^2B^2\zeta^2 \sim \varepsilon^3A^3B^3\zeta^3 \sim \varepsilon AB\zeta$$

und ziehen die Geradenpaare ε^1F^1, ζ^1D^1; ε^2F^2, ζ^2D^2; ε^3F^3, ζ^3D^3, welche sich beziehlich in den Punkten $E^1E^2E^3$ schneiden.

Denken wir uns noch die Punkte $C^1C^2C^3$ construirt, ohne die Construction wirklich auszuführen, dann liegen die fünf homologen Punkte $A^1B^1C^1D^1F^1$, $A^2B^2C^2D^2F^2$, $A^3B^3C^3D^3F^3$ der drei mit $ABCDF$ affinen Systeme resp. auf den Geraden $abcdf$ und nach dem Satze γ_2, a) befinden sich auch $E^1E^2E^3$ auf einer Geraden e_E, welche die Gerade e im Punkte E_0 schneidet, und da die Gerade e_E durch zwei Punkte E^1E^2 bestimmt ist, so bildet der dritte Punkt E^3 eine Controle für die Richtigkeit der Zeichnung. Bestimmen wir nun auf den Geraden ab die Punkte A_0, B_0, indem wir $A^1A_0A^2 \sim B^1B_0B^2 \sim E^1E_0E^2$ machen, so ist nach Specialisirung des Satzes C.) durch die Punkte $A_0B_0E_0$ die gesuchte Phase S_0 des affin-veränderlichen Systems S bestimmt, deren Punkte $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ resp. auf den Geraden $abcdef$ liegen und wir erhalten die Punkte C_0D_0, indem wir $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ affin $ABCDEF$ machen. Die Phase S_0 ist hiernach eindeutig bestimmt, wenn die Gerade e_E nicht mit der Geraden e zusammenfällt.

Aufgabe 5′. *Sechs Gerade* $\mathfrak{abcdef}$ *eines affin-veränderlichen ebenen Systems* $\mathfrak{S}$ *sind gegeben, es soll eine Phase* $\mathfrak{S}_0$ *desselben bestimmt werden, deren homologe Geraden resp. durch sechs gegebene Punkte* $\mathfrak{ABCDEF}$ *gehen.*

Diese Aufgabe kann indirect in folgender Weise durch die vorhergehende Aufgabe gelöst werden. Wir construiren auf den sechs Geraden $\mathfrak{abcdef}$ resp. die sechs Punkte $\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0\mathfrak{C}^0\mathfrak{D}^0\mathfrak{E}^0\mathfrak{F}^0$, so dass diese den gegebenen Punkten $\mathfrak{ABCDEF}$ affin entsprechen, und bestimmen hierauf die Geraden $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0\mathfrak{e}_0\mathfrak{f}_0$, indem wir $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0\mathfrak{e}_0\mathfrak{f}_0\mathfrak{ABC}\ldots$ affin $\mathfrak{abcdef}\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0\mathfrak{C}^0\ldots$ machen.

§ 7.

Aufgabe 6. *Vier Punkte* $ABCD$ *eines ähnlich-veränderlichen Systems* S *sind gegeben, es soll eine Phase* S_0 *desselben bestimmt werden, deren homologe Punkte resp. auf vier gegebenen Geraden* $abcd$ *liegen* (Fig. 2).

Um diese Aufgabe in allgemeiner Form zu lösen, nehmen wir auf zweien der gegebenen Geraden, etwa auf a und b beziehlich die Punkte A_1B' beliebig an und machen $A_1B'C' \sim ABC$. Bewegt sich

B' auf b, während A_1 auf a fest bleibt, so beschreibt der Punkt C' des ähnlich-veränderlichen Dreiecks $A_1 B' C'$ eine Gerade $C' C_1$, welche c in einem Punkte C_1 trifft und deren Richtung wir erhalten, wenn wir $\sphericalangle C_1 C' A_1 = \sphericalangle b B' A_1$ machen. Bestimmen wir den Punkt D_1, so dass $A_1 C_1 D_1 \sim ABC$ ist, und denken wir uns noch den auf b liegenden Punkt B_1 ermittelt, so dass $A_1 B_1 C_1 \sim ABC$ ist, ohne diese Construction auszuführen; dann ergiebt sich, dass von dem mit $ABCD$ ähnlichen System $A_1 B_1 C_1 D_1$ die drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ resp. auf den Geraden abc liegen. Dieselbe Construction wiederholen wir noch einmal, indem wir wieder auf den Geraden a, b resp. die Punkte A_2, B'' beliebig annehmen, das Dreieck $A_2 B'' C'' \sim ABC$, den Winkel $C_2 C'' A_2 = \sphericalangle b B'' A_2$ und $A_2 C_2 D_2 \sim ACD$ machen. Hierauf ziehen wir die Gerade $D_1 D_2$, welche die Gerade in dem Punkt D_0 schneidet, bestimmen die Punkte A_0, B_0, C_0, resp. auf den Geraden abc, so dass

$$A_1 A_0 A_2 \sim B_1 B_0 B_2 \sim C_1 C_0 C_2 \sim D_1 D_0 D_2$$

ist, dann ist nach Specialisirung des Satzes C.) $A_0 B_0 C_0 D_0 \sim ABCD$ und folglich giebt es, wenn die Gerade $D_1 D_2$ nicht mit der Geraden d zusammenfällt, nur ein einziges mit $ABCD$ ähnliches ebenes System $A_0 B_0 C_0 D_0$, dessen vier Punkte beziehlich auf den vier Geraden $abcd$ liegen. Es genügt auch, wenn wir nur $A_1 A_0 A_2 \sim D_1 D_0 D_2$ machen, denn durch die zwei Punkte A_0, D_0 ist das gesuchte ähnliche System S_0 schon bestimmt, und wenn wir dann $A_0 B_0 C_0 D_0 \sim ABCD$ machen, so müssen auch die beiden anderen Punkte $B_0 C_0$ resp. auf den beiden Geraden b, c liegen.

Die eben ausgeführte Construction vereinfacht sich, wenn wir in Fig. 3 den Punkt A_1 in den Schnittpunkt der beiden Geraden a, b legen; wir erhalten dann den auf c liegenden Punkt C_1, indem wir $\sphericalangle C_1 A_1 b = \sphericalangle CAB$ machen. Ferner legen wir auch den Punkt B_2 in den genannten Schnittpunkt, bestimmen $\sphericalangle a B_2 C_2 = \sphericalangle ABC$ und machen $A_1 C_1 D_1 \sim ACD$ und $B_2 C_2 D_2 \sim BCD$. Hierauf ziehen wir die Gerade $D_1 D_2$, welche d in D_0 trifft und bestimmen auf der Geraden c den Punkt C_0, so dass $C_1 C_0 C_2 \sim D_1 D_0 D_2$ ist, dann sind $C_0 D_0$ zwei der gesuchten Punkte, durch welche das mit $ABCD$ ähnliche Viereck $A_0 B_0 C_0 D_0$ bestimmt ist.

Diese Construction des Punktes D_0 ist schon von Newton*) ausgeführt; den zweiten Punkt C_0 bestimmt Newton aber durch Vermittelung eines ähnlich-veränderlichen Dreiecks, welche nach unserer Betrachtung sich allgemeiner in folgender Weise gestaltet. Wir nehmen auf der Geraden a einen beliebigen Punkt A^I an, machen $D_0 A^I C^I \sim DAC$, ziehen $C^I C_0$ so dass $\sphericalangle C_0 C^I D_0 = a A^I D_0$ ist.

*) Philosophiae naturalis principia mathematica. MDCCLX, p. 256.

Eine andere einfache Construction ergiebt sich, wenn wir in Fig. 4 wieder A_1 in den Schnittpunkt der Geraden a, b, und C_2 in den Schnittpunkt der Geraden b, c legen, dann $\sphericalangle C_1A_1b = \sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle A_2C_2b = \sphericalangle ACB$ machen, ferner D_1, D_2 so construiren, dass die beiden Dreiecke $A_1C_1D_1$ und $A_2C_2D_2$ dem Dreieck ACD ähnlich sind und die Gerade D_1D_2 ziehen, welche d im Punkte D_0 trifft. Auf den Geraden a und c erhalten wir die Punkte A_0, C_0, indem wir $A_1A_0A_2 \backsim C_1C_0C_2 \backsim D_1D_0D_2$ machen und der vierte auf b liegende Punkt B_0 ergiebt sich dadurch, dass $A_0B_0C_0D_0 \backsim ABCD$ ist.*)

Für den speciellen Fall, wenn die vier Punkte $ABCD$, wie in Fig. 5 in einer Geraden liegen, vereinfachen sich alle diese Constructionen ganz besonders, und wir wollen nur noch die folgende ausführen.

Wir machen auf der Geraden b, welche a und c resp. in A_1 und C_1 trifft, $A_1C_1D_1 \backsim ACD$, und auf der Geraden a, welche b, c resp. in B_2, C_2 schneidet, $B_2C_2D_2 \backsim BCD$, dann bestimmt die Gerade D_1D_2 auf d den Punkt D_0. Nehmen wir nun auf dieser Geraden $D_0B_IA_I \backsim DBA$ und ziehen A_IA_0 parallel b, so erhalten wir den Punkt A_0, der mit D_0 verbunden die gesuchte Gerade liefert, auf der $A_0B_0C_0D_0 \backsim ABCD$ ist. Controlweise können wir auch noch den auf D_1D_2 liegenden Punkt D_3 bestimmen, wenn wir $A_3B_3D_3 \backsim ABD$ machen, und hieraus folgt dann beiläufig bemerkt der bekannte Satz des Menelaus von Alexandrien, dass

$$\frac{A_3D_2 \cdot B_2D_1 \cdot C_1D_3}{D_2B_2 \cdot D_1C_1 \cdot D_3A_3} = -1$$

ist.

Aufgabe 6'. *Vier Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems $\mathfrak{S}$ sind gegeben, es soll eine Phase $\mathfrak{S}_0$ desselben bestimmt werden, deren homologe Geraden resp. durch vier gegebene Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehen.*

Eine indirecte Lösung dieser Aufgabe ist in dem Vorhergehenden enthalten; denn wir brauchen nur auf den Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ beziehlich die Punkte $\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0\mathfrak{C}^0\mathfrak{D}^0 \backsim \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ zu bestimmen und dann die Figur $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0\mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots$ ähnlich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0\ldots$ zu machen, dann ist durch die Geraden $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0$ die gesuchte Phase $\mathfrak{S}_0$ gegeben.

Eine directe Lösung dieser Aufgabe können wir aber auch leicht in folgender Weise ausführen. In Fig. 6. sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die gegebenen Punkte und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die gegebenen Geraden des ähnlich-veränderlichen Systems $\mathfrak{S}$, welche sich in den Punkten $HIKL$ schneiden. Wir beschreiben über $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als Sehne einen Kreis h, der des Winkels $\mathfrak{a}H\mathfrak{b}$

*) Eine sehr umständliche Lösung und Construction dieser Aufgabe ist von Herrn Laisant in seiner Uebersetzung der „Exposition de la méthode des équipollences par Bellavitis." Paris 1874 gegeben.

fähig ist, ziehen von einem beliebigen Peripheriepunkt H_1 die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, ferner von $\mathfrak{C}$ die Gerade $\mathfrak{C}I_1$, so dass der Winkel $\mathfrak{C}I_1H_1 = \sphericalangle\, \mathfrak{c}I\mathfrak{b}$ ist und machen $H_1I_1K_1L_1 \sim HIKL$. Durch diese gleichsinnige Aehnlichkeit ist dann der Kreis h, sowie der Punkt K_1 eindeutig bestimmt. Bewegt sich der Punkt H_1 auf dem Kreis h, während die drei Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ des ähnlich-veränderlichen Systems $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ beziehlich durch die drei festen Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gehen, so beschreibt auch I_1 einen durch die Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gehenden Kreis i, und denken wir uns die Gerade H_1K_1 gezogen, so dreht sich dieselbe während dieser Bewegung um den zweiten Schnittpunkt, welchen sie mit dem Kreis h bildet. Gelangt der Punkt H_1 in den Schnittpunkt Ω der beiden Kreise h, i, dann schrumpft das ähnlich-veränderliche Punktsystem $H_1I_1K_1L_1$ in den Punkt Ω zusammen. Demnach drehen sich alle Systemgerade des ähnlich-veränderlichen Systems um feste Punkte und alle beweglichen Systempunkte desselben bewegen sich auf Kreisen, die durch den Punkt Ω gehen. Diese hiermit begründete Beziehung ist auch durch Satz γ_3'. gegeben. Beschreiben wir den Kreis k, der durch die Punkte $K_1\Omega\mathfrak{C}$ geht und der andererseits die Gerade $\mathfrak{d}_1$ oder K_1L_1 im Punkt Δ schneidet, so ist Δ der feste Punkt um den sich die Gerade $\mathfrak{d}_1$ dreht. Ziehen wir hierauf die Gerade $\Delta\mathfrak{D}$, welche den Kreis k in K_0 trifft, ferner $K_0\mathfrak{C}$, die dem Kreis i in I_0 begegnet, so ist durch die Punkte K_0I_0 das mit $HIKL$ ähnliche System $H_0I_0K_0L_0$, dessen Geraden $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0$ resp. durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehen, bestimmt, und durch die Gerade $\mathfrak{B}I_0$ ergiebt sich der Punkt H_0 auf dem Kreis h, durch die Gerade $H_0\mathfrak{A}$ der Punkt L_0 auf der Geraden $\mathfrak{d}_0$. Das Resultat unserer Lösung ist hiernach eindeutig bestimmt, wenn der Punkt Δ nicht mit $\mathfrak{D}$ zusammenfällt. Liegt der Punkt $\mathfrak{D}$ auf der Geraden $\Delta\Omega$, dann schrumpft das ähnlich-veränderliche Punktsystem in den Punkt Ω zusammen und die Geraden $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0$ schneiden sich im Punkt Ω.

Ueber Integration und Differentiation infinitärer Relationen.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

Wenngleich ich binnen Kurzem die elementaren Rechnungsregeln des Infinitärcalcüls eingehend zu begründen und namentlich den Gültigkeitsbezirk der neuen Rechnungsart schärfer abzugrenzen Veranlassung haben werde, so möchte ich doch sogleich eine unlängst erschienene Mittheilung des Hrn. Stolz über Grenzwerthe von Functionsquotienten*) durch einige Bemerkungen von meinem Standpunkte aus vervollständigen.

Hr. Stolz beschäftigt sich zwar eben mit dem *Grenzwerthe* eines Bruchs $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dessen Argument x unendlich wird, während diese Grenzwerthe, wie ich ausdrücklich erklärt habe**), nicht Gegenstand des Infinitärcalcüls sind. Indessen lassen sich die Methoden, welche ich einmal angab***), mit Leichtigkeit dazu verwenden, dass man auch die Grenzwerthe der Brüche $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ mit einander vergleichen kann, und zwar unter entschieden weniger beschränkenden Voraussetzungen, als bei Hrn. Stolz, dessen Satz über die Gleichheit der Grenzwerthe von $\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ und $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ mir übrigens vollkommen neu war, und den er durch geschickte Benutzung eines von Cauchy zu ähnlichem Zwecke ersonnenen Kunstgriffs beweist. Auch ich glaube, dass dieser Satz in der Reihentheorie zu verwerthen sein wird, wie ich auch schon weiter unten davon eine anderweitige Anwendung mache.

1.

Integration der infinitären Relationen.

Die infinitären Relationen zwischen zwei Functionen $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ sind:

---

*) Ueber die Grenzwerthe der Quotienten, diese Annalen Bd. XIV, p. 231.

**) Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, Annali di Matematica, Ser. II, Tom. IV, p. 338.

***) Diese Annalen Bd. XI, p. 373, Anm.

1. $u \sim v$ (sagt aus: $\lim \frac{u}{v}$ ist weder Null noch unendlich),

2. $\left.\begin{array}{l} u \succ v \\ v \prec u \end{array}\right\}$ (sagt aus: $\lim \frac{u}{v}$ ist positiv unendlich oder negativ unendlich und $\lim \frac{v}{u}$ ist Null).

Entsprechend schreibe ich $u \prec 1$ statt $\lim u = 0$, und $u \succ 1$ statt $\lim u = +\infty$ oder $= -\infty$.

Suchen wir zunächst möglichst allgemeine ausreichende Bedingungen für die Integration der Gleichheit

$$u \sim v$$

unter der Annahme $u, v \gtrless 1$. Es sei $\frac{u}{v} = w = \psi(x)$. Wir haben dann:

$$\int_a^x u\,d\alpha = \int_a^x v w\,d\alpha,$$

wenn ich, wie auch sonst in meinen Abhandlungen, die Integrationsveränderliche mit α bezeichne. Weiter wollen wir festsetzen, dass im Falle $u \prec 1$

$$\int_a^x u\,d\alpha \succsim 1$$

und für $x = \infty$ nie unbestimmt sei. Endlich soll v von $x = a$ an sein Zeichen nicht ändern.

Dann ist, falls $w \sim 1$, auch

$$\int_a^x v\,d\alpha \succsim 1$$

und in beiden Fällen hat man:

$$\int_a^x u\,d\alpha \sim \int_a^x v\,d\alpha$$

als Folge von $u \sim v$. Doch der Fall $\int_a^x u\,d\alpha \sim \int_a^x v\,d\alpha \sim 1$ hat kein Interesse, sondern unter der Annahme $u \sim v \prec 1$, muss, im Falle

$$\int_a^\infty u\,d\alpha$$

endlich und bestimmt ist,

$$\int_x^\infty u\,d\alpha \prec 1$$

eingeführt werden. Unter Benutzung von w findet man gleichfalls

$$\int_x^\infty u\,d\alpha \sim \int_x^\infty v\,d\alpha.$$

Der Satz lautet also:

Wenn die Functionen u, v den Relationen

$$u,\ v \gtrless 1, \quad u \sim v$$

genügen, wenn von einem Werth von x an v sein Zeichen nicht wechselt, und im Falle $u \prec 1$

$$\int_a^x u\,d\alpha \stackrel{\sim}{\gtrless} 1$$

ist, hat man:

$$\int_a^x u\,d\alpha \sim \int_a^x v\,d\alpha,$$

oder, fa. lies einen Sinn hat:

$$\int_x^\infty u\,d\alpha \sim \int_x^\infty v\,d\alpha.$$

2.

Vergleichung der Grenzwerthe der Quotienten der Functionen mit denen ihrer Integrale.

Es ist leicht zu zeigen, *dass, wenn man noch die Bedingung hinzufügt:* $\lim\left(\frac{u}{v} = w = \psi(x)\right)$ *soll bestimmt sein, sich*

$$\lim \frac{\int_a^x u\,d\alpha}{\int_a^x v\,d\alpha} = \lim \frac{u}{v} \quad \text{oder} \quad \lim \frac{\int_x^\infty u\,d\alpha}{\int_x^\infty v\,d\alpha} = \lim \frac{u}{v}$$

unter den nämlichen Bedingungen für u und v, wie oben, ergiebt.

Denn setzen wir zunächst

$$\int_x^\infty u\,d\alpha = \int_x^\infty v w\,d\alpha,$$

oder, weil v positiv angenommen wird:

$$\int_x^\infty u\,d\alpha = \psi(\xi)\int_x^\infty v\,d\alpha, \qquad x \leq \xi \leq \infty,$$

so folgt aus der Bestimmtheit von $\psi(x) \sim 1$:

$$\lim \frac{\int_x^\infty u\,d\alpha}{\int_x^\infty v\,d\alpha} = \lim \frac{u}{v} = \psi(\infty).$$

Ist weiter $\int_a^x u\,d\alpha \succ 1$, u wird statt

$$\int_a^x u\,d\alpha = \int_a^x vw\,d\alpha$$

geschrieben:

$$\int_a^x u\,d\alpha = \left\{\int_a^\varkappa vw\,d\alpha - \psi(\xi)\int_a^\varkappa v\,d\alpha\right\} + \psi(\xi)\int_a^x v\,d\alpha, \qquad \varkappa \leqq \xi \leqq x,$$

so können wir $\varkappa$ so langsam zugleich mit x unendlich werden lassen, dass der Term in der Klammer beliebig weit hinter $\int_a^x v\,d\alpha$ zurückbleibt, woraus abermals folgt:

$$\lim \frac{\int_a^x u\,d\alpha}{\int_a^x v\,d\alpha} = \lim \frac{u}{v} = \psi(\infty),$$

wie behauptet wurde.

Es lassen sich die Bedingungen für diesen Satz noch etwas erweitern. Da ich davon gelegentlich eine Anwendung machen werde, so will ich noch zeigen, inwiefern.

Aus

$$\int_x^\infty u\,d\alpha = \int_x^\infty vw\,d\alpha$$

folgt, im Falle $\int_x^\infty v\,d\alpha$ absolut convergent ist,

$$\int_x^\infty u\,d\alpha = \psi(\xi_1)\int_x^\infty v_1\,d\alpha + \psi(\xi_2)\int_x^\infty v_2\,d\alpha, \qquad x \leqq \xi_1,\ \ \xi_2 \leqq \infty,$$

wo v_1 und v_2 die bei meinen Untersuchungen öfter angewandten Componenten von v sind, von denen v_1 gleich v oder gleich Null ist, je nachdem v positiv oder negativ ist, und v_2 etc. Wenn also der Limes von

$$\frac{\int\limits_x^\infty v_{1 \text{ od. } 2}\, d\alpha}{\int\limits_x^\infty v\, d\alpha} \gtrless 1,$$

so gilt der Satz gleichfalls.

3.

Die Vergleichung des $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ mit dem $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Handelt es sich nun um die Vergleichung des Limes des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zweier Functionen mit dem Limes des Quotienten ihrer Ableitungen $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, so ergiebt sie sich ohne Weiteres aus dem Vorstehenden.

Ist zunächst $f(x) \sim \varphi(x) \prec 1$, so setze man z. B.:

$$f(x) + c = \int\limits_a^x f'(\alpha)\, d\alpha;$$

also

$$c = \int\limits_a^\infty f'(\alpha)\, d\alpha,$$

und

$$f(x) = -\int\limits_x^\infty f'(\alpha)\, d\alpha.$$

Falls $f(x) \sim \varphi(x) \succ 1$, setzt man:

$$f(x) + c = \int\limits_a^x f'(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\varphi(x) + c_1 = \int\limits_a^x \varphi'(\alpha)\, d\alpha,$$

und aus

$$\frac{f(x) + c}{\varphi(x) + c_1} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \left\{1 - \frac{c_1}{\varphi + c_1}\right\} + \frac{c}{\varphi + c_1}$$

folgt, dass $\frac{f(x) + c}{\varphi(x) + c_1}$ und $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ denselben Limes haben.

Es ergiebt sich also der Satz:

Wenn man zugleich $f(x)$ und $\varphi(x) \succ 1$ oder $\prec 1$ hat, und $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bestimmt ist, wenn endlich einer der Differentialquotienten

$f'(x)$, $\varphi'(x)$ von einem Werthe von x an sein Zeichen nicht mehr wechselt, ist stets

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

4.

Die Integration infinitärer Ungleichheiten.

Die Fälle

$$u \succ v,$$

bei denen sein kann:

$$u \succ 1, \quad v \succ 1,$$
$$u \prec 1, \quad v \prec 1,$$
$$u \succ 1, \quad v \gtrless 1,$$

erledigen sich ganz ähnlich wie die Fälle $u \sim v$. Z. B. giebt im Falle $u, v \succ 1$ die Relation $u \succ v$

$$\int_a^x u\,d\alpha = \int_a^x v w\,d\alpha + \psi(\xi)\int_x^x v\,d\alpha, \qquad n \leq \xi \leq x,$$

$$= \int_a^x v w\,d\alpha + \psi(\xi)\int_a^x v\,d\alpha \left\{1 - \frac{\int_a^x v\,d\alpha}{\int_a^x v\,d\alpha}\right\}.$$

In den Fällen $u \prec 1$, $v \prec 1$ und $u \succ 1$, $v \gtrless 1$ hat man zu unterscheiden, ob $\int^\infty v\,d\alpha$ endlich oder unendlich ist, worauf Alles wie oben sich ergiebt, und für die Gleichheit der Grenzwerthe von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ mit den obigen gleichlautende Bedingungen gefunden werden.

5.

Die Differentiation der infinitären Relationen.

So viel über die Integration der infinitären Relationen. Ihre Differentiirbarkeit anlangend, so ist die Aufgabe, sie befriedigend allgemein zu begründen, *viel schwieriger*, aber auch *ungleich wichtiger* als die im Vorstehenden behandelte Aufgabe hinsichtlich der Integration. Das Problem ist dieses:

Wenn die Relation $u \gtrless v$ vorliegt und im Falle $u \sim v$ der $\lim \frac{u}{v}$ *bestimmt ist, so soll ein Kennzeichen dafür aufgestellt werden, ob*

$\lim \frac{u'}{v'}$ *bestimmt ist oder nicht, und es soll* $u' \gtrsim v'$ *im Falle des bestimmten* $\lim \frac{u'}{v'}$ *nachgewiesen werden.*

Durch Beispiele überzeugt man sich leicht, dass man es hier mit einer verwickelten Aufgabe zu thun hat. Als die Idee von den Infinitärtypen der Functionen mich auf den Plan des Infinitärcalcüls brachte, habe ich wohl hie und da über jenes allgemeine Problem nachgedacht. Indessen zogen mich doch die Ergebnisse der neuen Rechnungsart zu sehr an, als dass ich der Erweiterung ihrer Grundlage meine Anstrengung dauernd hätte widmen mögen, und ich zog es daher vor, den Calcül nur auf Functionenarten anzuwenden, wo er sicher gilt, und seine Anwendbarkeit leicht zu beweisen ist, ich meine auf in x, lx, llx, $\cdots$ e^x, $e^{e^{\mu x}}$, $\cdots$ algebraisch, logarithmisch, exponentiell zusammengesetzte Functionen mit reellen Wurzeln und Logarithmen*).

Aus den eingangs erwähnten Sätzen des Hrn. Stolz, die Grenzen von $\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ und $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ betreffend, lässt sich aber leicht eine besondere Lösung des aufgestellten Problems ableiten, welche die eben gekennzeichneten Functionen sichtlich einschliesst, aber insofern allgemeiner ist, als sie Functionen mit unendlich vielen Schwankungen nicht grundsätzlich ausschliesst.

Ist nämlich für jeden noch so kleinen Werth von h:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

so giebt es auch hinreichend langsame das Zunehmen von x begleitende Abnahmen von h der Art, dass

$$\lim_{x=\infty,\, h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

sei**). Nun setzen wir:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \frac{f'(x)+hf''(\xi)}{\varphi'(x)+h\varphi''(\xi_1)}, \qquad x \leq \xi,\ \xi_1 \leq x+h,$$

Unter der Annahme, dass für beliebig kleine Werthe von Δ:

$$\frac{f''(x+\Delta)}{f'(x)} \lesssim 1, \quad \frac{\varphi''(x+\Delta)}{\varphi'(x)} \lesssim 1$$

sei, folgt:

---

*) Annali di Matematica, Ser. II, Tom. IV, p. 344.

**) Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen. Diese Annalen Bd. XI, p. 145.

$$\lim_{x=\infty, h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty,\ h=0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1+h\,\frac{f''(\xi)}{f'(x)}}{1+h\,\frac{\varphi''(\xi_1)}{\varphi'(x)}}$$

$$= \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Wenn wir die Functionen f und φ reell algebraisch, logarithmisch, exponentiell aus x, den Logarithmen und Exponentialfunctionen zusammengesetzt annehmen, so sind die Bedingungen durch $f, \varphi \overset{\sim}{<} e^x$ oder $\overset{\sim}{<} e^{-x}$ erfüllt. Man kann aber in jede so zusammengesetzte Function $F(x)$ eine solche Substitution $x = \lambda(\varkappa)$ einführen, dass $F(\lambda(\varkappa)) \overset{\sim}{<} e^x$ oder $\overset{\sim}{<} e^{-\varkappa}$ sei. Setzen wir

$$f(x) = F(\varkappa), \qquad \varphi(x) = \Phi(\varkappa)$$

und nehmen an:

$$\frac{F''(\varkappa+\Delta)}{F'(\varkappa)} \overset{\sim}{<} 1, \qquad \frac{\Phi''(\varkappa+\Delta)}{\Phi'(\varkappa)} \overset{\sim}{<} 1,$$

so ist:

$$\lim \frac{F(\varkappa)}{\Phi(\varkappa)} = \lim \frac{F'(\varkappa)}{\Phi'(\varkappa)} = \lim \frac{f'(x)\,\frac{dx}{d\varkappa}}{\varphi'(x)\,\frac{dx}{d\varkappa}} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Die Bedingungen

$$\frac{f'(x+\Delta)}{f'(x)}, \quad \frac{\varphi''(x+\Delta)}{\varphi'(x)} \overset{\sim}{<} 1$$

sind erfüllt, wenn zugleich:

$$1. \quad \frac{f''(x+\Delta)}{f''(x)}, \quad \frac{\varphi''(x+\Delta)}{\varphi''(x)} \sim 1,$$

$$2. \quad \frac{f''(x)}{f'(x)}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \overset{\sim}{<} 1$$

ist. Die aus x, den Logarithmen und den Exponentialfunctionen algebraisch, logarithmisch, exponentiell zusammengesetzten Functionen genügen auch diesen Bedingungen oder ihrer Erweiterung vermöge einer Substitution $x = \lambda(\varkappa)$. Unter oben angegebenen Bedingungen können diese Relationen integrirt werden, wodurch es möglich wird, sie zu discutiren, was bei einer anderen Gelegenheit geschehen soll.

6.

Unter welchen Umständen hat überhaupt ein Functionenquotient einen bestimmten Grenzwerth?

Man kann sich eine doppelte Aufgabe in Bezug auf Quotienten-Grenzwerthe stellen. Man kann Kennzeichen suchen für je zwei zusammengehörige Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, damit ihr Quotienten-Limes bestimmt sei, und diese Auffassung beherrschte im Grunde die bis-

herigen Betrachtungen. Zweitens kann man nach dem allgemeinen Kennzeichen für die ganze Functionenclasse fragen, aus der irgend zwei einen bestimmten Quotienten-Limes liefern. Auf dies Problem will ich noch mit einigen Worten eingehen.

Eine ausreichende Bedingung für den bestimmten Quotienten-Limes ist wahrscheinlich die, dass die Functionen und ihre Ableitungen von einem Werthe von x an keine Maxima oder Minima mehr haben*). Gebunden an so bedeutende Beschränkungen ist der bestimmte Limes wohl nicht.

Nehmen wir an, dass der Quotient nicht über alle Grenzen wächst, und dass die Functionen der Classe und ihre Differentialquotienten endlich und stetig seien. Unbestimmt kann der Quotient nicht werden, wenn er nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so dass, soll er eine Grenze haben,

$$\frac{def}{dx} - \frac{de\varphi}{dx} = 0$$

nicht unendlich viele Wurzeln haben darf. Wenn von einem hinreichend grossen x an die Gleichung nicht mehr erfüllt wird, so ist eine Grenze vorhanden und wenn auch der Differentialquotient des Quotienten nicht auf und niederschwankt, so folgt noch $\frac{F}{\varphi} = \frac{F'}{\varphi'}$. Genauere Untersuchungen über diesen Gegenstand scheinen schwierig zu sein.

Tübingen, im October 1878.

---

*) Diese Bedingung drückte ich auch so aus, dass ich sagte, weder die Function, noch ihre Ableitungen dürften unendlich viele Maxima haben, was allerdings die Möglichkeit nicht ausschliesst, dass die Stelle, von welcher an die Function keine Maxima mehr hat, bei den aufeinanderfolgenden Ableitungen ins Unbegrenzte weiter rückt. Der Ausdruck im Texte ist daher genauer. Wenn jedoch ein Missverständniss nicht zu befürchten ist, wie Hr. Stolz mich offenbar auch richtig verstanden hat, so kann man diesen Ausdruck wohl gestatten, namentlich wenn damit angedeutet werden soll, welche bekannten Functionsarten man auszuschliessen wünscht. Dagegen habe ich (Borch. Journ. Bd. 74, p. 297) keineswegs behaupten wollen, dass, wenn jene Bedingung erfüllt ist, immer ein bestimmter Limes $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ vorhanden sei, sondern nur, dass die lim $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, lim $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, ... einander gleich sind, wenn sie vorhanden sind. Ich habe gleich im Beginne meiner Untersuchungen die Fälle unbestimmter Grenzen ausdrücklich ausgeschlossen. Hinsichtlich der unendlichen Grenzwerthe findet sich p. 232 der Abhandlung des Herrn Stolz die Bemerkung, dass, da der Quotient $\frac{f}{\varphi}$ in einem Intervall $x_1 \lesseqgtr x \leqq a$ stetig vorausgesetzt werde, ein unendlicher Grenzwerth desselben immer bestimmt unendlich sei. Verstehe ich diese Stelle recht, so ist sie im Widerspruch mit dem Fall $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = x \sin x$, $x_1 \leqq x < \infty$.

Ein Beweis des Multiplicationstheorems für Determinanten.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

Neben den verschiedenen Ableitungen des Multiplicationstheorems der Determinanten ist vielleicht auch der in den folgenden Zeilen mitgetheilte Beweis nicht überflüssig, da derselbe eine directe Ausführung der verlangten Operationen liefert, und dabei nur die elementarsten Transformationsregeln benützt.

Die Bemerkung, die dem Beweise zu Grunde liegt, ist ihrem Wesen nach die folgende. Soll die Determinante $\Delta = (b_{11} b_{22} \ldots b_{nn})$ mit $D = (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm})$ multiplicirt werden, so lässt sich das Resultat leicht in die gewünschte Form überführen, wenn das Product von Δ mit einer ersten Unterdeterminante von D schon bekannt ist. Dann kann mit D in der gewöhnlichen Weise in einer Zeile multiplicirt werden, und nach einer einfachen Umwandlung hebt sich jene Unterdeterminante heraus und man erhält $D\Delta$ in der bekannten Form. Um also $D\Delta$ zu erhalten, multipliciren wir Δ der Reihe nach mit

$$a_{11},\ (a_{11} a_{22}),\ (a_{11} a_{22} a_{33}),\ \ldots\ (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}),$$

und heben nach der 1^{ten}, 2^{ten}, ... m^{ten} Multiplication die Factoren

$$1,\ a_{11},\ (a_{11} a_{22}),\ \ldots\ (a_{11} a_{22} \ldots a_{m-1,\, m-1})$$

heraus. Das Schlussresultat ist $D\Delta$. Der Uebersichtlichkeit wegen sei

$$(a_{11} a_{22} \ldots a_{ii}) = D^{(i)},$$

und für die Unterdeterminanten:

$$\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a_{kl}} = A_{kl}^{(i)},$$

wo der obere Index die Determinante fixirt, auf welche sich die Bildung der Unterdeterminante bezieht. Man hat demnach

$$A_{ii}^{(i)} = D^{(i-1)}.$$

Wir erhalten zuerst:

$$a_{11}\,.\,\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}, \ldots \\ b_{21}\;, & b_{22}\;, \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \\ b_{n1}\;, & b_{n2}\;, \ldots \end{vmatrix}.$$

Addirt man hierin die mit a_{21} multiplicirten Elemente der zweiten Zeile zu den entsprechenden Elementen in der ersten Zeile, und multiplicirt hierauf in der zweiten Zeile mit $D^{(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, so erhält man

$$a_{11}D^{(2)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \ldots \\ D^{(2)}b_{21} \quad , & D^{(2)}b_{22} & , \ldots \\ b_{31} \quad , & b_{32} & , \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots \\ b_{n1} \quad , & b_{n2} & , \ldots \end{vmatrix}.$$

Addirt man nun die mit a_{12} multiplicirten Elemente der ersten Zeile zur zweiten, berücksichtigt den Werth von $D^{(2)}$, so kann man a_{11} in der zweiten Zeile fortheben und hat

$$D^{(2)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{12}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \ldots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}, & \ldots \\ b_{31} \quad , & b_{32} & , \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \ldots \\ b_{n1} \quad , & b_{n2} & , \ldots \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir wieder $D^{(3)}\Delta$. Zur ersten und zweiten Zeile werden die mit a_{31}, respective a_{32} multiplicirten Elemente der dritten Zeile addirt und diese dann mit $D^{(3)} = (a_{11}a_{22}a_{33})$ multiplicirt. Dies giebt:

$$D^{(2)}D^{(3)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, & \ldots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, & \ldots \\ D^{(3)}b_{31} \quad , & D^{(3)}b_{32} & , \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \ldots \\ b_{n1} \quad , & b_{n2} & , \ldots \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun die angeführte Bezeichnung für die Unterdeterminanten von $D^{(3)}$ benützen, so wird nach Subtraction der mit $A_{31}^{(3)}$, resp. $A_{32}^{(3)}$ multiplicirten Elemente der ersten und zweiten Zeile von der dritten, wegen

$$\begin{aligned} - a_{11}A_{31}^{(3)} - a_{12}A_{32}^{(3)} &= a_{13}A_{33}^{(3)} \\ - a_{21}A_{31}^{(3)} - a_{22}A_{32}^{(3)} &= a_{23}A_{33}^{(3)} \\ D^{(3)} - a_{31}A_{31}^{(3)} - a_{32}A_{32}^{(3)} &= a_{33}A_{33}^{(3)} \end{aligned}$$

und

$$A_{33} = D^{(2)}$$

in der dritten Zeile sich der Factor $D^{(2)}$ herausheben lassen und man erhält:

$$D^{(3)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, \dots \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}, & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}, \dots \\ b_{41} \quad , & b_{42} \quad , \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

So erhält man also für $i = 1, 2, 3$ die Formel

$$D^{(i)}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + \cdots + a_{i1}b_{i1}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{i1}b_{i2}, \cdots \\ \dots & \dots \\ a_{1i}b_{11} + a_{2i}b_{21} + \cdots + a_{ii}b_{i1}, & a_{1i}b_{12} + a_{2i}b_{22} + \cdots + a_{ii}b_{i2}, \cdots \\ b_{i+1,1} \quad , & b_{i+1,2} \quad , \cdots \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

deren allgemeine Verification durch den Uebergang von i auf $i + 1$ leicht erfolgt. Die hiebei nothwendigen Operationen sind folgende. Man addirt die mit $a_{i+1,1}, a_{i+1,2}, \dots a_{i+1,i}$ multiplicirten Elemente der $\overline{i+1}^{\text{ten}}$ Zeile zur ersten, zweiten, ..., i^{ten} Zeile, — multiplicirt sodann die $\overline{i+1}^{\text{te}}$ Zeile mit $D^{(i+1)}$, — und zieht von dieser endlich die mit $A_{i+1,1}^{(i+1)}, A_{i+1,2}^{(i+1)}, \dots A_{i+1,i}^{(i)}$ multiplicirten Elemente der ersten, zweiten, ... i^{ten} Zeile ab. Dann hebt sich wieder in der $i + 1^{\text{ten}}$ Zeile der Factor $A_{i+1,i+1}^{(i+1)} = D^{(i)}$ heraus, und man erhält das Multiplicationstheorem für $D^{(i+1)}\Delta$, also für zwei Determinanten von beliebigem Grade.

Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.

Von E. Lommel in Erlangen.

I. Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch Bessel'sche Functionen integrirt werden.

1. Wiederholt*) habe ich mich mit linearen Differentialgleichungen beschäftigt, deren Integrale durch Bessel'sche Functionen ausdrückbar sind, und namentlich in einem in diesen Annalen (Bd. III, S. 475) publicirten Aufsatz die Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt, welcher durch

$$y = z^\alpha J^\nu (\gamma z^\beta)$$

genügt wird. Man kann nun weitergehend nach derjenigen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen, welche durch

$$y = \varphi J^\nu (\psi)$$

befriedigt wird, wenn unter φ und ψ ganz beliebige Functionen der unabhängig Veränderlichen z verstanden werden. Die Ergebnisse dieser allgemeineren Untersuchung bieten hinlängliches Interesse dar, um eine Veröffentlichung derselben gerechtfertigt erscheinen zu lassen.

2. Der grösseren Bequemlichkeit wegen geben wir dem vorausgesetzten Integral die Form

$$y = \chi \psi^\nu J^\nu (\psi),$$

wo χ und ψ beliebige Functionen von z vorstellen, und differentiiren zweimal nach einander in Beziehung auf z unter Anwendung des Satzes:

$$\frac{\partial (z^\nu J^\nu(z))}{\partial z} = z^\nu J^{\nu-1}(z).$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \chi \psi \psi' \psi^{\nu-1} J^{\nu-1}(\psi) + \chi' \psi^\nu J^\nu(\psi)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \chi \psi'^2 \psi^\nu J^{\nu-2}(\psi) + (\chi\psi\psi'' + \chi\psi'^2 + 2\chi'\psi\psi')\psi^{\nu-1} J^{\nu-1}(\psi) + \chi'' \psi^\nu J^\nu \psi$$

*) Studien über die Bessel'schen Functionen, Leipzig 1868. III. Abschnitt. Math. Ann. Bd. II, S. 624. Ibid. Bd. III, S. 475.

wo die nach z genommenen Ableitungen der Functionen χ und ψ durch Accente angedeutet sind.

Nun ist aber

$$J^{\nu-2}(\psi) = \frac{2\nu-2}{\psi} J^{\nu-1}(\psi) - J^{\nu}(\psi).$$

Man erhält daher, wenn man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung einsetzt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \left(\chi\psi'' + (2\nu-1)\chi\frac{\psi'^2}{\psi} + 2\chi'\psi'\right)\psi^{\nu} J^{\nu-1}(\psi) + (\chi'' - \chi\psi'^2)\psi^{\nu} J^{\nu}(\psi).$$

Da nun

$$\psi^{\nu} J^{\nu}(\psi) = y\chi^{-1} \quad \text{und} \quad \psi^{\nu} J^{\nu-1}(\psi) = \frac{\partial(y\chi^{-1})}{\partial\psi}$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \left(\chi\psi'' + (2\nu-1)\chi\frac{\psi'^2}{\psi} + 2\chi'\psi'\right)\frac{\partial(y\chi^{-1})}{\partial\psi} + (\chi'' - \chi\psi'^2)y\chi^{-1}$$

oder, wenn man beiderseits mit ψ', d. i. $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, multiplicirt:

$$\psi'\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \left(\chi\psi'' + (2\nu-1)\chi\frac{\psi'^2}{\psi} + 2\chi'\psi'\right)\frac{\partial(y\chi^{-1})}{\partial z} + (\chi'' - \chi\psi'^2)y\psi'\chi^{-1}.$$

Wird die zur Rechten vorkommende Ableitung des Productes $y\chi^{-1}$ entwickelt, d. h.

$$\frac{\partial(y\chi^{-1})}{\partial z} = \chi^{-1}\frac{\partial y}{\partial z} - \chi^{-2}\chi' y$$

gesetzt, durch ψ' wegdividirt, und alles auf die linke Seite geschafft, so ergiebt sich die Differentialgleichung

(1)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\psi''}{\psi'} + (2\nu-1)\frac{\psi'}{\psi} + 2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\partial y}{\partial z}$$
$$+ \left[\left(\frac{\psi''}{\psi'} + (2\nu-1)\frac{\psi'}{\psi} + 2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\chi'}{\chi} - \frac{\chi''}{\chi} + \psi'^2\right] y = 0,$$

welcher

(1a)
$$y = \chi\psi^{\nu} J^{\nu}(\psi)$$

als particuläres Integral genügt.

3. Geht man in der gleichen Weise von

$$y = \chi\psi^{-\mu} J^{\mu}(\psi)$$

aus, indem man beim wiederholten Differentiiren von dem Satze

$$\frac{\partial(z^{-\mu} J^{\mu}(z))}{\partial z} = -z^{-\mu} J^{\mu+1}(z)$$

Gebrauch macht, so findet man der Reihe nach

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\chi\psi\psi'\psi^{-\mu-1}J^{\mu+1}(\psi) + \chi'\psi^{-\mu}J^{\mu}(\psi)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \chi\psi'^2\psi^{-\mu}J^{\mu+2}(\psi) - (\chi\psi\psi'' + \chi\psi'^2 + 2\chi'\psi\psi')\psi^{-\mu-1}J^{\mu+1}(\psi)$$
$$+ \chi''\psi^{-\mu}J^{\mu}(\psi);$$

oder, da

$$J^{\mu+2}(\psi) = \frac{2\mu+2}{\psi}J^{\mu+1}(\psi) - J^{\mu}(\psi),$$

ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\left(\chi\psi'' - (2\mu+1)\chi\frac{\psi'^2}{\psi} + 2\chi'\psi'\right)\psi^{-\mu}J^{\mu+1}(\psi) + (\chi'' - \chi\psi'^2)\psi^{-\mu}J^{\mu}(\psi).$$

Wird hier

$$\psi^{-\mu}J^{\mu}(\psi) = y\chi^{-1} \quad \text{und} \quad \psi^{-\mu}J^{\mu+1}(\psi) = -\frac{\partial(y\chi^{-1})}{\partial\psi}$$

eingeführt und im Uebrigen ganz wie oben verfahren, so ergiebt sich, dass der Differentialgleichung

$$(2)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\psi''}{\psi'} - (2\mu+1)\frac{\psi'}{\psi} + 2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\partial y}{\partial z}$$
$$+ \left[\left(\frac{\psi''}{\psi'} - (2\mu+1)\frac{\psi'}{\psi} + 2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\chi'}{\chi} - \frac{\chi''}{\chi} + \psi'^2\right]y = 0$$

durch das particuläre Integral

$$(2\text{a})\quad y = \chi\psi^{-\mu}J^{\mu}(\psi)$$

genügt wird.

4. Die Gleichung (2) fällt aber mit der Gleichung (1) zusammen, wenn $\mu = -\nu$ genommen wird. Wir erkennen demnach, dass jener Differentialgleichung (1) die beiden particulären Integrale

$$y_1 = \chi\psi^{\nu}J^{\nu}(\psi) \quad \text{und} \quad y_2 = \chi\psi^{\nu}J^{-\nu}(\psi)$$

zugehören, welche, solange ν nicht positiv oder negativ ganz oder Null ist, von einander wesentlich verschieden sind, so dass im Allgemeinen das vollständige Integral jener Gleichung durch

$$(1\text{b})\quad y = \chi\psi^{\nu}(AJ^{\nu}(\psi) + BJ^{-\nu}(\psi))$$

ausgedrückt wird, wenn A und B willkürliche Constante bezeichnen. Ist jedoch ν positiv oder negativ ganz ($= \pm n$) oder Null, so tritt an die Stelle des zweiten particulären Integrals das folgende

$$y_2 = \chi\psi^{\pm n}Y^{n}(\psi),$$

wo Y^n die Bessel'sche Function zweiter Art bedeutet, und das vollständige Integral der Gleichung (1) stellt sich unter der Form

$$(1\text{c})\quad y = \chi\psi^{\pm n}(AJ^{n}(\psi) + BY^{n}(\psi))$$

dar.

5. Um der Gleichung

$$(1)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\psi''}{\psi'}+(2\nu-1)\frac{\psi'}{\psi}+2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\partial y}{\partial z}$$
$$+\left[\left(\frac{\psi''}{\psi'}+(2\nu-1)\frac{\psi'}{\psi}+2\frac{\chi'}{\chi}\right)\frac{\chi'}{\chi}-\frac{\chi''}{\chi}+\psi'^2\right]y=0$$

eine übersichtlichere Gestalt zu geben, führen wir statt der Function χ eine andere Function φ ein, indem wir setzen:

$$\frac{\psi''}{\psi'}+(2\nu-1)\frac{\psi'}{\psi}+2\frac{\chi'}{\chi}=\frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\psi'\psi^{2\nu-1}\chi^2=a\varphi,$$

oder, wenn wir, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, der willkürlichen Constanten a den speciellen Werth $\frac{1}{2\nu}$ ertheilen:

$$\chi^2=\frac{\varphi}{2\nu\psi^{2\nu-1}\psi'}.$$

Hieraus aber ergiebt sich nach und nach:

$$\frac{\chi'}{\chi}=\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi'}-\frac{2\nu-1}{2}\frac{\psi'}{\psi},$$

$$\frac{\chi''}{\chi}=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)-\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\psi'}{\psi}-\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\psi''}{\psi'}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)+\frac{4\nu^2-1}{4}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2,$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\chi'}{\chi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\psi''}{\psi'}-\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\psi'}{\psi},$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\chi'}{\chi}-\frac{\chi''}{\chi}=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)$$
$$-\frac{4\nu^2-1}{4}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2.$$

Durch die vorgenommene Transformation wird also erreicht, dass die beiden beliebigen Functionen φ und ψ von einander getrennt auftreten, und wir gelangen zu dem Satz:

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(I)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\psi^2-\frac{4\nu^2-1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]y=0,$$

in welcher φ und ψ ganz beliebige Functionen von z bedeuten, wird durch das Integral

(Ia) $$y = \sqrt{\frac{\varphi\psi}{\psi'}}\left(A J^{\nu}(\psi) + B J^{-\nu}(\psi)\right)$$
vollständig erfüllt.

6. Eine beträchtliche Vereinfachung tritt ein, wenn wir φ constant annehmen. Es ergiebt sich nämlich, *dass der Differentialgleichung*

(II) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left[\left(\psi^2 - \frac{4\nu^2-1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)\right] y = 0,$$

wo ψ eine ganz beliebige Function von z vorstellt, der Ausdruck

(IIa) $$y = \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}}\left(A J^{\nu}(\psi) + B J^{-\nu}(\psi)\right)$$

als vollständiges Integral genügt, solange ν nicht positiv oder negativ ganz oder Null ist. Ist aber ν positiv oder negativ ganz oder Null ($= \pm n$), so lautet ihr vollständiges Integral

(IIb) $$y = \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}}\left(A J^{n}(\psi) + B Y^{n}(\psi)\right) \text{*)}.$$

Da die Gleichung (II) durch die einfache Substitution

$$y = \varphi^{-\frac{1}{2}} y_1$$

in die Gleichung (I) übergeführt werden kann, so können wir dieselbe als ebenso allgemein ansehen wie diese, und in ihr die erschöpfende Lösung des Eingangs erwähnten Problemes erblicken.

7. Von Specialfällen der Gleichung (I) mögen als besonders bemerkenswerth die folgenden hervorgehoben werden.

Sei zuerst $\varphi = \psi'$, so ergiebt sich die Differentialgleichung

(3) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{\psi''}{\psi'}\frac{\partial y}{\partial z} + \left(\psi^2 - \frac{4\nu^2-1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 y = 0$$

nebst ihrem vollständigen Integral

(3a) $$y = \sqrt{\psi}\left(A J^{\nu}(\psi) + B J^{-\nu}(\psi)\right).$$

Setzen wir ferner $\varphi = \frac{\psi'}{\psi}$, so erhalten wir die Gleichung

(4) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(\frac{\psi'}{\psi} - \frac{\psi''}{\psi'}\right)\frac{\partial y}{\partial z} + (\psi^2 - \nu^2)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 y = 0$$

mit dem Integral

(4a) $$y = A J^{\nu}(\psi) + B J^{-\nu}(\psi).$$

Nehmen wir endlich $\varphi = \psi^{2\mu-1}\psi'$, so haben wir die Differentialglei-

*) Der Kürze wegen werden wir im Folgenden nur noch die erstere Form (a) des Integrales anführen, indem wir als selbstverständlich betrachten, dass im Falle eines ganzzahligen ν ($= \pm n$) statt der Function $J^{-\nu}$ die Bessel'sche Function zweiter Art Y^n einzutreten hat.

chung (in welcher die beiden vorhergehenden wiederum als besondere Fälle enthalten sind)

(5) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\psi''}{\psi'} + (2\mu-1)\frac{\psi'}{\psi}\right)\frac{\partial y}{\partial z} + (\mu^2 - \nu^2 + \psi^2)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 y = 0$$

nebst ihrem vollständigen Integral

(5a) $$y = \psi^\mu\left(AJ^\nu(\psi) + BJ^{-\nu}(\psi)\right).$$

8. Selbstverständlich sind alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche wir früher durch Bessel'sche Functionen integrirt haben, als specielle Fälle in den gegenwärtigen Formeln enthalten.

Man erhält z. B. die sog. Bessel'sche Differentialgleichung

(6) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

nebst ihrem Integral

(6a) $$y = AJ^\nu(z) + BJ^{-\nu}(z),$$

wenn man in (4) $\psi = z$ setzt.

Nimmt man $\psi = z$ und $\mu = \nu$ in Gleichung (5), so ergiebt sich

(7) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{2\nu - 1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + y = 0$$

sammt dem completen Integral

(7a) $$y = z^\nu\left(AJ^\nu(z) + BJ^{-\nu}(z)\right).$$

Setzen wir ferner in (5) $\psi = \sqrt{z}$ und $\mu = -\nu$, so erhalten wir die Gleichung

(8) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\nu+1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{1}{4z}y = 0$$

nebst ihrem Integral

(8a) $$y = z^{-\frac{\nu}{2}}\left(AJ^\nu(\sqrt{z}) + BJ^{-\nu}(\sqrt{z})\right).$$

Substituiren wir $\psi = 2\nu z^{\frac{1}{2\nu}}$ in die Gleichung (II), so geht aus ihr die Riccati'sche Gleichung

(9) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z^{\frac{1}{\nu}-2}\cdot y = 0$$

und deren vollständiges Integral

(9a) $$y = \sqrt{z}\left(AJ^\nu\left(2\nu z^{\frac{1}{2\nu}}\right) + BJ^{-\nu}\left(2\nu z^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right)$$

hervor.

Dieselbe Gleichung (II) liefert für $\psi = e^z$

(10) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (e^{2z} - \nu^2)y = 0$$

mit dem Integral

(10a) $$y = AJ^{\nu}(e^z) + BJ^{-\nu}(e^z),$$

während die Substitution $\psi = e^{\frac{1}{z}}$ zur Differentialgleichung

(11) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(e^{\frac{2}{z}} - \nu^2\right)\frac{y}{z^4} = 0$$

das vollständige Integral

(11a) $$y = z\left(AJ^{\nu}(e^{\frac{1}{z}}) + BJ^{-\nu}(e^{\frac{1}{z}})\right)$$

ergiebt.

9. Von besonderem Interesse ist bei sämmtlichen aufgeführten Differentialgleichungen der Fall, dass ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ oder von $-\frac{1}{2}$ ist, weil alsdann die Bessel'schen Functionen bekanntlich durch Sinus und Cosinus (oder durch Exponentialgrössen) in geschlossener Form darstellbar sind. Man hat nämlich, unter n eine positive ganze Zahl verstanden:

$$J^{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z)\cdot \sin z - R^{n-1,\frac{3}{2}}(z)\cdot \cos z\right)$$

und

$$J^{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z)\cdot \cos z + R^{n-1,\frac{3}{2}}(z)\cdot \sin z\right),$$

wo die R die folgenden nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitenden endlichen Reihen sind:

$$R^{n,\frac{1}{2}}(z) = \sum(-1)^p\cdot\frac{(n+1-2p)^{p|1}}{p!}\cdot\frac{(2p+1)^{n-2p|2}}{z^{n-2p}}$$

und

$$R^{n-1,\frac{3}{2}}(z) = \sum(-1)^p\cdot\frac{(n-2p)^{p|1}}{p!}\cdot\frac{(2p+3)^{n-1-2p|2}}{z^{n-1-2p}},$$

Reihen, deren bemerkenswerthe recurrente Eigenschaften von mir in einer früheren Arbeit*) dargelegt worden sind.

Setzen wir nun in Gleichung (II) $\nu = \pm\frac{2n+1}{2}$, so nimmt sie die folgende Gestalt an:

(12) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left[\left(\psi^2 - n(n+1)\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)\right]y = 0,$$

und ihr genügt als vollständiges Integral der Ausdruck

(12a) $$y = \frac{A}{\sqrt{\psi'}}\left[R^{n,\frac{1}{2}}(\psi)\cdot\sin(\psi+\alpha) - R^{n-1,\frac{3}{2}}(\psi)\cdot\cos(\psi+\alpha)\right],$$

wo A und α die beiden willkürlichen Constanten sind. Wenn $n = 0$ ist, so ist $R^{0,\frac{1}{2}} = 1$, und statt $R^{n-1,\frac{3}{2}}$ hat man Null zu setzen.

---

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 112.

Speciell für $\psi = z$ ergiebt sich daraus für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{z^2}\right) y = 0 \tag{13}$$

das Integral

$$y = A\left[R^{n,\frac{1}{2}}(z) \cdot \sin(z+\alpha) - R^{n-1,\frac{3}{2}}(z) \cdot \cos(z+\alpha)\right]; \tag{13a}$$

also z. B.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) y = 0, \quad y = A\left(\frac{\sin(z+\alpha)}{z} - \cos(z+\alpha)\right);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{6}{z^2}\right) y = 0, \quad y = A\left[\left(\frac{3}{z^2} - 1\right) \sin(z+\alpha) - \frac{3\cos(z+\alpha)}{z}\right];$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{12}{z^2}\right) y = 0, \quad y = A\left[\left(\frac{15}{z^2} - 6\right) \frac{\sin(z+\alpha)}{z} - \left(\frac{15}{z^2} - 1\right) \cos(z+\alpha)\right]$$

u. s. f.

10. Wir setzen nun in der Gleichung (II)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 = Z,$$

indem wir unter Z eine gegebene Function von z verstehen. Um ψ aus dieser Differentialgleichung zu bestimmen, transformiren wir sie durch die Substitution

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi''}{\psi'} = -\frac{u'}{u},$$

wo u eine neue unbekannte Function von z ist. Sie geht dadurch über in

$$u'' + Zu = 0,$$

während aus der vorhergehenden Gleichung

$$\psi' = a u^{-2} \quad \text{und} \quad \psi = a\int u^{-2}\, dz + b$$

folgt. Wir gelangen somit zu dem folgenden Satz:

Lässt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Zu = 0$$

integriren, und ist u ein (particuläres oder vollständiges) Integral derselben, so kann stets auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(Z + \frac{a^2}{u^4}\left[1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\left(a\int u^{-2}\, dz + b\right)^2}\right]\right) y = 0 \tag{III}$$

integrirt werden, und zwar lautet ihr vollständiges Integral

$$y = u\sqrt{\psi}\,\left(A J^{\nu}(\psi) + B J^{-\nu}(\psi)\right), \tag{IIIa}$$

wo

$$\psi = a\int u^{-2}\,dz + b$$

ist.

Dieser Satz gestaltet sich ganz besonders einfach, wenn $\nu = \frac{1}{2}$ ist. Er lautet nämlich in diesem Falle wie folgt:

Ist u ein (particuläres oder vollständiges) *Integral der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Zu = 0,$$

so genügt der Gleichung

(IV) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(Z + \frac{a^2}{u^4}\right) y = 0$$

das vollständige Integral

(IVa) $$y = Au \sin\left(a\int u^{-2}\,dz + \alpha\right),$$

wo A und α die willkürlichen Constanten sind.

11. Nehmen wir, um einige einfache Beispiele anzuführen, zuerst $Z = 1$, so wird der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0$$

durch

$$u = \cos(z + \beta)$$

genügt. Da nun

$$\int \frac{dz}{\cos^2(z+\beta)} = \operatorname{tg}(z+\beta)$$

ist, so erhalten wir zur Differentialgleichung

(14) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{a^2}{\cos^4(z+\beta)} - \frac{4\nu^2 - 1}{\sin^2(2z+2\beta)}\right) y = 0$$

das Integral

(14a) $$y = \sqrt{\sin(2z+2\beta)}\left(A J^{\nu}(a \operatorname{tg}(z+\beta)) + B J^{-\nu}(a \operatorname{tg}(z+\beta))\right),$$

sowie zur Gleichung

(15) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{a^2}{\cos^4(z+\beta)}\right) y = 0$$

das Integral

(15a) $$y = A \cdot \cos(z+\beta)\sin\left(a \operatorname{tg}(z+\beta) + \alpha\right).$$

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2 - z^2}{(1 - z^2)^2}\, u = 0$$

genügt als vollständiges Integral:

$$u = Az(1-z^2)^{\frac{1}{4}} + B(1-z^2)^{\frac{3}{4}}.$$

Nehmen wir zuerst

$$u = z(1-z^2)^{\frac{1}{4}},$$

so wird

$$\int u^{-2}dz = \int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^2}} = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

und zur Differentialgleichung

(16) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{1-z^2}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{2-z^2}{1-z^2} + \frac{a^2}{z^4} - \frac{4\nu^2-1}{4z^2(1-z^2)}z^2\right]y = 0$$

ergiebt sich das Integral

(16a) $$y = \sqrt{z(1-z^2)}\left(AJ^{\nu}\left(\frac{a}{z}\sqrt{1-z^2}\right) + BJ^{-\nu}\left(\frac{a}{z}\sqrt{1-z^2}\right)\right).$$

Sei ferner

$$u = (1-z^2)^{\frac{3}{4}}$$

und demnach

$$\int u^{-2}dz = \int \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

so geht die Gleichung

(17) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{(1-z^2)^2}\left[\frac{3}{4}(2-z^2) + \frac{a^2}{1-z^2} - \frac{4\nu^2-1}{4z^2}\right]y = 0$$

nebst ihrem Integrale

(17a) $$y = \sqrt{z(1-z^2)}\left(AJ^{\nu}\left(\frac{az}{\sqrt{1-z^2}}\right) + BJ^{-\nu}\left(\frac{az}{\sqrt{1-z^2}}\right)\right)$$

hervor.

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{(1+z^2)^2} = 0$$

wird genügt durch

$$u = \sqrt{1+z^2}.$$

Da nun

$$\int u^{-2}dz = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z \quad \text{und} \quad a^2u^{-4} = \frac{a^2}{(1+z^2)^2}$$

ist, so erhalten wir zur Differentialgleichung

(18) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a^2-1}{(1+z^2)^2}y = 0$$

das vollständige Integral

(18a) $$y = A\sqrt{1+z^2}\cdot\sin(a \operatorname{arctg} z + \alpha).$$

Gehen wir endlich aus von der Riccati'schen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z^{\frac{1}{\mu}-2}u = 0$$

und deren particulärem Integral

$$u = \sqrt{az}\,J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right),$$

so haben wir

$$a\int u^{-2}dz=\int\frac{dz}{z\left(J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)\right)^2}$$

zu ermitteln. Setzen wir $2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}=v$, so wird

$$\int\frac{dz}{z\left(J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)\right)^2}=2\mu\int\frac{dv}{v\left(J^{\mu}(v)\right)^2}.$$

Nun ist aber, wie ich früher gezeigt habe*):

$$\int\frac{dv}{v\left(J^{\mu}(v)\right)^2}=-\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\cdot\frac{J^{-\mu}(v)}{J^{\mu}(v)};$$

es ergiebt sich demnach

$$a\int u^{-2}dz=-\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\cdot\frac{J^{-\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)}{J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)},$$

und wir erhalten zur Differentialgleichung

$$\text{(19)}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\left(z^{\frac{1}{\mu}}+\frac{1}{\left(J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)\right)^4}\right)\frac{y}{z^2}=0$$

das vollständige Integral

$$\text{(19a)}\qquad y=A\sqrt{z}\,J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\cdot\frac{J^{-\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)}{J^{\mu}\left(2\mu z^{\frac{1}{2\mu}}\right)}+\alpha\right),$$

welches im Falle eines ganzzahligen $\mu(=n)$ durch

$$\text{(19b)}\qquad y=A\sqrt{z}\,J^{n}\left(2nz^{\frac{1}{2n}}\right)\cdot\sin\left(\frac{Y^{n}\left(2nz^{\frac{1}{2n}}\right)}{J^{n}\left(2nz^{\frac{1}{2n}}\right)}+\alpha\right)$$

zu ersetzen ist.

II. Ueber Integrale mit Producten zweier Bessel'schen Functionen.

1. Wir multipliciren die lineare Differentialgleichung

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+Py=0,$$

wo P eine gegebene Function von z vorstellt, mit $\eta\,dz$, unter η eine noch zu bestimmende Function von z verstanden, integriren nach z, und erhalten

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 111.

$$\int P y \eta \, dz = -\int \eta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich aber

$$\int \eta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz = \eta \frac{\partial y}{\partial z} - \int \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

$$= \eta \frac{\partial y}{\partial z} - y \frac{\partial \eta}{\partial z} + \int y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz$$

und demnach

$$\int P y \eta \, dz = y \frac{\partial \eta}{\partial z} - \eta \frac{\partial y}{\partial z} - \int y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz.$$

Wir bestimmen nun die Function η aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + Q \eta = 0, \tag{2}$$

und gelangen hiermit zu dem Satz:

Wenn y und η Integrale der Differentialgleichungen (1) *und* (2) *sind, so hat man stets*

$$\int (P - Q) y \eta \, dz = y \frac{\partial \eta}{\partial z} - \eta \frac{\partial y}{\partial z}, \tag{A}$$

wo zur Rechten noch eine willkürliche Constante hinzugefügt zu denken ist, welche wir aber als selbstverständlich anzuschreiben unterlassen.

2. Nehmen wir nun

$$P = \left(\varphi^2 - \frac{4\mu^2 - 1}{4}\right)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)$$

und

$$Q = \left(\psi^2 - \frac{4\nu^2 - 1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right),$$

wo φ und ψ ganz beliebige Functionen von z bedeuten, so sind nach den Lehren des vorhergehenden Abschnitts

$$y = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi'}}\left(A J^{\mu}(\varphi) + B J^{-\mu}(\varphi)\right) \tag{1a}$$

und

$$\eta = \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}}\left(A_1 J^{\nu}(\psi) + B_1 J^{-\nu}(\psi)\right) \tag{2a}$$

die vollständigen Integrale resp. der Gleichungen (1) und (2). Substituiren wir in die Gleichung (A) statt y und η vorerst die particulären Integrale

$$y = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi'}} J^{\mu}(\varphi)$$

und

$$\eta = \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}} J^{\nu}(\psi),$$

indem wir von dem Satze

$$\frac{\partial J^\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z} J^\nu(z) - J^{\nu+1}(z)$$

Gebrauch machen, so ergiebt sich

$$\text{(B)} \qquad \int (P-Q) \sqrt{\frac{\varphi\psi}{\varphi'\psi'}} J^\mu(\varphi) J^\nu(\psi) dz$$

$$= \sqrt{\frac{\varphi\psi}{\varphi'\psi'}} \Big\{ \varphi' J^{\mu+1}(\varphi) J^\nu(\psi) - \psi' J^\mu(\varphi) J^{\nu+1}(\psi)$$

$$- \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\psi'}{\psi} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi'}\right] J^\mu(\varphi) J^\nu(\psi) \Big\},$$

wo unter P und Q die obigen Ausdrücke zu verstehen sind.

3. Es werde beispielsweise

$$\varphi = k z^\varkappa \quad \text{und} \quad \psi = l z^\lambda$$

genommen, so ergiebt sich der Reihe nach:

$$P = k^2 \varkappa^2 z^{2\varkappa-2} - \frac{4\varkappa^2\mu^2 - 1}{4z^2};$$

$$Q = l^2 \lambda^2 z^{2\lambda-2} - \frac{4\lambda^2\nu^2 - 1}{4z^2};$$

$$P - Q = k^2 \varkappa^2 z^{2\varkappa-2} - l^2 \lambda^2 z^{2\lambda-2} - \frac{\varkappa^2\mu^2 - \lambda^2\nu^2}{z^2};$$

$$\sqrt{\frac{\varphi\psi}{\varphi'\psi'}} = \frac{z}{\sqrt{\varkappa\lambda}};$$

$$\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\psi'}{\psi} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi'} = \frac{\varkappa\mu - \lambda\nu}{z},$$

und wir erhalten nach Einführung dieser Werthe in die Gleichung (B):

$$\text{(C)} \qquad \int \left(k^2\varkappa^2 z^{2\varkappa-1} - l^2\lambda^2 z^{2\lambda-1} - \frac{\varkappa^2\mu^2 - \lambda^2\nu^2}{z}\right) J^\mu(kz^\varkappa) J^\nu(lz^\lambda) dz$$

$$= k\varkappa z^\varkappa J^{\mu+1}(kz^\varkappa) J^\nu(lz^\lambda) - l\lambda z^\lambda J^\mu(kz^\varkappa) J^{\nu+1}(lz^\lambda) - (\varkappa\mu - \lambda\nu) J^\mu(kz^\varkappa) J^\nu(lz^\lambda).$$

4. Setzt man, noch weiter specialisirend, in dieser Gleichung

$$\varkappa\mu = \lambda\nu = \alpha,$$

so ergiebt sich

$$\text{(D)} \qquad \int \left(\frac{k^2}{\mu^2} z^{\frac{2\alpha}{\mu}-1} - \frac{l^2}{\nu^2} z^{\frac{2\alpha}{\nu}-1}\right) J^\mu\left(kz^{\frac{\alpha}{\mu}}\right) J^\nu\left(lz^{\frac{\alpha}{\nu}}\right) dz$$

$$= \frac{k}{\alpha\mu} z^{\frac{\alpha}{\mu}} J^{\mu+1}\left(kz^{\frac{\alpha}{\mu}}\right) J^\nu\left(lz^{\frac{\alpha}{\nu}}\right) - \frac{l}{\alpha\nu} z^{\frac{\alpha}{\nu}} J^\mu\left(kz^{\frac{\alpha}{\mu}}\right) J^{\nu+1}\left(lz^{\frac{\alpha}{\nu}}\right).$$

Nehmen wir ferner in (C)

$$\varkappa = \lambda = 1,$$

so finden wir

(E) $$\int\left((k^2-l^2)z-\frac{\mu^2-\nu^2}{z}\right)J^\mu(kz)J^\nu(lz)\,dz$$
$$= z\left(kJ^{\mu+1}(kz)\,J^\nu(lz) - lJ^\mu(kz)\,J^{\nu+1}(lz)\right) - (\mu-\nu)J^\mu(kz)\,J^\nu(lz).$$

5. Wird in vorstehender Gleichung $\mu = \nu$ gesetzt, so kommt

(F) $$\int zJ^\nu(kz)J^\nu(lz)\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left(kJ^{\nu+1}(kz)\,J^\nu(lz) - lJ^\nu(kz)J^{\nu+1}(lz)\right)$$

eine Formel, welche schon länger bekannt ist*). Sie gilt, solange l von k verschieden ist. Wenn aber $l = k$ wird, so nimmt die rechte Seite die Form $\frac{0}{0}$ an. Bestimmen wir den $\frac{0}{0}$-Werth, indem wir Zähler und Nenner nach l differentiiren unter Anwendung des Satzes

$$\frac{\partial J^\nu(z)}{\partial z} = -\frac{\nu}{z}J^\nu(z) + J^{\nu-1}(z)$$

und schliesslich $l = k$ setzen, so erhalten wir:

(G) $$\int z\left(J^\nu(kz)\right)^2 dz = \frac{1}{2}z^2\left[\left(J^\nu(kz)\right)^2 - J^{\nu-1}(kz)\,J^{\nu+1}(kz)\right].$$

6. Lassen wir ferner in Gleichung (E) $\mu = -\nu$ werden, so erhalten wir zunächst

$$\int zJ^{-\nu}(kz)\,J^\nu(lz)\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left(kJ^{-\nu+1}(kz)\,J^\nu(lz) - lJ^{-\nu}(kz)J^{\nu+1}(lz)\right)$$
$$+\frac{2\nu}{k^2-l^2}J^{-\nu}(kz)\,J^\nu(lz),$$

oder, wenn wir

$$J^{\nu+1}(lz) = \frac{2\nu}{lz}J^\nu(lz) - J^{\nu-1}(lz)$$

einführen:

(H) $$\int zJ^{-\nu}(kz)J^\nu(lz)\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left(kJ^{-\nu+1}(kz)J^\nu(lz) + lJ^{-\nu}(kz)J^{\nu-1}(lz)\right).$$

Für $l = k$ wird diese Formel unbrauchbar; denn in Gemässheit des Satzes**)

$$J^\nu(z)\,J^{-\nu+1}(z) + J^{-\nu}(z)\,J^{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi$$

nimmt alsdann der Zähler der rechten Seite den von z unabhängigen Werth $\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$ an, während der Nenner verschwindet. Nun können wir aber statt der rechten Seite von (H), indem wir die Constante $-\frac{2}{(k^2-l^2)\pi}\sin\nu\pi$ aus der stets hinzugedachten willkürlichen Constante herausnehmen, auch schreiben:

---

*) Studien über die Bessel'schen Functionen S. 71.

**) Math. Annalen Bd. IV, S. 105.

$$\frac{1}{k^2-l^2}\left\{kzJ^{-\nu+1}(kz)J^{\nu}(lz)+lzJ^{-\nu}(kz)J^{\nu-1}(lz)-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi\right\}.$$

Da dieser Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird für $l = k$, so kann sein Werth durch das gewöhnliche Verfahren bestimmt werden. Differentiirt man daher Zähler und Nenner desselben nach l, indem man von der Formel

$$\frac{\partial J^{\nu}(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z}J^{\nu}(z) - J^{\nu+1}(z)$$

Gebrauch macht, und setzt alsdann $l = k$, so erhält man zunächst

$$\frac{1}{2}z^2\left(J^{\nu}(kz)J^{-\nu}(kz)+J^{\nu+1}(kz)J^{-\nu+1}(kz)\right)$$
$$-\frac{\nu z}{2k}\left(J^{\nu}(kz)J^{-\nu+1}(kz)+J^{-\nu}(kz)J^{\nu-1}(kz)\right),$$

oder, mit Rücksicht auf den oben citirten Satz:

$$\frac{1}{2}z^2\left(J^{\nu}(kz)\,J^{-\nu}(kz)+J^{\nu+1}(kz)\,J^{-\nu+1}(kz)\right)-\frac{\nu}{\pi k^2}\sin\nu\pi.$$

Wird nun die Constante $-\frac{\nu}{\pi k^2}\sin\nu\pi$ in die willkürliche Constante aufgenommen, so erhalten wir schliesslich:

$$\text{(J)}\quad \int zJ^{\nu}(kz)J^{-\nu}(kz)\,dz = \frac{1}{2}z^2\left(J^{\nu}(kz)J^{-\nu}(kz)+J^{\nu+1}(kz)J^{-\nu+1}(kz)\right).$$

Wird ν positiv oder negativ ganz oder Null $(= \pm n)$, so fallen die Gleichungen (H) und (J) vermöge der Relation

$$J^{-n}(z) = (-1)^n J^n(z)$$

resp. mit den Gleichungen (F) und (G) zusammen.

Diese Gleichungen (F) und (G) gelten übrigens, wie die Gleichung (B), aus welcher sie entspringen, in unveränderter Gestalt auch für *Bessel'sche Functionen zweiter Art*, d. h. es ist:

$$\text{(K)}\quad \int zY^n(kz)\,Y^n(lz)\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left(k\,Y^{n+1}(kz)\,Y^n(lz) - l\,Y^n(kz)\,Y^{n+1}(lz)\right)$$

und

$$\text{(L)}\quad \int z\left(Y^n(kz)\right)^2 dz = \frac{1}{2}z^2\left[\left(Y^n(kz)\right)^2 - Y^{n-1}(kz)\,Y^{n+1}(kz)\right].$$

7. Da in der Gleichung (A) y und η beliebige particuläre Integrale der von einander unabhängigen Differentialgleichungen (1) und (2) sein können, so gilt die Gleichung (B) und die aus ihr abgeleiteten namentlich auch dann, wenn die eine Bessel'sche Function von der ersten, die andere von der zweiten Art ist.

Insbesondere hat man, analog den Gleichungen (F) und (K):

$$\text{(M)}\quad \int zJ^n(kz)\,Y^n(lz)\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left(kJ^{n+1}(kz)\,Y^n(lz) - lJ^n(kz)\,Y^{n+1}(lz)\right)$$

eine Formel, welche für $l = k$ ihre Brauchbarkeit verliert, weil alsdann vermöge des Satzes*)

$$J^{n+1}(z)\,Y^n(z) - J^n(z)\,Y^{n+1}(z) = \frac{1}{z}$$

der Zähler des Ausdruckes zur rechten $= 1$ wird, während der Nenner verschwindet. Hieraus ist aber ersichtlich, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{k^2 - l^2}\Big(kz\,J^{n+1}(kz)\,Y^n(lz) - lz\,J^n(kz)\,Y^{n+1}(lz) - 1\Big)$$

für $l = k$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, welche sich unter Benützung des Gesetzes

$$\frac{\partial Y^n(z)}{\partial z} = -\frac{n}{z}\,Y^n(z) + Y^{n-1}(z)$$

leicht auf

$$\frac{1}{2}z^2\Big(J^n(kz)\,Y^n(kz) - J^{n+1}(kz)\,Y^{n-1}(kz)\Big)$$
$$+\frac{nz}{2k}\Big(J^{n+1}(kz)\,Y^n(kz) - J^n(kz)\,Y^{n+1}(kz)\Big),$$

oder, im Hinblick auf den vorhin angeführten Satz, auf

$$\frac{1}{2}z^2\Big(J^n(kz)\,Y^n(kz) - J^{n+1}(kz)\,Y^{n-1}(kz)\Big) + \frac{n}{2k^2}$$

zurückführen lässt. Wir erhalten also, wenn wir $\frac{n}{2k^2}$ in der willkürlichen Constanten aufgehen lassen:

$$\text{(N)}\quad \int z\,J^n(kz)\,Y^n(kz)\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big(J^n(kz)\,Y^n(kz) - J^{n+1}(kz)\,Y^{n-1}(kz)\Big),$$

oder auch, da hier J und Y mit einander vertauscht werden können:

$$\text{(N')}\quad \int z\,J^n(kz)\,Y^n(kz)\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big(J^n(kz)\,Y^n(kz) - J^{n-1}(kz)\,Y^{n+1}(kz)\Big).$$

Dass die Ausdrücke zur Rechten in (N) und (N') sich, wie es sein muss, nur durch eine Constante von einander unterscheiden, kann leicht nachgewiesen werden.

8. Wir setzen nun in der Gleichung (E) $l = k$, und erhalten sofort

$$\text{(O)}\quad \int \frac{1}{z}\,J^\mu(kz)\,J^\nu(kz)\,dz = \frac{kz}{\mu^2-\nu^2}\Big(J^\mu(kz)\,J^{\nu+1}(kz) - J^{\mu+1}(kz)\,J^\nu(kz)\Big)$$
$$+\frac{1}{\mu+\nu}\,J^\mu(kz)\,J^\nu(kz).$$

Für $\mu = \nu$ nimmt das erste Glied rechts die Form $\frac{0}{0}$ an. Um seinen Werth zu bestimmen, differentiiren wir Zähler und Nenner nach μ, und erhalten, nachdem $\mu = \nu$ gesetzt ist:

---

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 108.

$$\frac{kz}{2\nu}\left(J^{\nu+1}(kz)\,\frac{\partial J^{\nu}(kz)}{\partial\nu} - J^{\nu}(kz)\cdot\frac{\partial J^{\nu+1}(kz)}{\partial\nu}\right).$$

Macht man nun Gebrauch von jener Function $\mathfrak{J}^{\nu}(z)$, welche ich früher*) in die Theorie der Bessel'schen Functionen eingeführt habe, und deren Zusammenhang mit der Bessel'schen Function $J^{\nu}(z)$ ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial J^{\nu}(z)}{\partial\nu} = J^{\nu}(z)\log z + \mathfrak{J}^{\nu}(z),$$

so wird der vorige Ausdruck

$$\frac{kz}{2\nu}\left(J^{\nu+1}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu}(kz) - J^{\nu}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu+1}(kz)\right),$$

und wir erhalten die für jedes ν mit Ausnahme von $\nu = 0$ giltige Formel:

$$(P)\quad \int\frac{1}{z}\left(J^{\nu}(kz)\right)^2 dz = \frac{kz}{2\nu}\left(J^{\nu+1}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu}(kz) - J^{\nu}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu+1}(kz)\right)$$
$$\cdot + \frac{1}{2\nu}\left(J_{\nu}(kz)\right)^2,$$

wo $\mathfrak{J}^{\nu}(z)$, so lange $\nu > -\frac{1}{2}$ ist, definirt wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{J}^{\nu}(z) = -\left(\psi(\nu - \tfrac{1}{2}) + \log 2\right)J^{\nu}(z)$$
$$+ \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\log\sin^2\omega\cdot d\omega$$

und $\psi(x)$ die Bedeutung

$$\psi(x) = \frac{\partial\log\Gamma(1+x)}{\partial x}$$

hat. Ist aber ν negativ und $< -\frac{1}{2}$, etwa $= -n + \nu'$, wo $\nu' > -\frac{1}{2}$ ist, so hat man zu nehmen:

$$\mathfrak{J}^{-n+\nu'}(z) = (-1)^n\mathfrak{J}^{n+\nu'} + (-1)^n\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^{p+1}$$
$$\cdot\frac{n^{p+1|-1}\cdot\nu'^{p+1|-1}}{(p+1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{p+1}\left(\mathfrak{J}^{n+\nu'-p-1} + J^{n+\nu'-p-1}\sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{\nu'-q}\right).$$

9. Wenn ν eine ganze Zahl ($= n$) ist, so ist das Integral (P) durch Bessel'sche Functionen erster Art ausdrückbar. Um dies nachzuweisen, führen wir statt der Function $\mathfrak{J}^{n}(z)$ die Function

$$L^{n}(z) = J^{n}(z)\cdot\log z - \tfrac{1}{2}\sum\frac{n^{p+1|-1}}{p+1}\left(\frac{2}{z}\right)^{p+1}J^{n-p-1}(z)$$

---

*) Studien über die Bessel'schen Functionen S. 77ff.

ein, welche bekanntlich*) zu $\mathfrak{J}^n(z)$ hinzugefügt die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^n(z)$ liefert, indem wir

$$\mathfrak{J}^n(z) = Y^n(z) - L^n(z)$$

in die Gleichung (P) substituiren. Das erste Glied des Ausdrucks zur rechten dieser Gleichung wird alsdann

$$= \frac{kz}{2n}\Big(J^{n+1}(kz)\,Y^n(kz) - J^n(kz)\,Y^{n+1}(kz)$$
$$+ J^n(kz)\,L^{n+1}(kz) - J^{n+1}(kz)\,L^n(kz)\Big)$$

oder, da

$$J^{n+1}(kz)\,Y^n(kz) - J^n(kz)\,Y^{n+1}(kz) = \frac{1}{kz}$$

ist,

$$= \frac{1}{2n} + \frac{kz}{2n}\Big(J^n(kz)\,L^{n+1}(kz) - J^{n+1}(kz)\,L^n(kz)\Big).$$

Unterlassen wir, da es sich um ein unbestimmtes Integral handelt, die Constante $\frac{1}{n}$ anzuschreiben, so haben wir jetzt:

$$(\mathrm{Q}') \quad \int \frac{1}{z}\big(J^n(kz)\big)^2 dz = \frac{kz}{2n}\Big(J^n(kz)\,L^{n+1}(kz) - J^{n+1}(kz)\,L^n(kz)\Big)$$
$$+ \frac{1}{2n}\big(J^n(kz)\big)^2,$$

womit, im Hinblick auf die obige Definition der Function $L^n(z)$, die vorausgeschickte Behauptung bereits bewiesen ist. Diese Formel lässt sich, indem man statt der L die entsprechenden endlichen Reihen wirklich einsetzt, leicht noch weiter ausarbeiten, und zwar erhält man

$$(\mathrm{Q}) \quad \int \frac{1}{z}\big(J^n(kz)\big)^2 dz = \tfrac{1}{2}\Big[J^{n-1}(kz)\,J^{n+1}(kz) - \big(J^n(kz)\big)^2\Big]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum \frac{(n-1)^{p|-1}}{p+2}\left(\frac{2}{kz}\right)^{p+1}\Big[(n-p-1)\,J^{n-p-2}(kz)\,J^{n+1}(kz)$$
$$- (n+1)\,J^{n-p-1}(kz)\,J^n(kz)\Big],$$

eine Formel, welche für jedes positiv ganze n, jedoch nicht für $n = 0$ Geltung hat.

Setzen wir beispielsweise $n = 1$, so ergiebt sich:

$$\int \frac{1}{z}\big(J^1(kz)\big)^2 dz = \frac{1}{2}\Big(J^0(kz)\,J^2(kz) - \big(J^1(kz)\big)^2 - \frac{2}{kz}\,J^0(kz)\,J^1(kz)\Big),$$

oder, weil

$$\frac{2}{kz}\,J^1(kz) - J^2(kz) = J^0(kz)$$

ist:

---

*) Studien etc. S. 82 ff.

$$(\mathrm{Q}_1)\qquad \int \frac{1}{z}\left(J^1(kz)\right)^2 dz = -\frac{1}{2}\left(\left(J^0(kz)\right)^2 + \left(J^1(kz)\right)^2\right).$$

Man findet ferner für $n = 2$:

$$\int \frac{1}{z}\left(J^2(kz)\right)^2 dz = \frac{1}{2}\left[J^1(kz)\,J^3(kz) - \left(J^2(kz)\right)^2\right] + \frac{1}{2kz} J^0(kz)\,J^3(kz)$$

$$- \frac{3}{2kz} J^1(kz) J^2(kz) - \frac{2}{(kz)^2} J^0(kz)\,J^2(kz)$$

$$= -\frac{1}{2}(J^2)^2 - \frac{1}{2}J^1\left(\frac{4}{kz}J^2 - J^3\right) + \frac{1}{2kz}J^1J^2 - \frac{1}{2kz}J^0\left(\frac{4}{kz}J^2 - J^3\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(J^1)^2 - \frac{1}{2}(J^2)^2 + \frac{1}{2kz}J^1J^2 - \frac{1}{2kz}J^0J^1$$

$$= -\frac{1}{2}(J^1)^2 - \frac{1}{2}(J^2)^2 + \frac{1}{2kz}J^1J^2 - \frac{1}{2kz}J^1\left(\frac{2}{kz}J^1 - J^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(J^1)^2 - \frac{1}{2}(J^2)^2 + \frac{1}{kz}J^1J^2 - \frac{1}{(kz)^2}(J^1)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(J^1)^2 - \frac{1}{4}(J^2)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{kz}J^1 - J^2\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(J^1)^2 - \frac{1}{4}(J^2)^2 - \frac{1}{4}(J^0)^2$$

so dass man endlich hat

$$(\mathrm{Q}_2)\qquad \int \frac{1}{z}\left(J^2(kz)\right)^2 dz = -\frac{1}{4}\left[\left(J^0(kz)\right)^2 + 2\left(J^1(kz)\right)^2 + \left(J^2(kz)\right)^2\right]$$

u. s. f.

10. In der Gleichung (O) schreiben wir jetzt $-\nu$ statt ν und erhalten zunächst die Gleichung:

$$\int \frac{1}{z} J^\mu(kz)\,J^{-\nu}(kz)\,dz = \frac{kz}{\mu^2-\nu^2}\left(J^\mu(kz)J^{-\nu+1}(kz) - J^{\mu+1}(kz)\,J^{-\nu}(kz)\right)$$

$$+ \frac{1}{\mu-\nu} J^\mu(kz)\,J^{-\nu}(kz),$$

welche durch Einführung von

$$J^{\mu+1}(kz) = \frac{\mu+1}{kz} J^\mu(kz) - J^{\mu-1}(kz)$$

sofort die Gestalt

$$(\mathrm{O}')\quad \int \frac{1}{z} J^\mu(kz)\,J^{-\nu}(kz)\,dz = \frac{kz}{\mu^2-\nu^2}\left(J^\mu(kz)\,J^{-\nu+1}(kz) + J^{\mu-1}(kz)\,J^{-\nu}(kz)\right)$$

$$- \frac{1}{\mu+\nu} J^\mu(kz)\,J^{-\nu}(kz)$$

annimmt.

Für $\mu = \nu$ wird der Nenner des ersten Gliedes Null, während der Zähler

$$= \frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$$

wird. Mit Rücksicht auf das Vorhandensein einer willkürlichen Constanten können wir statt dieses ersten Gliedes auch setzen

$$\frac{1}{\mu^2-\nu^2}\left(kz\,J^\mu(kz)\,J^{-\nu+1}(kz)+kz\,J^{\mu-1}(kz)\,J^{-\nu}(kz)-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi\right).$$

Dieser Ausdruck wird $\frac{0}{0}$ für $\mu=\nu$; bestimmen wir seinen Werth auf dieselbe Weise wie oben, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{kz}{2\nu}\left(J^{-\nu+1}(kz)\,\frac{\partial J^\nu(kz)}{\partial\nu}+J^{-\nu}(kz)\,\frac{\partial J^{\nu-1}(kz)}{\partial\nu}\right)\\ &=\frac{kz}{2\nu}\Big(J^{-\nu+1}(kz)\,\mathfrak{J}^\nu(kz)+J^{-\nu}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu-1}(kz)\\ &\qquad+[J^\nu(kz)\,J^{-\nu+1}(kz)+J^{\nu-1}(kz)\,J^{-\nu}(kz)]\log kz\Big)\\ &=\frac{kz}{2\nu}\left(J^{-\nu+1}(kz)\,\mathfrak{J}^\nu(kz)+J^{-\nu}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu-1}(kz)\right)+\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\log kz\,.\end{aligned}$$

Wir finden also die Formel

$$\text{(R)}\quad\begin{aligned}\int\frac{1}{z}\,J^\nu(kz)\,J^{-\nu}(kz)\,dz&=\frac{kz}{2\nu}\left(J^{-\nu+1}(kz)\,\mathfrak{J}^\nu(kz)+J^{-\nu}(kz)\,\mathfrak{J}^{\nu-1}(kz)\right)\\ &\quad-\frac{1}{2\nu}\,J^\nu(kz)\,J^{-\nu}(kz)+\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\log kz\end{aligned}$$

welche für jedes ν mit Ausnahme von $\nu=0$ gilt. Für positiv ganze $\nu\,(=n)$ wird sie identisch mit der Formel (Q).

11. Die Gleichungen (O) und (Q) behalten ihre Geltung auch für Bessel'sche Functionen zweiter Art. Ist die eine Bessel'sche Function von erster, die andere von zweiter Art, so hat man ebenfalls ganz analog die Formel

$$\text{(S)}\quad\begin{aligned}\int\frac{1}{z}\,J^m(kz)\,Y^n(kz)\,dz&=\frac{kz}{m^2-n^2}\left(J^m(kz)\,Y^{n+1}(kz)-J^{m+1}(kz)\,Y^n(kz)\right)\\ &\quad+\frac{1}{m+n}\,J^m(kz)\,Y^n(kz),\end{aligned}$$

aus welcher durch ähnliche Betrachtungen wie oben die beiden folgenden

$$\text{(T')}\quad\int\frac{1}{z}\,J^n(kz)\,Y^n(kz)\,dz=\frac{kz}{2n}\,(Y^n L^{n+1}-Y^{n+1}L^n)-\frac{1}{2n}\log kz$$

und

$$\text{(T)}\quad\begin{aligned}\int\frac{1}{z}\,J^n(kz)\,Y^n(kz)\,dz&=\frac{1}{2}\left(J^{n-1}(kz)\,Y^{n+1}(kz)-J^n(kz)\,Y^n(kz)\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum\frac{(n-1)^{p|-1}}{p+2}\left(\frac{2}{kz}\right)^{p+1}\Big[(n-p-1)\,J^{n-p-2}(kz)\,Y^{n+1}(kz)\\ &\qquad-(n+1)\,J^{n-p-1}(kz)\,Y^n(kz)\Big]\end{aligned}$$

sich herleiten, in welchen J und Y selbstverständlich auch mit einander vertauscht werden können.

III. Ermittelung solcher Integrale nach anderer Methode.

1. Durch Ausführung der angedeuteten Differentiation überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\Big(z^m J^\mu(z) J^\nu(z)\Big) = -z^m\Big(J^\mu(z)J^{\nu+1}(z)+J^\nu(z)J^{\mu+1}(z)\Big) + (m+\mu+\nu)z^{m-1}J^\mu(z)J^\nu(z).$$

Setzt man darin $\mu+1$ statt μ und $\nu+1$ statt ν, so erhält man zunächst

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z^m J^{\mu+1}J^{\nu+1}\right) = -z^m\left(J^{\mu+1}J^{\nu+2}+J^{\nu+1}J^{\mu+2}\right) + (m+\mu+\nu+2)z^{m-1}J^{\mu+1}J^{\nu+1},$$

oder, wenn man

$$J^{\mu+2} = \frac{2(\mu+1)}{z}J^{\mu+1} - J^\mu$$

und

$$J^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{z}J^{\nu+1} - J^\nu$$

einführt, und in geeigneter Weise zusammenfasst:

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\Big(z^m J^{\mu+1}(z) J^{\nu+1}(z)\Big) = z^m\Big(J^\mu(z)J^{\nu+1}(z)+J^\nu(z)J^{\mu+1}(z)\Big) + (m-\mu-\nu-2)z^{m-1}J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z).$$

Addirt man nun die beiden Gleichungen (1) und (2), so ergiebt sich

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\Big[z^m\Big(J^\mu(z)J^\nu(z)+J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z)\Big)\Big]$$
$$= z^{m-1}\left[(m+\mu+\nu)J^\mu(z)J^\nu(z) + (m-\mu-\nu-2)J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z)\right].$$

2. Lässt man in dieser Gleichung $m=\mu+\nu+2$ werden, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\mu+\nu+2}(J^\mu J^\nu + J^{\mu+1}J^{\nu+1})\right] = 2(\mu+\nu+1)z^{\mu+\nu+1}J^\mu J^\nu,$$

oder, wenn man beiderseits integrirt:

$$(a)\qquad \int z^{\mu+\nu+1}J^\mu(z)J^\nu(z)\,dz = \frac{z^{\mu+\nu+2}}{2(\mu+\nu+1)}\Big(J^\mu(z)J^\nu(z)+J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z)\Big).$$

Setzt man ferner in (3) $m=-\mu-\nu$, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{-\mu-\nu}(J^\mu J^\nu + J^{\mu+1}J^{\nu+1})\right] = -2(\mu+\nu+1)z^{-\mu-\nu-1}J^{\mu+1}J^{\nu+1},$$

oder, nach beiderseitiger Integration:

$$(b)\qquad \int z^{-\mu-\nu-1}J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z)\,dz$$
$$= -\frac{z^{-\mu-\nu}}{2(\mu+\nu+1)}\Big(J^\mu(z)J^\nu(z)+J^{\mu+1}(z)J^{\nu+1}(z)\Big).$$

3. Für $\mu = \nu$ ergiebt sich aus (a):

$$\text{(c)} \quad \int z^{2\nu+1}\left(J^\nu(z)\right)^2 dz = \frac{z^{2\nu+2}}{2(2\nu+1)}\left[\left(J^\nu(z)\right)^2 + \left(J^{\nu+1}(z)\right)^2\right],$$

und aus (b):

$$\text{(d)} \quad \int z^{-2\nu-1}\left(J^{\nu+1}(z)\right)^2 dz = -\frac{z^{-2\nu}}{2(2\nu+1)}\left[\left(J^\nu(z)\right)^2 + \left(J^{\nu+1}(z)\right)^2\right];$$

macht man aber $\mu = -\nu$, so geht aus (a) die bereits im vorigen Abschnitt gefundene Gleichung (I), nämlich

$$\int z J^\nu(z) J^{-\nu}(z)\, dz = \frac{1}{2} z^2 \left[J^\nu(z) J^{-\nu}(z) + J^{\nu+1}(z) J^{-\nu+1}(z)\right]$$

hervor, und aus (b) die Gleichung

$$\int \frac{1}{z} J^{\nu+1}(z) J^{-\nu+1}(z)\, dz = -\frac{1}{2}\left[J^\nu(z) J^{-\nu}(z) + J^{\nu+1}(z) J^{-\nu+1}(z)\right]$$

welche in der Gleichung (O) des vorigen Abschnitts als specieller Fall enthalten ist.

4. Wir setzen nun in der Gleichung (3) $m = 0$, und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(J^\mu J^\nu + J^{\mu+1} J^{\nu+1}\right) = \frac{1}{z}\left[(\mu+\nu) J^\mu J^\nu - (\mu+\nu+2) J^{\mu+1} J^{\nu+1}\right].$$

woraus dann der Reihe nach weiter folgt:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(J^{\mu+1} J^{\nu+1} + J^{\mu+2} J^{\nu+2}\right) = \frac{1}{z}\left[(\mu+\nu+2) J^{\mu+1} J^{\nu+1} - (\mu+\nu+4) J^{\mu+2} J^{\nu+2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(J^{\mu+2} J^{\nu+2} + J^{\mu+3} J^{\nu+3}\right) = \frac{1}{z}\left[(\mu+\nu+4) J^{\mu+2} J^{\nu+2} - (\mu+\nu+6) J^{\mu+3} J^{\nu+3}\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(J^{\mu+n} J^{\nu+n} + J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left[(\mu+\nu+2n) J^{\mu+n} J^{\nu+n} - (\mu+\nu+2n+2) J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1}\right].$$

Addirt man alle diese Gleichungen und integrirt zu beiden Seiten, so ergiebt sich

$$\text{(4)} \quad J^\mu J^\nu + J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1} + 2\sum_{p=0}^{p=n-1} J^{\mu+p+1} J^{\nu+p+1}$$

$$= (\mu+\nu)\int \frac{1}{z} J^\mu J^\nu dz - (\mu+\nu+2n+2)\int \frac{1}{z} J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1} dz.$$

Die rechts vorkommenden Integrale sind aber aus der oben entwickelten Gleichung (O) bereits bekannt. Setzt man statt ihrer die Ausdrücke, welche sich aus jener Formel (O) ergeben, so erhält man (bis auf eine etwa noch hinzuzufügende Constante):

$$J^\mu J^\nu + J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1} + 2\sum_{p=0}^{p=n-1} J^{\mu+p+1} J^{\nu+p+1}$$
$$= \frac{z}{\mu-\nu}(J^\mu J^{\nu+1} - J^{\mu+1} J^\nu) + J^\mu J^\nu$$
$$- \frac{z}{\mu-\nu}(J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+2} - J^{\mu+n+2} J^{\nu+n+1}) - J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+1},$$

und gelangt daher, nach Vornahme geeigneter Reductionen, zur folgenden interessanten Summirungsformel:

$$(5) \qquad 2\sum_{p=0}^{p=n} J^{\mu+p+1}(z) J^{\nu+p+1}(z)$$
$$= \frac{z}{\mu-\nu}\Big(J^\mu(z) J^{\nu+1}(z) - J^{\mu+1}(z) J^\nu(z) - J^{\mu+n+1} J^{\nu+n+2} + J^{\mu+n+2} J^{\nu+n+1}\Big).$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, wovon man sich durch Betrachtung specieller Fälle leicht überzeugen kann.

Bestimmt man den $\frac{0}{0}$-Werth, welcher für $\mu = \nu$ zur Rechten auftritt, so findet man

$$(6) \quad 2\sum_{p=0}^{p=n}\Big(J^{\nu+p+1}(z)\Big)^2 = z\Big(J^{\nu+1}(z)\mathfrak{Z}^\nu(z) - J^\nu(z)\mathfrak{Z}^{\nu+1}(z)$$
$$- J^{\nu+n+2}(z)\mathfrak{Z}^{\nu+n+1}(z) + J^{\nu+n+1}(z)\mathfrak{Z}^{\nu+n+2}(z)\Big).$$

Ist ν positiv ganz ($= m$), so kann man hierin

$$\mathfrak{Z}^m(z) = Y^m(z) - L^m(z)$$

substituiren. Der Ausdruck rechts wird alsdann

$$z(J^{m+1} Y^m - J^m Y^{m+1} - J^{m+n+2} Y^{m+n+1} + J^{m+n+1} Y^{m+n+2}$$
$$- J^{m+1} L^m + J^m L^{m+1} + J^{m+n+2} L^{m+n+1} - J^{m+n+1} L^{m+n+2}).$$

Da nun

$$J^{m+1} Y^m - J^m Y^{m+1} = J^{m+n+2} Y^{m+n+1} - J^{m+n+1} Y^{m+n+2} = \frac{1}{z}$$

ist, so ergiebt sich

$$(6\text{a}) \quad 2\sum_{p=0}^{p=n}\Big(J^{m+p+1}(z)\Big)^2 = z\Big(J^m(z) L^{m+1}(z) - J^{m+1}(z) L^m(z)$$
$$- J^{m+n+1}(z) L^{m+n+2}(z) + J^{m+n+2}(z) L^{m+n+1}(z)\Big).$$

Die Formeln (6) und (6a) würden sich übrigens unter Benützung der Gleichungen (P) und (Q') des vorigen Abschnitts auch direct aus der Gleichung (4) ergeben haben.

5. Lassen wir in der Gleichung (4) $\mu = \nu = 1$ werden, so erhalten wir zunächst

$$\int \frac{1}{z}(J^{n+2})^2\,dz = \frac{1}{n+2}\int \frac{1}{z}(J^1)^2\,dz - \frac{1}{2(n+2)}[(J^1)^2 + (J^{n+2})^2]$$
$$- \frac{1}{n+2}\sum_{p=0}^{p=n-1}(J^{p+2})^2.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{1}{z}(J^1)^2\,dz$$

sei es aus (Q_1) des vorigen, sei es aus (b) des gegenwärtigen Abschnitts, bereits bekannt, und zwar hat man

$$\int \frac{1}{z}(J^1)^2\,dz = -\frac{1}{2}[(J^0)^2 + (J^1)^2].$$

Führt man diesen Werth in die vorige Gleichung ein, so wird sie

$$\int \frac{1}{z}(J^{n+2})^2\,dz = -\frac{1}{2(n+2)}[(J^0)^2 + 2(J^1)^2 + (J^{n+2})^2] - \frac{1}{n+2}\sum_{p=0}^{p=n-1}(J^{p+2})^2$$

oder, wenn man das mit $2(J^1)^2$ behaftete Glied unter das Summenzeichen aufnimmt, und lieber n statt $n+2$ schreibt:

$$(c)\qquad \int \frac{1}{z}\left(J^n(z)\right)^2 dz = -\frac{1}{2n}\left[\left(J^0(z)\right)^2 + \left(J^n(z)\right)^2\right] - \frac{1}{n}\sum_{p}^{p=n-2}(J^{p+1})^2.$$

Wir erkennen somit, dass die in der Gleichung (Q) des vorigen Abschnitts vorkommende ziemlich verwickelt gebaute endliche Reihe auf die obige weit einfachere zurückführbar ist, was aus den dort gegebenen Beispielen (Q_1) und (Q_2) übrigens schon vermuthet werden konnte.

6. Wir gehen jetzt aus von der leicht zu beweisenden Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(z^m J^\mu(z) J^{\nu+1}(z)\right) = z^m\left(J^\mu(z)J^\nu(z) - J^{\mu+1}(z)\,J^{\nu+1}(z)\right)$$
$$+ (m+\mu-\nu-1)z^{m-1}J^\mu(z)J^{\nu+1}(z);$$

durch Vertauschung von μ und ν geht aus ihr hervor:

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(z^m J^{\mu+1}(z)\,J^\nu(z)\right) = z^m\left(J^\mu(z)\,J^\nu(z) - J^{\mu+1}(z)\,J^{\nu+1}(z)\right)$$
$$+ (m-\mu+\nu-1)\,z^{m-1}J^{\mu+1}(z)J^\nu(z).$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so ergiebt sich

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[z^m\left(J^\mu(z)J^{\nu+1}(z) - J^{\mu+1}(z)\,J^\nu(z)\right)\right]$$
$$= z^{m-1}[(m+\mu-\nu-1)J^\mu(z)J^{\nu+1}(z) - (m-\mu+\nu-1)J^{\mu+1}(z)J^\nu(z)].$$

Setzen wir nun $m = \mu - \nu + 1$, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial z}[z^{\mu-\nu+1}(J^\mu J^{\nu+1} - J^{\mu+1}J^\nu)] = 2(\mu-\nu)z^{\mu-\nu}J^\mu J^{\nu+1}$$

oder, wenn man beiderseits integrirt und $\nu - 1$ statt ν schreibt:

(f) $$\int z^{\mu-\nu+1} J^\mu(z)\, J^\nu(z)\, dz = \frac{z^{\mu-\nu+2}}{2(\mu-\nu+1)}\left(J^\mu(z)\, J^\nu(z) - J^{\mu+1}(z)\, J^{\nu-1}(z)\right)$$

aus welcher Formel für $\mu = \nu$ die früher (II. G) bereits gefundene

$$\int z (J^\nu)^2 dz = \frac{1}{2} z^2 [(J^\nu)^2 - J^{\nu+1} J^{\nu-1}]$$

hervorgeht. Die Substitution $m = -\mu + \nu + 1$ führt zu dem nämlichen Resultat.

7. Nimmt man in der Gleichung (9) $m = 0$, so wird sie

$$\frac{\partial}{\partial z}(J^\mu J^{\nu+1} - J^{\mu+1} J^\nu) = \frac{1}{z}[(\mu-\nu-1) J^\mu J^{\nu+1} + (\mu-\nu+1) J^{\mu+1} J^\nu].$$

Daraus entspringt, wenn man nach und nach $\mu+1,\ \mu+2, \cdots \mu+n$ statt μ, und gleichzeitig resp. $\nu-1,\ \nu-2, \cdots \nu-n$ statt ν setzt, die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial z}(J^{\mu+1} J^\nu - J^{\mu+2} J^{\nu-1}) = \frac{1}{z}[(\mu-\nu+1) J^{\mu+1} J^\nu + (\mu-\nu+3) J^{\mu+2} J^{\nu-1}]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(J^{\mu+2} J^{\nu-1} - J^{\mu+3} J^{\nu-2}) = \frac{1}{z}[(\mu-\nu+3) J^{\mu+2} J^{\nu-1} + (\mu-\nu+5) J^{\mu+3} J^{\nu-2}]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(J^{\mu+n} J^{\nu-n+1} - J^{\mu+n+1} J^{\nu-n})$$

$$= \frac{1}{z}[(\mu-\nu+2n-1) J^{\mu+n} J^{\nu-n+1} + (\mu-\nu+2n+1) J^{\mu+n+1} J^{\nu-n}].$$

Addirt man alle diese Gleichungen, nachdem die zweite, vierte, sechste u. s. w. mit -1 multiplicirt worden, und integrirt zu beiden Seiten, so erhält man

(10) $$J^\mu J^{\nu+1} - (-1)^n J^{\mu+n+1} J^{\nu-n} - 2 \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p J^{\mu+p+1} J^{\nu-p}$$

$$= (\mu-\nu-1) \int \frac{1}{z} J^\mu J^{\nu+1} dz + (-1)^n (\mu-\nu+2n+1) \int \frac{1}{z} J^{\mu+n+1} J^{\nu-n} dz.$$

Die Werthe der zur Rechten vorkommenden Integrale sind aber oben (Abschnitt II, Formel (O)) bereits gefunden. Substituirt man statt ihrer die nach Massgabe jener Formel ermittelten Ausdrücke, so wird die rechte Seite der vorstehenden Gleichung zunächst

$$\frac{z}{\mu+\nu+1}(J^\mu J^{\nu+2} - J^{\mu+1} J^{\nu+1}) + \frac{\mu-\nu-1}{\mu+\nu+1} J^\mu J^{\nu+1}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{z}{\mu+\nu+1}(J^{\mu+n+1} J^{\nu-n+1} - J^{\mu+n+2} J^{\nu-n})$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{\mu-\nu+2n+1}{\mu+\nu+1} J^{\mu+n+1} J^{\nu-n},$$

oder, wenn man

$$J^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{z} J^{\nu+1} - J^{\nu}$$

und

$$J^{\mu+n+2} = \frac{2(\mu+n+1)}{z} J^{\mu+n+1} - J^{\mu+n}$$

setzt und reducirt

$$-\frac{z}{\mu+\nu+1}\left(J^{\mu}J^{\nu} + J^{\mu+1}J^{\nu+1}\right)$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{z}{\mu+\nu+1}\left(J^{\mu+n}J^{\nu-n} + J^{\mu+n+1}J^{\nu-n+1}\right).$$

Es ergiebt sich also schliesslich, wenn man noch $\mu-1$ statt μ und $n+1$ statt n schreibt:

$$(11)\qquad 2\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p J^{\mu+p}(z)\,J^{\nu-p}(z)$$

$$= \frac{z}{\mu+\nu}\Big(J^{\mu-1}(z)J^{\nu}(z) + J^{\mu}(z)J^{\nu+1}(z) + (-1)^n J^{\mu+n}(z)\,J^{\nu-n-1}(z)$$

$$+(-1)^n J^{\mu+n+1}(z)\,J^{\nu-n}(z)\Big)$$

eine Summationsformel, welche zu der oben entwickelten (Gl. (5)) das Gegenstück bildet. Auch hier ist eine Constante nicht beizufügen.

8. Sämmtliche in diesem Abschnitt entwickelten Gleichungen gelten selbstverständlich auch dann, wenn die vorkommenden Bessel'schen Functionen von der zweiten Art sind. Ja sie bewahren ihre Giltigkeit auch für den Fall, dass die eine Bessel'sche Function von der ersten, die andere von der zweiten Art ist. Namentlich wollen wir hervorheben, dass die Gleichungen

$$(g)\ \int z^{m+n+1} J^m(z)\,Y^n(z)\,dz = \frac{z^{m+n+2}}{2(m+n+1)}\Big(J^m(z)\,Y^n(z) + J^{m+1}(z)\,Y^{n+1}(z)\Big),$$

$$(h)\ \int z^{m-n-1} J^{m+1}(z)\,Y^{n+1}(z)\,dz$$

$$= -\frac{z^{-m-n}}{2(m+n+1)}\Big(J^m(z)\,Y^n(z) - J^{m+1}(z)\,Y^{n-1}(z)\Big),$$

$$(i)\ \int z^{m-n+1} J^m(z)\,Y^n(z)\,dz = \frac{z^{m-n+2}}{2(m-n+1)}\Big(J^m(z)\,Y^n(z) - J^{m+1}(z)\,Y^{n-1}(z)\Big),$$

$$(k)\ \int \frac{1}{z} J^n(z)\,Y^n(z)\,dz = -\frac{1}{2n}\Big(J^0(z)\,Y^0(z) + J^n(z)\,Y^n(z)\Big)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-2} J^{p+1}(z)\,Y^{p+1}(z),$$

$$(12)\qquad 2\sum_{p=0}^{p=l} J^{m+p}(z)\,Y^{n+p}(z)$$

$$=\frac{z}{m-n}\Big(J^{m-1}(z)\,Y^{n}(z)-J^{m}(z)\,Y^{n-1}(z)-J^{m+l}(z)\,Y^{n+l+1}(z)+J^{m+l+1}(z)\,Y^{n+l}(z)\Big)$$

und

$$(13)\qquad 2\sum_{p=0}^{p=l}(-1)^{p} J^{m+p}(z)\,Y^{n-p}(z)$$

$$=\frac{z}{m+n}\Big(J^{m-1}(z)\,Y^{n}(z)+J^{m}(z)\,Y^{n+1}(z)+(-1)^{l}J^{m+l}(z)\,Y^{n-l-1}(z)$$

$$+(-1)^{l}J^{m+l+1}(z)\,Y^{n-l}(z)\Big)$$

bestehen, und in derselben Weise, wie oben die ihnen analogen Gleichungen, erwiesen werden können.

Erlangen, im October 1878.

Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad.

Von

J. Gierster in München.

In der Abhandlung: „*Ueber die Transformation der elliptischen Functionen*, u. s. f. (diese Annalen Bd. XIV, S. 111 ff.)*) hat Herr F. Klein unter den Transformationsgleichungen zwischen den Invarianten J, J', welche primzahligem Transformationsgrade entsprechen, alle diejenigen aufgestellt, welche das Geschlecht $p = 0$ haben. Von den zusammengesetzten Transformationsgraden fand beiläufig der Fall $n = 4$ Berücksichtigung wegen seines innigen Zusammenhanges mit der Oktaedergleichung; auch bei ihm ist $p = 0$.

Auf Grund der dort angewandten Methoden ist es nun ein Leichtes, in ähnlicher Weise unter denjenigen Transformationsgleichungen, welche zusammengesetzten Transformationsgraden entsprechen, diejenigen auszusuchen, welche $p = 0$ haben, und sie dann wirklich zu bilden. Dies soll im Folgenden geschehen, wobei ich indess nur die Resultate angebe und mich mit einer Andeutung der Beweise begnüge.

Die ω-Repräsentanten für ein beliebig zusammengesetztes n**) sind dargestellt durch die Ausdrücke:

$$\frac{a\omega + b}{d}$$

in welchen $a \cdot d = n$ ist, übrigens a alle möglichen Factoren von n durchläuft, während b jedesmal alle Reste mod (d) bedeutet mit Ausschluss derjenigen, welche mit a und d einen gemeinsamen Theiler t haben. Die Anzahl derselben, d. h. also der Grad der entsprechenden Transformationsgleichung in J' ist

$$N = n \cdot \Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

wo p alle in n enthaltenen verschiedenen Primzahlen durchläuft. —

---

*) Citate auf diese Arbeit sind im Folgenden einfach durch Anführung der Seitenzahl gegeben.

**) Vergl. Dedekind, in Borchardt's Journal Bd. 83, p. 287 ff.

Auf Grund dieser ω-Repräsentanten ergiebt sich nun die Verzweigung von J' in Bezug auf J zunächst für den Punkt $J=\infty$. Schränkt man nämlich ω in den von Dedekind angegebenen Kreisbogendreiecksraum ein, so wächst bei jeder Umkreisung, welche J um den unendlich fernen Punkt beschreibt, ω um die Einheit. Bei μ derartigen Umkreisungen geht also $\frac{a\omega+b}{d}$ über in $\frac{a\omega+b+\mu a}{d}$. Wenn demnach μ diejenige kleinste Zahl bedeutet, welche die Gleichung $\mu a \equiv 0 \bmod (d)$ befriedigt, d. h. wenn $\mu = \frac{d}{t}$ ist, wo t den grössten gemeinsamen Theiler von a und d bezeichnet, so hängen an dieser Stelle dem gewählten Repräsentanten entsprechend μ Blätter cyklisch zusammen. Auf diese Weise erhält man für jedes d $\varphi(t)$ Cyklen von μ Blättern, wo φ die bekannte zahlentheoretische Function bedeutet, und also überhaupt bei $J=\infty$ $\Sigma\varphi(t)$ Cyklen, wo sich die Summe auf alle Zerlegungen $a \cdot d$ resp. $d \cdot a$ von n bezieht.

Ausser im Punkte $J=\infty$ treten nur mehr bei $J=0$ und $J=1$ Verzweigungen ein (siehe S. 130 ff.), und zwar können sich im Punkte $J=0$ nur Blätter zu drei und drei, bei $J=1$ nur Blätter zu zwei und zwei vereinigen. Es genügt daher, die Anzahl der an diesen Stellen einfach verlaufenden Blätter anzugeben. Man beweist nun, dass die Anzahl dieser Blätter, welche mit ε_0 bez. ε_1 bezeichnet werden soll, einfach gleich ist der Zahl der wesentlich verschiedenen Factoren $\gamma\varrho+\delta$ respect. $\gamma i+\delta$, in welche sich n zerfällen lässt. Hier bedeuten γ, δ ganze, zu einander relativ prime Zahlen, und ferner bedeutet ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel und i die Grösse $\sqrt{-1}$. Die diesen einfachen Blättern entsprechenden ω-Repräsentanten sind beziehungsweise $\frac{\varrho+b}{n}$ und $\frac{i+b}{n}$, wo in beiden Fällen $b\delta \equiv \gamma \bmod (n)$ ist.

Aus dieser Verzweigung ergiebt sich nunmehr folgende Formel für das Geschlecht p:

$$12(p-1)+4\varepsilon_0+3\varepsilon_1 = N - 6\Sigma\varphi(t)$$

wo wieder N der Grad der Transformationsgleichung bezüglich J' ist, und $\Sigma\varphi(t)$ die soeben angegebene Bedeutung hat.

Es folgt also insbesondere: *Die einzigen zusammengesetzten Transformationsgrade, welche ein Geschlecht Null der Transformationsgleichung liefern, sind folgende:*

$$n = 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 25.$$

In diesen Fällen lassen sich also J und J' als rationale Functionen eines Parameters τ darstellen. Die Aufstellung dieser rationalen Functionen wird nun wesentlich durch folgenden Umstand erleichtert. Ist

ν ein Factor von n, und bezeichnen τ_ν und τ_n die Parameter, welche bei den Transformationen ν^{ter} und n^{ter} Ordnung verwendet werden, die beide $p = 0$ besitzen sollen, so ist τ_ν eine rationale Function $\frac{N_n}{N_\nu}^{\text{ten}}$ Grades von τ_ν, wobei N_ν, N_n die entsprechenden Repräsentantenzahlen der Transformationen ν^{ter} und n^{ter} Ordnung bezeichnen. — Die Resultate, welche man auf diese Weise erhält, sind in den Tabellen II. und III. zusammengestellt. In Tabelle I. sind der Uebersicht halber die Gleichungen für $n = 2, 3, 5$ wiedergegeben (vergl. S. 143). Tabelle II. enthält die Substitutionen τ_ν, welche man zu machen hat, um die Transformationsgleichungen ν^{ter} Ordnung in jene der n^{ten} Ordnung überzuführen. Tabelle III. endlich giebt die fertigen Resultate, wie sie sich aus Tabelle II. ergeben, wobei jedesmal, sobald n auf mehrfache Weise in Factoren zerlegt werden kann, sich eine Controle für die Richtigkeit ergiebt. Eine andere Controle dieser Formeln ergiebt sich daraus, dass die Nenner $\psi(\tau)$ in $J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$ bei Vertauschung von J und J', also von τ und τ', bis auf eine Potenz von τ in sich selbst übergehen müssen $\left(\psi(\tau') = k \cdot \frac{\psi(\tau)}{\tau^{N-n+1}}\right)$. Bei dieser Vertauschung von J und J' nämlich gehen die verschiedenen bei $J = \infty$ auftretenden Cyklen, welche der Zerlegung $n = a \cdot d$ entsprechen, in solche Cyklen über, welche der Zerlegung $n = d \cdot a$ entsprechen.

Was endlich die transcendente Auflösung dieser Gleichungen anbelangt, so wird sie geleistet mit Hülfe der Function:

$$M_0 = \frac{1}{n} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6n}} \Pi \left(1 - q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}} \Pi \left(1 - q^{2\nu}\right)^2}, \quad (q = e^{i\pi\omega}),$$

welche der Gleichung (s. S. 145 Anm.)

$$M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}} (J'-1)^{\frac{1}{2}}}$$

genügt.

Vermöge dieser Gleichung kommt für unsere Fälle ($p = 0$)

$$C \cdot M^{12} = \tau^{n-1},$$

unter C einen in der Tabelle für den einzelnen Werth von n angegebenen Zahlencoefficienten verstanden.

Tabelle I.

Formeln für die Transformationsgrade 2, 3, 5 *nach pag.* 143:

1) Transformation zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (4\tau - 1)^3 : (\tau - 1)(8\tau + 1)^2 : 27\tau \\ J' : J' - 1 : 1 = (4\tau' - 1)^3 : (\tau' - 1)(8\tau' + 1)^2 : 27\tau' \\ \tau \cdot \tau' = 1, \qquad \tau = \tau_2. \end{cases}$$

2) Transformation dritter Ordnung:

$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau - 1)(9\tau - 1)^3 : (27\tau^2 - 18\tau - 1)^2 : -64\tau \\ J' : J' - 1 : 1 = \text{ebenso in } \tau' \\ \tau\tau' = 1; \qquad \tau = \tau_3. \end{cases}$$

3) Transformation fünfter Ordnung:

$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 - 10\tau + 5)^3 : (\tau^2 - 22\tau + 125)(\tau^2 - 4\tau - 1)^2 : -1728\tau \\ J' \text{ ebenso in } \tau' \\ \tau\tau' = 125; \qquad \tau = \tau_5. \end{cases}$$

Tabelle II.

Tabelle der Substitutionen, durch welche die Gleichungen für höheren Transformationsgrad aus denjenigen für niederen hervorgehen.

τ_n bezeichnet dasjenige τ, welches bei Transformation n^{ter} Ordnung auftritt. Die τ' drücken sich durch einander ebenso aus, wie die τ, und sind desshalb nicht in die Tabelle mit aufgenommen.

$$n = 4, \quad \tau = \tau_4 \qquad \tau_2 = \tau(2 - \tau),$$

$$n = 6, \quad \tau = \tau_6 \qquad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(\tau + 4)^3}{-4(2\tau + 9)}, \\ \tau_3 = \dfrac{\tau(2\tau + 9)^2}{-27(\tau + 4)}, \end{cases}$$

$$n = 8, \quad \tau = \tau_8 \qquad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(4 - \tau)(2 - \tau)^2}{4}, \\ \tau_4 = \dfrac{\tau(4 - \tau)}{2}, \end{cases}$$

$$n = 9, \quad \tau = \tau_9 \qquad \tau_3 = \tau(\tau^2 - 3\tau + 3),$$

$$n = 10, \quad \tau = \tau_{10} \qquad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(\tau - 2)^5}{2\tau - 5}, \\ \tau_5 = \dfrac{\tau(2\tau - 5)^2}{2 - \tau}, \end{cases}$$

$$n = 12, \quad \tau = \tau_{12} \qquad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(\tau - 6)(\tau - 2)^3(\tau - 4)^3}{-64(\tau - 3)^2}, \\ \tau_3 = \dfrac{\tau(\tau - 6)(\tau - 3)^4}{-27(\tau - 2)(\tau - 4)}. \\ \tau_4 = \dfrac{\tau \cdot (\tau - 4)^3}{8(\tau - 3)}; \\ \tau_6 = \dfrac{\tau(\tau - 6)}{2}, \end{cases}$$

$$n = 16, \quad \tau = \tau_{16} \quad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(4-\tau)(\tau^2-4\tau+8)(2-\tau)^4}{64}, \\ \tau_4 = \dfrac{\tau(4-\tau)(\tau^2-4\tau+8)}{8}, \\ \tau_8 = \dfrac{\tau(4-\tau)}{2}. \end{cases}$$

$$n = 18, \quad \tau = \tau_{18} \quad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\tau(\tau^2+6\tau+12)(\tau+2)^9}{-64(\tau+3)(\tau^2+3\tau+3)^3}, \\ \tau_3 = \dfrac{\tau(\tau^2+6\tau+12)(\tau+3)^2(\tau^2+3\tau+3)^2}{-27(\tau+2)^3}, \\ \tau_6 = \dfrac{\tau(\tau^2+6\tau+12)}{2}, \\ \tau_9 = \dfrac{\tau\cdot(\tau+3)^2}{3(\tau+2)}, \end{cases}$$

$$n = 25, \quad \tau = \tau_{25} \quad \tau_5 = \tau\,(\tau^4 - 5\tau^3 + 15\tau^2 - 25\tau + 25).$$

Tabelle III.

Fertige Gleichungen für $n = 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$.

J' drückt sich durch eine Grösse τ' immer gerade so aus, wie J durch τ. Die betr. Formeln sind daher nicht eigens hingeschrieben, sondern es ist jedesmal nur die Relation zwischen τ und τ' angegeben. M bedeutet die Grösse

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{q^{\frac{1}{6n}}\prod\left(1-q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}}\prod(1-q^{2\nu})^2}, \qquad (q = e^{i\pi\omega}).$$

1) *Transformation vierter Ordnung.**)

$$\begin{cases} J : J-1 : 1 = (4\tau^2-8\tau+1)^3 : (\tau-1)^2(8\tau^2-16\tau-1)^2 : 27\tau(\tau-2), \\ \tau\cdot\tau' = 4, \qquad \tau = 32\,M^4. \end{cases}$$

2) *Transformation sechster Ordnung:*

$$\begin{cases} J : J-1 : 1 = 4(\tau+3)^3(\tau^3+9\tau^2+21\tau+3)^3 \\ \qquad : (\tau^2+6\tau+6)^2\cdot(2\tau^4+24\tau^3+96\tau^2+126\tau-9)^2 \\ \qquad : 27\tau(\tau+4)^3(2\tau+9)^2, \\ \tau\cdot\tau' = 18, \qquad \tau^5 = 2^8\cdot 3^{11}\sqrt{2}\,M^{12}. \end{cases}$$

3) *Transformation achter Ordnung:*

$$\begin{cases} J : J-1 : 1 = 4(\tau^4-8\tau^3+20\tau^2-16\tau+1)^3 \\ \qquad : (\tau^2-4\tau+2)^2(2\tau^4-16\tau^3+40\tau^2-32\tau-1)^2 \\ \qquad : 27\tau(\tau-4)(\tau-2)^2 \\ \tau\cdot\tau' = 8, \qquad \tau^7 = 2^{28}\sqrt{2}\cdot M^{12}. \end{cases}$$

*) Diese Gleichungen gehen in die Gleichungen (18) S. 143 über durch die Substitution $\tau = \frac{2\lambda}{\lambda - 1}$, wo λ den dort verwendeten Parameter bedeutet.

4) *Transformation neunter Ordnung:*

$$\left\{\begin{aligned}
J:J-1:1=&(\tau-1)^3(9\tau^3-27\tau^2+27\tau-1)^3\\
&:(27\tau^6-162\tau^5+405\tau^4-504\tau^3+297\tau^2-54\tau-1)^2\\
&:-64\tau(\tau^2-3\tau+3)\\
\tau\cdot\tau'=3,&\qquad \tau^2=81M^3.
\end{aligned}\right.$$

5) *Transformation zehnter Ordnung.*

$$\left\{\begin{aligned}
J:J-1:1=&(4\tau^6-40\tau^5+160\tau^4-320\tau^3+320\tau^2-130\tau+5)^3\\
&:(\tau^2-4\tau+5)(\tau^2-3\tau+1)^2(2\tau^2-6\tau+5)^2(4\tau^4-28\tau^3+66\tau^2-52\tau-1)^2\\
&:27\tau(\tau-2)^5(2\tau-5)^2\\
\tau\cdot\tau'=5,&\qquad \tau^3=500\sqrt{5}\,M^4.
\end{aligned}\right.$$

6) *Transformation zwölfter Ordnung.*

$$\left\{\begin{aligned}
J:J-1:1=&(\tau^2-6\tau+6)^3(\tau^6-18\tau^5+126\tau^4-432\tau^3+732\tau^2-504\tau+24)^3\\
&:(\tau^4-12\tau^3+48\tau^2-72\tau+24)^2\cdot(\tau^8-24\tau^7+240\tau^6-1296\tau^5\\
&\qquad+4080\tau^4-7488\tau^3+7416\tau^2-3024\tau-72)^2\\
&:1728\tau(\tau-6)(\tau-2)^3(\tau-4)^3(\tau-3)^4,\\
\tau\cdot\tau'=12,&\qquad \tau^{11}=12^{11}\sqrt{12}\,M^{12}.
\end{aligned}\right.$$

7) *Transformation sechzehnter Ordnung:*

$$\left\{\begin{aligned}
J:J-1:1=&(\tau^8-16\tau^7+112\tau^6-448\tau^5+1104\tau^4-1664\tau^3\\
&\qquad+1408\tau^2-512\tau+16)^3\\
&:(\tau^4-8\tau^3+24\tau^2-32\tau+8)^2\\
&\cdot(\tau^8-16\tau^7+112\tau^6-448\tau^5+1104\tau^4-1664\tau^3+1408\tau^2-512\tau-8)^2\\
&:1728\tau(\tau-4)(\tau^2-4\tau+8)(\tau-2)^4,\\
\tau\cdot\tau'=8,&\qquad \tau^5=2^{15}\cdot\sqrt{2}\,M^4.
\end{aligned}\right.$$

8) *Transformation achtzehnter Ordnung:*

$$\left\{\begin{aligned}
J:J-1:1=&(\tau^3+6\tau^2+12\tau+6)^3\\
&\cdot(\tau^9+18\tau^8+144\tau^7+666\tau^6+1944\tau^5+3672\tau^4+4404\tau^3\\
&\qquad+3096\tau^2+1008\tau+24)^3\\
&:(\tau^6+12\tau^5+60\tau^4+156\tau^3+216\tau^2+144\tau+24)^2\\
&\cdot(\tau^{12}+24\tau^{11}+264\tau^{10}+1752\tau^9+7776\tau^8+24192\tau^7\\
&\qquad+53760\tau^6+85248\tau^5+94464\tau^4+69624\tau^3\\
&\qquad+30672\tau^2+6048\tau-72)^2\\
&:1728\tau(\tau^2+6\tau+12)(\tau+3)^2(\tau^2+3\tau+3)^2(\tau+2)^9\\
\tau\cdot\tau'=6,&\qquad \tau^{17}=2^{11}\cdot3^{20}\cdot\sqrt{6}\cdot M^{12}.
\end{aligned}\right.$$

9) *Transformation fünfundzwanzigster Ordnung:*

$$\left\{\begin{aligned} J:J-1:1 = {} & (\tau^{10}-10\tau^9+55\tau^8-200\tau^7+525\tau^6-1010\tau^5+1425\tau^4-1400\tau^3 \\ & \qquad +875\tau^2-250\tau+5)^3 \\ & :(\tau^2-2\tau+5)\cdot(\tau^4-4\tau^3+9\tau^2-10\tau+5)^2\cdot \\ & \quad \cdot(\tau^{10}-10\tau^9+55\tau^8-200\tau^7+525\tau^6-1004\tau^5+1395\tau^4 \\ & \qquad -1310\tau^3+725\tau^2-100\tau-1)^2 \\ & :-1728\tau\,(\tau^4-5\tau^3+15\tau^2-25\tau+25) \\ \tau\cdot\tau' = 5, & \qquad \tau^2 = 25\,M. \end{aligned}\right.$$

Die Functionen τ_ν für zusammengesetzte Indices ν lassen sich selbstverständlich durch τ_2, τ_4, τ_5 resp. durch das Doppelverhältniss, die Tetraeder- (Oktaeder-) und Ikosaederirrationalität in einfacher Weise ausdrücken. Für solche Indices ν, welche keine quadratischen Factoren enthalten, gelingt diese Darstellung unmittelbar auf rationale Weise mit Hülfe der gleichzeitig bestehenden Gleichungen der Tabelle II

$$\tau_a = R_1(\tau_\nu),$$
$$\tau_b = R_2(\tau_\nu)$$

wo $\nu = a \cdot b$ ist. Enthält weiterhin ν einen quadratischen Factor, so treten Wurzelzeichen auf. Für $\nu = 4, 8, 16, 9$ liest man sofort aus Tabelle II ab:

$$\tau_9 - 1 = \sqrt[3]{\tau_3 + 1},$$

$$\tau_4 - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right),$$

$$\tau_8 - 2 = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\sigma-1})}{(1+i)\sqrt[4]{\sigma(1-\sigma)}},$$

$$\tau_{16} - 2 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot(1-i)\cdot\sqrt{\sqrt{\sigma}+i\cdot\sqrt{1-\sigma}}}}{\sqrt[8]{\sigma(1-\sigma)}}$$

wo σ das Doppelverhältniss bezeichnet.

Nur der Fall $\nu = 25$ erfordert eine kleine Ueberlegung. Die aufzulösende Gleichung lautet hier, wenn man x statt τ_{25} schreibt:

$$x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 25x^2 + 25x - \tau_5 = 0$$

oder, wenn man $x - 1 = y$ setzt:

$$y^5 + 5y^3 + 5y + 11 - \tau_5 = 0.$$

Die 5 Wurzeln dieser Gleichung habe ich nach den Formeln berechnet, welche Hr. Brioschi im 13[ten] Bande dieser Annalen S. 151 gegeben hat. Man findet:

$$y = \varepsilon^{\nu} \sqrt[5]{\frac{-11+\tau_5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{125 - 22\tau_5 + \tau_5^2}}$$
$$+ \varepsilon^{-\nu} . \sqrt[5]{\frac{-11+\tau_5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{125 - 22\tau_5 + \tau_5^2}},$$

wo $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ und $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ zu nehmen ist.

Führt man jetzt statt τ_5 die Ikosaederirrationalität $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ mittelst der Formel:

$$\tau_5 = \frac{125\,\eta_1^6\,\eta_2^6}{\eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\,\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10})} \qquad \text{(pag. 156)}$$

ein, so kommt folgendes Resultat:

$$y = \varepsilon^{\nu} \sqrt[5]{\frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)^5\,\eta_1^5 + \eta_2^5}{-\eta_1^5 + (\varepsilon + \varepsilon^4)^5\,\eta_2^5}} + \varepsilon^{-\nu} \sqrt[5]{\frac{\eta_1^5 - (\varepsilon + \varepsilon^4)^5\,\eta_2^5}{(\varepsilon + \varepsilon^4)^5\eta_1^5 + \eta_2^5}}.$$

München, im November 1878.

Ueber die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien.

Von A. Thaer in Berlin*).

Es sei die ternäre cubische Form vorgelegt:

$f = \Sigma a_{hik} x_h x_i x_k$ ($h = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $a_{hik} = a_{khi} = a_{ikh}$ etc.)

und

$$f_i = \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad f(xyz) = \Sigma y_i z_k f_{ik},$$

$$\Delta = \Sigma \alpha_{hik} x_h x_i x_k = 6\, \Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33};$$

so ist bekannt, dass f in drei lineare Factoren dann und nur dann zerfällt, wenn man setzen darf:

$$\Delta \equiv \nu f,$$

wo ν von x_1, x_2, x_3 unabhängig ist, so dass

$$\alpha_{hik} = \nu a_{hik}$$

für alle Werthe der Indices. Man erhält hiernach 45 Gleichungen zwischen den a_{hik}, welche sich jedoch bekanntlich durch drei Gleichungen müssen ersetzen lassen.

Brioschi hat in seiner Abhandlung „Sulle condizioni per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari" Annali di Matematica ser. II. tom. VII. p. 189, indem er die besondere Form zu Grunde legte, bei welcher

$$a_{333} = 1, \qquad a_{133} = 0, \qquad a_{233} = 0$$

ist, die Aufgabe auf drei Gleichungen zurückgeführt. Indem ich Brioschi's Gedankengang auf den gütigen Rath des Herrn Professor Pasch für die allgemeine Form zu verwerthen suchte, gelangte ich für diese zu drei Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind und nur die Invarianten S, T und die Covarianten Δ, φ enthalten.

§ 1.

Aufstellung und Reduction der Bedingungen.

Um die Form f in die von Brioschi zu Grunde gelegte Gestalt überzuführen, mögen für die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 drei andere y_1, y_2, y_3 substituirt werden durch die Gleichungen:

---

*) Aus der Dissertation des Verf., Giessen 1878.

$$x_i = l_i y_1 + m_i y_2 + n_i y_3, \qquad (i=1,2,3)$$

unter der Voraussetzung, dass die Substitutionsdeterminante (lmn) von Null verschieden, dass dagegen

$$f(lnn) = 0 \quad \text{und} \quad f(mnn) = 0,$$

das heisst [wenn l den Punkt mit den Coordinaten l_1, l_2, l_3 bedeutet], dass die Gerade lm die Polare des Punktes n in Bezug auf die ebene Linie dritter Ordnung $f=0$ ist. Es sind dann $l_2m_3-l_3m_2$, $l_3m_1-l_1m_3$, $l_1m_2-l_2m_1$ die Coordinaten der geraden Polaren von n, also:

$$(lmn) = f(nnn).$$

Demnach darf n nicht auf der Linie dritter Ordnung liegen, ist aber sonst ein beliebiger Punkt der Ebene.

Wird f durch obige Substitution in

$$\Sigma b_{hik} y_h y_i y_k = f'(yyy)$$

transformirt, so ist:

$$b_{133}=f(lnn)=0, \quad b_{233}=f(mnn)=0, \quad \text{aber} \quad b_{333}=f(nnn) \text{ nicht Null},$$
$$b_{113}=f(lln), \qquad b_{123}=f(lmn), \qquad b_{223}=f(mmn),$$
$$b_{111}=f(lll), \quad b_{112}=f(llm), \quad b_{122}=f(lmm), \quad b_{222}=f(mmm).$$

Zugleich werde Δ transformirt in

$$\Sigma\beta_{hik} y_h y_i y_k = \Delta'(yyy),$$

wo $\beta_{133}=\Delta(lnn)$, $\beta_{233}=\Delta(mnn)$ etc., und zur Abkürzung werde b für b_{333}, β für β_{333} geschrieben, so dass

$$(lmn) = f(nnn) = b_{333} = b, \qquad \Delta(nnn) = \beta_{333} = \beta.$$

Die Determinante (Hesse'sche Form) von $f'(yyy)$ ist gleich der Determinante der ursprünglichen Form, multiplicirt mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante, also gleich

$$(lmn)^2\Delta = b^2\Delta = b^2\Delta'(yyy).$$

Mithin besteht die Identität:

6 $$\begin{vmatrix} b y_3, & b_{113}y_1+b_{123}y_2, & b_{123}y_1+b_{223}y_2 \\ b_{113}y_1+b_{123}y_2, & b_{113}y_3+b_{111}y_1+b_{112}y_2, & b_{123}y_3+b_{112}y_1+b_{122}y_2 \\ b_{123}y_1+b_{223}y_2, & b_{123}y_3+b_{112}y_1+b_{122}y_2, & b_{223}y_3+b_{122}y_1+b_{222}y_2 \end{vmatrix} = b^2\Sigma\beta_{hik}y_hy_iy_k$$

und wir können durch Vergleichung der Coefficienten die β_{hik} durch die b_{hik} ausdrücken.

Damit eine Linie dritter Ordnung aus drei Geraden bestehe, müssen die Coefficienten ihrer Gleichung denen ihrer Determinante der Reihe nach proportional sein, d. h. wenn μ eine von y_1, y_2, y_3 unabhängige Constante ist,

$$b^2\Delta'(yyy) = \mu f'(yyy).$$

Hieraus ergiebt sich das System der gesuchten Bedingungen durch Vergleichung der Coefficienten, und zwar folgt zuerst:

$$b^2\Delta(nnn) = \mu f(nnn) \quad \text{d. i.} \quad \mu = b\beta,$$

dann weiter mit Benutzung dieses Werthes:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{A}) & b\beta_{133} = 0, \\
(\mathsf{B}) & b\beta_{233} = 0, \\
(\mathrm{I}) & b\beta_{113} - \beta b_{113} = 0, \\
(\mathrm{II}) & b\beta_{123} - \beta b_{123} = 0, \\
(\mathrm{III}) & b\beta_{223} - \beta b_{223} = 0, \\
(1) & b\beta_{111} - \beta b_{111} = 0, \\
(2) & b\beta_{112} - \beta b_{112} = 0, \\
(3) & b\beta_{122} - \beta b_{122} = 0, \\
(4) & b\beta_{222} - \beta b_{222} = 0.
\end{array}
$$

Die ersten fünf Gleichungen gehen mit Hülfe der aus der obigen Identität zu berechnenden Werthe von β_{133}, β_{233}, β_{113} etc. über in:

$$
\begin{array}{rll}
\mathsf{A} \equiv \tfrac{1}{2} b\beta_{133} & \equiv b_{111}b_{223} - 2b_{112}b_{123} + b_{122}b_{113} & = 0, \\
\mathsf{B} \equiv \tfrac{1}{2} b\beta_{233} & \equiv b_{112}b_{223} - 2b_{122}b_{123} + b_{222}b_{113} & = 0, \\
\mathrm{I} \equiv \tfrac{1}{2} b(b\beta_{113} - \beta b_{113}) & \equiv b(b_{111}b_{122} - b_{112}^2) - 4Ab_{113} & = 0, \\
\mathrm{II} \equiv b(b\beta_{123} - \beta b_{123}) & \equiv b(b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122}) - 8Ab_{123} & = 0, \\
\mathrm{III} \equiv \tfrac{1}{2} b(b\beta_{223} - \beta b_{223}) & \equiv b(b_{112}b_{222} - b_{122}^2) - 4Ab_{223} & = 0,
\end{array}
$$

wo $A = b_{113}b_{223} - b_{123}^2 = \frac{1}{6}b\beta$. Die folgenden vier Gleichungen werden unter der Voraussetzung $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$ zu Identitäten.

Zunächst also reduciren sich die Bedingungen auf die fünf Gleichungen $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$, $\mathrm{I} = 0$, $\mathrm{II} = 0$, $\mathrm{III} = 0$, welche aber auch ihrerseits von einander abhängig sind. Es bestehen nämlich die Relationen:

$$(5) \qquad \mathsf{A}b_{222} - \mathsf{B}b_{122} = (b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})b_{223} - 2(b_{112}b_{222} - b_{122}^2)b_{123},$$

$$(6) \qquad -\mathsf{A}b_{112} + \mathsf{B}b_{111} = (b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})b_{113} - 2(b_{111}b_{122} - b_{112}^2)b_{123}$$

und

$$(7) \qquad \mathrm{I}b_{122} - \mathrm{II}b_{112} + \mathrm{III}b_{111} = -4A\mathsf{A},$$

$$(8) \qquad \mathrm{I}b_{222} - \mathrm{II}b_{122} + \mathrm{III}b_{112} = -4A\mathsf{B},$$

wenn man folgende Identitäten berücksichtigt:

$$(b_{111}b_{122} - b_{112}^2)b_{122} - (b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})b_{112} + (b_{112}b_{222} - b_{122}^2)b_{111} \equiv 0,$$

$$(b_{111}b_{122} - b_{112}^2)b_{222} - (b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})b_{122} + (b_{112}b_{222} - b_{122}^2)b_{112} \equiv 0.$$

Die Gleichungen $\mathrm{I} = 0$, $\mathrm{II} = 0$, $\mathrm{III} = 0$ entsprechen den ersten von Brioschi aufgestellten (vergl. den folgenden Paragraphen). Aus

ihnen folgt in der That, wenn A nicht Null ist*) [d. h. $\Delta(nnn)$ nicht Null], vermöge der Gleichungen (7) und (8):

$$\mathsf{A} = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{B} = 0.$$

Ist aber $A = 0$, so sind die drei Gleichungen I = 0, II = 0, III = 0 von einander abhängig, und es folgt aus ihnen nicht mit Nothwendigkeit $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$.

Dagegen sind, mag nun A von Null verschieden oder gleich Null sein, die drei Gleichungen

$$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \mathrm{II} = 0$$

hinreichend, um auch I und III verschwinden zu machen.

Um dies einzusehen, beachte man zuerst, dass für $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$ die rechten Seiten von (5) und (6) verschwinden, mithin

$$(4\mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} - \mathrm{II}^2)b_{123}^2 = A\,.\,\mathrm{II}^2$$

wird. Nehmen wir noch die Gleichung II = 0 hinzu und schliessen (wie zulässig) das Verschwinden von b_{123} d. i. $f(lmn)$ aus, so folgt weiter:

$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{III} = 0,$$

d. h. zunächst entweder I = 0 oder III = 0. Wird endlich auch das Verschwinden von b_{111} und b_{222} ausgeschlossen, so folgt aus (7) und (8), dass sowohl I = 0 als auch III = 0.

Demnach können wir als nothwendige und stets hinreichende Bedingungen folgende drei aufstellen:

$$\begin{aligned} b_{111}b_{223} &- 2b_{112}b_{123} + b_{122}b_{113} = 0,\\ b_{112}b_{223} &- 2b_{122}b_{123} + b_{222}b_{113} = 0,\\ b(b_{111}b_{222} &- b_{112}b_{122}) - 8Ab_{123} = 0, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass b_{111}, b_{222}, b_{333}, b_{123} *von Null verschieden sind.*

Insbesondere, wenn man $A = 0$ voraussetzt, und die Gleichungen benutzt, wie sie im Anfang aufgestellt worden sind, so folgt aus $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$ und II = 0:

$$\begin{array}{llllll} (\mathsf{A}) & \beta_{133} = 0, & (\mathsf{B}) & \beta_{233} = 0, & (A) & \beta_{333} = 0,\\ (\mathrm{I}) & \beta_{113} = 0, & (\mathrm{II}) & \beta_{123} = 0, & (\mathrm{III}) & \beta_{223} = 0, \end{array}$$

$$(1)\ \beta_{111} = 0, \quad (2)\ \beta_{112} = 0, \quad (3)\ \beta_{122} = 0, \quad (4)\ \beta_{222} = 0,$$

d. h. $\Delta \equiv 0$, und die Linie dritter Ordnung besteht dann aus drei Geraden, die durch einen Punkt gehen.

---

*) Nur diesen Fall berücksichtigt Brioschi a. a. O. p. 190, wenn er sagt: „osservando essere in generale $(\tau v)^2 = 0$ [d. s. unsere zwei Identitäten], riesce evidente che la $p = 0$ non è che una conseguenza della $2Au + \tau = 0$." Die späteren Gleichungen Brioschi's sind von der Beschränkung, dass A von Null verschieden sein muss, frei.

§ 2.

Andere Reduction der Bedingungen.

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen enthalten die Coordinaten von drei Punkten l, m, n. Man kann jedoch andere herleiten, die nur die Coordinaten eines einzigen Punktes enthalten.

Im Anschluss an Brioschi's Bezeichnungsweise setzen wir:

$$-u = b_{113}y_1^2 + 2b_{123}y_1y_2 + b_{223}y_2^2,$$
$$2v = b_{111}y_1^3 + 3b_{112}y_1^2y_2 + 3b_{122}y_1y_2^2 + b_{222}y_2^3,$$

also

$$f(yyy) = by_3^3 - 3uy_3 + 2v$$

und benutzen das System der simultanen Formen u und v, wie es von Clebsch Binäre Formen § 59. und Brioschi Annali di Matematica ser. II tom. VII p. 123 aufgestellt ist. Wird alsdann die erste Ueberschiebung z. B. von u und v mit (uv), die zweite mit $(uv)^2$ bezeichnet und noch

$$u = u_{11}y_1^2 + 2u_{12}y_1y_2 + u_{22}y_2^2,$$
$$(uv)^2 = p = p_1y_1 + p_2y_2,$$
$$(vv)^2 = \tau = \tau_{11}y_1^2 + 2\tau_{12}y_1y_2 + \tau_{22}y_2^2$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}(uu)^2 = b_{113}b_{223} - b_{123}^2 = A,$$
$$-2p = \mathsf{A}y_1 + \mathsf{B}y_2,$$
$$2\tau = (b_{111}b_{122} - b_{112}^2)y_1^2 + (b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})y_1y_2 + (b_{112}b_{222} - b_{122}^2)y_2^2,$$

und es lassen sich demnach (wie bei Brioschi geschieht) in der Identität

$$p \equiv 0$$

die Gleichungen $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$ und in der Identität

$$2Au + b\tau \equiv 0$$

die Gleichungen I $= 0$, II $= 0$, III $= 0$ zusammenfassen.

Aus diesen Identitäten hat Brioschi drei Gleichungen abgeleitet, welche statt der Covarianten nur Invarianten enthalten. Von unseren Gleichungen gelangt man zu zwei neuen, indem man

$$\text{(I)} \quad b\tau_{11} + 2Au_{11} = 0,$$
$$\text{(II)} \quad b\tau_{12} + 2Au_{12} = 0,$$
$$\text{(III)} \quad b\tau_{22} + 2Au_{22} = 0$$

mit u_{22}, $-2u_{12}$, u_{11}, sodann mit $b\tau_{22}$, $-2b\tau_{12}$, $b\tau_{11}$ componirt; zu der dritten führen die Gleichungen:

$$(\mathsf{A}) \quad p_1 = 0, \qquad (\mathsf{B}) \quad p_2 = 0.$$

Die drei neuen Bedingungen lauten:

(IV) $$b(u\tau)^2 + 2A(uu)^2 = 0,$$

(V) $$b^2(\tau\tau)^2 + 2Ab(u\tau)^2 = 0,$$

(VI) $$u_{22}p_1^2 - 2u_{12}p_1p_2 + u_{11}p_2^2 = 0$$

oder, wenn wir die simultanen Invarianten

$$B = \tfrac{1}{2}(u\tau)^2, \qquad C = \tfrac{1}{2}(\tau\tau)^2, \qquad E = \tfrac{1}{2}(up)^2$$

einführen:

$$bB = -2A^2, \qquad b^2C = 4A^3, \qquad E = 0.$$

Ich werde zeigen, dass *diese drei Gleichungen hinreichen, um die Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien zerlegbar zu machen*, d. h. dass aus ihnen die fünf Gleichungen A, B, I, II, III (welche in $p \equiv 0$ und $2Au + b\tau \equiv 0$ zusammengefasst werden) folgen, bei deren Bestehen $\Delta \equiv vf$ gesetzt werden darf.

Bei dem Beweise benutze ich das vollständige System der simultanen Formen u und v, wie es von Clebsch Annali di Matematica VII, p. 96 und von Brioschi ibidem p. 123 aufgestellt ist, und zwar ist noch einzuführen:

$$\omega = (v\tau), \quad \varrho = (u\tau) = (vp), \quad s = (vp)^2, \quad 2K = (vp)^3, \quad 2G = (\tau p)^2.$$

Es wird vorausgesetzt:

$$bB = -2A^2, \quad b^2C = 4A^3, \quad E = 0.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den Relationen:*)

$$G = AC - B^2, \qquad K^2 = -(AG^2 - 2BGE + CE^2),$$
$$2K\varrho = Gp^2 + s^2, \qquad 2Gv = s\tau + 2p(Cu - B\tau),$$

so folgt der Reihe nach:

$$G = 0, \ K = 0, \ s = 0, \ A^2p(2Au + b\tau) = 0.$$

Wenn also A von Null verschieden ist (mithin $p = 0$ eine Folge von $2Au + b\tau = 0$ nach § 1.), so ergiebt sich hieraus das Verschwinden von p. Denselben Schluss zieht man aber auch, wenn $A = 0$ und mithin $B = 0$, aus der Gleichung:**)

$$2Ev = su + 2p(Bu - A\tau) + p^3.$$

Demnach hat man $p = 0$ für alle Fälle. In Folge dessen geht die Relation:***)

$$sv = -Cu^2 + 2Bu\tau - A\tau^2 + \tfrac{1}{2}p^2\tau$$

über in:

$$A(2Au + b\tau)^2 = 0,$$

---

*) Clebsch Binäre Formen § 59. (8), Bessel Math. Ann. I, p. 182, Brioschi Ann. di Mat. VII, p. 124 (3) und (6).

**) Brioschi ibid. p. 124 (5).

***) Brioschi ibid. p. 125 (8).

woraus sich $2Au + b\tau = 0$ ergiebt, wenn A nicht Null ist. Ist $A = 0$ und mithin $C = 0$, so benutzt man die Formeln*)

$$\omega^2 = -\tfrac{1}{2}(A\tau - 2E\tau v + Cv^2), \qquad \omega^2 = -\tfrac{1}{2}(2Cv^2 + \tau^3),$$

um zu schliessen, dass

$$\omega = 0, \qquad \tau = 0, \qquad 2Au + b\tau = 0.$$

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass eine Linie dritter Ordnung aus drei Geraden (die auch durch einen Punkt gehen können und nicht verschieden zu sein brauchen) bestehe, sind also:

$$bB = -2A^2, \qquad b^2C = 4A^3, \qquad E = 0.$$

Auf die eigentliche *Zerlegung* der Linie dritter Ordnung in drei Gerade soll nicht näher eingegangen werden. Brioschi findet für $b = 1$:

$$u = -\frac{\tau}{\sqrt[3]{2C}}.$$

Dieser Ausdruck wird für $A = 0$ unbestimmt; doch ist dann

$$v = (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2)^3$$

ein Cubus wegen $(vv)^2 = \tau = 0$, $u = (\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)^2$ ein Quadrat wegen $(uu)^2 = 2A = 0$. Nun ist nach Brioschi l. c. p. 125, wenn $\vartheta = (uv)$:

$$\vartheta^2 = \tfrac{1}{2}(2uvp - u^2\tau - 2Av^2),$$

mithin $(uv) = 0$ für $A = 0$, d. h. die linearen Ausdrücke, deren Potenzen u und v sind, können sich dann nur durch einen constanten Factor unterscheiden, und die Gleichung der Linie dritter Ordnung lautet:

$$by_3^3 - 3(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2)^2 y_3 + 2\varkappa(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2)^3 = 0,$$

wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet. Man findet somit bestätigt, dass für $A = 0$ die Linie aus *drei Geraden eines Büschels* besteht. Für $k = -1$ fallen zwei, für $\xi_1 = \xi_2 = 0$ alle drei Gerade zusammen.

§ 3.

Darstellung der Bedingungen durch Invarianten und Covarianten der cubischen Form.

In den Gleichungen, welche im vorigen Paragraphen als nothwendig und hinreichend für die Zerlegbarkeit der Linie $f = 0$ in drei Gerade nachgewiesen sind, sollen jetzt die simultanen Invarianten der binären Formen u und v durch Invarianten und Covarianten der ternären Form f ersetzt werden.

Zu dem Zweck benutzen wir die ursprüngliche Bezeichnung des § 1. und componiren die Gleichungen:

(I) $b\beta_{113} - \beta b_{113} = 0$, (II) $b\beta_{123} - \beta b_{123} = 0$, (III) $b\beta_{223} - \beta b_{223} = 0$

*) Clebsch Binäre Formen § 35. (10), Brioschi l. c. p. 126.

mit b_{223}, $-2b_{123}$, b_{113} (d. i. $-u_{22}$, $2u_{12}$, $-u_{11}$), wodurch wir statt der Gleichung (IV)

$$bD - 2\beta A = 0$$

erhalten, wenn

$$D = \beta_{113} b_{223} - 2\beta_{123} b_{123} + \beta_{223} b_{113}.$$

Statt Gleichung (V) erhalten wir durch Composition von (I), (II), (III) mit

$$\begin{aligned} 2b(b_{112}b_{222} - b_{122}^2 \quad) &= \quad b^2\beta_{223} + 2Ab_{223}, \\ -2b(b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122}) &= -2(b^2\beta_{123} + 2Ab_{123}), \\ 2b(b_{111}b_{122} - b_{112}^2 \quad) &= \quad b^2\beta_{113} + 2Ab_{113} \end{aligned}$$

(d. i. $4b\tau_{22}$, $-8b\tau_{12}$, $4b\tau_{11}$), da ein Theil der Glieder $2A(bD - 2\beta A)$ d. i. Null liefert:

$$2bH - \beta D = 0$$

wo

$$H = \beta_{113}\beta_{223} - \beta_{123}^2.$$

Die Gleichung (VI) können wir ähnlich herstellen, denn es war

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2} b \beta_{133}, \qquad \mathsf{B} = \tfrac{1}{2} b \beta_{233},$$

also, wenn wir $-32Eb^{-2}$ mit J bezeichnen:

$$J = \beta_{133}^2 b_{223} - 2\beta_{133}\beta_{233} b_{123} + \beta_{233}^2 b_{113} = 0.$$

Im Folgenden benutzen wir die Symbole, wie sie bei Clebsch und Gordan Math. Ann. Bd. VI., p. 236 vorkommen, und schliessen uns der dortigen Bezeichnung an.

Setzt man

$$f(xxx) = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = \cdots,$$

demnach

$$b_{111} = a_l^3 = b_l^3 = \cdots, \quad b_{112} = a_l^2 a_m, \quad b_{123} = a_l a_m a_n,$$
$$b = b_{333} = a_n^3 = b_n^3,$$

so ist die Hesse'sche Form:

$$\begin{aligned} \Delta(xxx) &= 6\Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33} = (abc) a_x b_x c_x \\ &= \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots, \end{aligned}$$

und in Folge davon

$$\beta_{111} = \alpha_l^3 = \beta_l^3 = \cdots, \quad b_{112} = \alpha_l^2 \alpha_m, \quad \beta_{123} = \alpha_l \alpha_m \alpha_n,$$
$$\beta = \beta_{333} = \alpha_n^3 = (abc)^2 a_n b_n c_n.$$

Die erste und zweite Invariante der cubischen Form haben folgenden symbolischen Ausdruck:

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd),$$
$$T = (abc)\cdot(abd)(ace)(bcf)(def)^2.$$

Die erste Covariante sechster Ordnung $\varphi(x)$ ist [nach Clebsch Vorles. I. p. 570]:

$$\varphi(x) = -2\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix} = (ab\alpha)(ab\beta)a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2 .$$

Da lm die gerade Polare von n sein sollte, so ist, wenn

$$l_2m_3 - l_3m_2 = v_1, \qquad l_3m_1 - l_1m_3 = v_2, \qquad l_1m_2 - l_2m_1 = v_3,$$

für beliebige z_1, z_2, z_3:

$$(zlm) = v_z = a_z a_n^2, \qquad a_l b_m - a_m b_l = (abv) = (abc)c_n^2 .$$

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir jetzt D, H und J berechnen. Es ist zunächst

$$D = \begin{vmatrix} \beta_{113} & b_{123} \\ \beta_{123} & b_{223} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{113} & \beta_{123} \\ b_{123} & \beta_{223} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_l^2\alpha_n & a_l a_m a_n \\ \alpha_l\alpha_m\alpha_n & a_m^2 a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_l^2 a_n & \alpha_l\alpha_m\alpha_n \\ a_l a_m a_n & \alpha_m^2\alpha_n \end{vmatrix}$$
$$= a_n\alpha_n(\alpha a v)^2 .$$

Für v_i führe ich $b_i b_n^2$ ein, vertausche die gleichwerthigen Symbole a und b und bilde die halbe Summe, dann wird

$$D = \tfrac{1}{2}(\alpha ab)a_n\alpha_n b_n[(\alpha a v)b_n - (\alpha b v)a_n]$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)^2 a_n b_n \alpha_n v_n - \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(abv)a_n b_n \alpha_n^2 .$$

Der Minuend enthält $v_n = f(nnn) = b$ und ferner ist nach Clebsch Vorl. I. p. 559

$$(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \tfrac{1}{6}Sf(xxx),$$

demnach der Minuend von D gleich $\frac{1}{6}b^2S$. Im Subtrahenden bilden wir nach der Vertauschung von a, b und c den dritten Theil der Summe:

$$D = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}b^2S - \tfrac{1}{6}(abc)a_n b_n c_n \alpha_n^2[(ab\alpha)c_n - (cb\alpha)a_n - (ac\alpha)b_n],$$

und wenden die Identität

$$a_n(bc\alpha) - b_n(ac\alpha) + c_n(ab\alpha) - \alpha_n(abc) = 0$$

an. Da nun $(abc)^2 a_n b_n c_n = \alpha_n^3 = \beta$, so erhalten wir:

$$D = \tfrac{1}{12}b^2S - \tfrac{1}{6}\beta^2 .$$

In gleicher Weise berechnen wir H:

$$H = \begin{vmatrix} \beta_{113} & \beta_{123} \\ \beta_{123} & \beta_{223} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_l^2\alpha_n & \beta_l\beta_m\beta_n \\ \alpha_l\alpha_m\alpha_n & \beta_m^2\beta_n \end{vmatrix} = \alpha_n\beta_n\alpha_l\beta_m \begin{vmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ \alpha_m & \beta_m \end{vmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha_n\beta_n(\alpha\beta v)^2,$$

und wenn man $v_i = a_i a_n^2 = b_i b_n^2$ setzt:

$$H = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta a)(\alpha\beta b)\alpha_n\beta_n a_n^2 b_n^2,$$

d. i. nach Clebsch Vorlesungen I, p. 574:

$$= \tfrac{1}{2}\varphi''(n),$$

welches sich durch $\varphi(n)$ und andere Invarianten und Covarianten ausdrücken lässt, so dass:

$$H = \tfrac{1}{2}\left[\varphi(n) + \tfrac{1}{3}b^2 T - \tfrac{1}{3}b\beta S\right].$$

Endlich wird:

$$\begin{aligned} J &= \beta_{133}^2 b_{223} - 2\beta_{133}\beta_{233} b_{123} + \beta_{233}^2 b_{113} \\ &= \beta_{133}\cdot \alpha_n{}^2 a_m a_n (\alpha a v) - \beta_{233}\cdot \alpha_n{}^2 a_l a_n (\alpha a v) \\ &= (\alpha a v)\alpha_n{}^2 a_n \beta_n{}^2 (\beta_l a_m - \beta_m a_l) \\ &= (\alpha a v)(\beta a v)\alpha_n{}^2 \beta_n{}^2 a_n. \end{aligned}$$

Man ersetzt v_i durch $b_i b_n{}^2$, vertauscht a und b und bildet die halbe Summe, dann ist

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)a_n b_n \alpha_n{}^2 \beta_n{}^2 [-(a\beta v)b_n + (b\beta v)a_n] \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(ab\beta)a_n b_n \alpha_n{}^2 \beta_n{}^2 v_n - \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(abv)a_n b_n \alpha_n{}^2 \beta_n{}^3. \end{aligned}$$

Der Minuend ist $\frac{1}{2}b\varphi(n)$, der Subtrahend wie oben $\frac{1}{6}\beta^3$, also

$$J = \tfrac{1}{2}b\varphi(n) - \tfrac{1}{6}\beta^3.$$

Die drei Gleichungen

$$bD = 2\beta A, \qquad 2bH = \beta D, \qquad J = 0$$

gehen demnach vermöge der für A, D, H und J ermittelten Werthe über in:*)

(VII) $$b^2 S - 6\beta^2 = 0,$$

(VIII') $$-\tfrac{1}{3}b(bT - \beta S) = 3b\varphi(n) - \beta^3,$$

(IX) $$3b\varphi(n) - \beta^3 = 0.$$

Die rechte Seite der Gleichung (VIII') ist in Folge der Gleichung (IX) Null; es bleibt also, da b nicht Null ist:

(VIII) $$bT - \beta S = 0.$$

Wenn S nicht Null ist, aber *nur* unter dieser Bedingung, kann man die Gleichung (VII) durch die bekannte Bedingung für die Existenz eines Doppelpunktes [Aronhold Crelle's J. 55]

$$T^2 - \tfrac{1}{6}S^3 = 0$$

ersetzen. Auch für (IX) würde in diesem Falle

$$18\varphi(n) - b^2 T = 0$$

bequemer sein. Auf allgemeine unbedingte Giltigkeit haben aber nur die Gleichungen (VII), (VIII), (IX) Anspruch. Für b und β führen

---

*) Die directe Ueberführung der binären Brioschi'schen Bedingungen in ternäre ergiebt:

$3\Sigma(vvv) = 4\Delta^2(nnn)$, $\quad 27F(v) = 16f(nnn)\Delta^3(nnn)$, $\quad 3f(nnn)\varphi(n) = \Delta^3(nnn)$

wo $\Sigma(vvv)$ bedeutet, dass in die linke Seite der Gleichung der Cayley'schen Curve [und entsprechend bei $F(v)$] statt der u_i die Coordinaten v_i der geraden Polare von n eingesetzt werden sollen. Die Nothwendigkeit dieser Gleichungen lässt sich mittelst der Relationen nachweisen, welche Gundelfinger in seiner ausführlichen Abhandlung „Ueber die Ausartungen der Curve dritter Ordnung" Math. Ann. Bd. IV, p. 568 und Ann. di Mat. ser. II, tom. V aufgestellt hat. Es ist nämlich $3^3 F(u) = 2(pqu)^2(qru)^2(rpu)^2$ und $2^3\cdot 3^7\varphi(x) = (pqr)^6 p_x^2 q_x^2 r_x^2$.

wir ihre Werthe $f(nnn)$ und $\Delta(nnn)$ ein und können dann den Satz aussprechen:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung $f(xxx)=0$ in drei Gerade sind:

$$Tf(nnn) - S\Delta(nnn) = 0,$$
$$Sf^2(nnn) - 6\Delta^2(nnn) = 0,$$
$$3\varphi(n)f(nnn) - \Delta^3(nnn) = 0,$$

wo n ein beliebiger der Linie dritter Ordnung nicht angehöriger Punkt der Ebene ist.

Da die Bedingungen aber auch für den Fall $A = 0$ und also $\Delta(nnn) = 0$ hinreichend waren, und dann die Hesse'sche Determinante identisch verschwinden machten, so haben wir folgenden weiteren Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung $f(xxx) = 0$ in drei Gerade eines Büschels sind:

$$S = 0, \qquad T = 0, \qquad \Delta(nnn) = 0, \qquad \varphi(n) = 0,$$

wo n ein beliebiger der Linie dritter Ordnung nicht angehöriger Punkt der Ebene ist.

Die so gefundenen Gleichungen brauchen nur für *einen* der Linie dritter Ordnung nicht angehörigen Punkt der Ebene zu bestehen, um die Linie in der gewünschten Weise reducibel zu machen; sie gelten jedoch, wenn sie für einen solchen Punkt stattfinden, für *alle* Punkte der Ebene.

Was die drei für den allgemeinen Fall aufgestellten Gleichungen betrifft, so ist von Gundelfinger Math. Ann. Bd. IV, p. 570 gezeigt worden, dass im Fall dreier Doppelpunkte $S\Delta - Tf$ für alle Werthe der Variabeln verschwindet. Die zweite Gleichung kann als eine Combination dieses Satzes mit der Bedingung $T^2 - \frac{1}{6}S^3 = 0$, welche aussagt, dass die Linie dritter Ordnung nicht bloss einfache Punkte enthält, aufgefasst werden. Die dritte Gleichung $3f(nnn)\varphi(n) - \Delta^3(nnn) = 0$ scheint noch nicht beachtet worden zu sein, sie entspricht der Brioschi'schen Gleichung $E = 0$. Der Beweis, dass die Linie dritter Ordnung in drei Gerade zerfällt, wenn diese Gleichungen auch nur für *einen* der Linie nicht angehörigen Punkt bestehen, war die Aufgabe dieser Arbeit.

Für den Fall, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen, ist die Nothwendigkeit von $S = 0$, $T = 0$ und $\Delta = 0$ bekannt, die von $\varphi(n) = 0$ selbstverständliche Folge von $\Delta \equiv 0$. Dass die vier Gleichungen, wenn sie für einen Punkt bestehen, hinreichend sind, ist im Vorhergehenden bewiesen worden.

§ 4.

Die Bedingungen, dass eine Linie dritter Ordnung ein in sich selbst conjugirtes Dreieck in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt darstellt.

Die vorstehende Untersuchung war veranlasst durch Beschäftigung mit der Frage nach der cubischen Gleichung, welche ein sich selbst conjugirtes Dreieck in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt darstellt. Eine solche Gleichung hat sechs Bedingungen zu erfüllen; es treten also zu den Bedingungen, welche die Existenz von drei Doppelpunkten ausdrücken, noch drei weitere hinzu. Diesem Umstande gemäss lässt sich die Aufgabe theilen, indem zuerst drei Gleichungen abgeleitet werden, welche die Constanten des Kegelschnittes enthalten, zu denen man dann nur noch die Bedingungen der Zerlegbarkeit der Linie dritter Ordnung in drei Gerade hinzuzufügen braucht. Dies Ergebniss lässt sich durch einen Satz ausdrücken, dessen Beweis hier Platz finden möge:

Eine aus drei Geraden bestehende ebene Linie dritter Ordnung ist Tripel eines in ihrer Ebene liegenden Kegelschnittes, wenn der letztere dem Netze ihrer conischen Polaren conjugirt ist, und umgekehrt.

Beweis: Die conischen Polaren der Linie $f=0$ werden dargestellt durch die Gleichung

$$\varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \varkappa_3 f_3 = 0 .$$

Der gegebene Kegelschnitt, welcher in Liniencoordinaten die Gleichung

$$\gamma = \Sigma u_i u_k \alpha_{ik} = 0$$

haben soll, wird als dem Netze conjugirt [Rosanes Math. Ann. Bd. VI, p. 268] bezeichnet, wenn

$$\Sigma a_{1ik}\alpha_{ik} = 0, \qquad \Sigma a_{2ik}\alpha_{ik} = 0, \qquad \Sigma a_{3ik}\alpha_{ik} = 0.$$

Ist nun

$$f = p_x q_x r_x,$$

so sind die conischen Polaren der drei Doppelpunkte:

$$p_x q_x = 0, \qquad q_x r_x = 0, \qquad r_x p_x = 0.$$

Wenn alle conischen Polaren dem Kegelschnitt $\gamma = 0$ conjugirt sind, so stellen diese Geradenpaare conjugirte Strahlen in Bezug auf denselben vor, d. h. es bilden alsdann die Geraden p, q, r ein sich selbst conjugirtes Dreieck, und umgekehrt.

Die sechs Bedingungen, von denen oben die Rede war, lauten daher:

$$\Sigma a_{1ik}\alpha_{ik}=0, \qquad \Sigma a_{2ik}\alpha_{ik}=0, \qquad \Sigma a_{3ik}\alpha_{ik}=0,$$

$$Tf(nnn)-S\Delta(nnn)=0, \quad Sf^2(nnn)-6\Delta^2(nnn)=0, \quad 3\varphi(n)f(nnn)-\Delta^3(nnn)=0$$

und zwar ist wegen der drei letzten auf § 3. zu verweisen.

Giessen, September 1878.

Ueber Enveloppen geodätischer Linien.

Von

A. v. Braunmühl in München.

(Mit 1 lithogr. Tafel.)

---

§ 1.

Einleitung.

Im Folgenden soll ein Beitrag zur Geometrie auf den Rotationsflächen zweiten Grades durch Betrachtung jener Enveloppen gegeben werden, welche von allen durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien erzeugt werden. Die erste Bemerkung über diese Curven findet sich in Jacobi's Dynamik pag. 46, woselbst der Autor angiebt, dass im Schnittpunkte zweier unendlich benachbarter geodätischer Linien die zweite Variation verschwindet, in Folge dessen die Construction einer Enveloppe mit der Aufsuchung des geometrischen Ortes der Verschwindungspunkte der zweiten Variation übereinstimmt. Ausserdem stellt er den Satz auf, dass auf Flächen, welche in allen ihren Punkten negatives Krümmungsmass besitzen, überhaupt keine Enveloppen zustande kommen. Der Beweis dieses Satzes, der übrigens nur von einem gewissen Gesichtspunkte aufgefasst Gültigkeit hat, wurde von Hrn. Christoffel in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1868 erbracht. Vorliegender Aufsatz, der der Hauptsache nach in meiner vor kurzem erschienenen Doctordissertation enthalten, verdankt, wie diese, seine Entstehung der Anregung und gütigen Unterstützung meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Dr. A. Brill, dem ich hierfür meinen innigsten Dank ausspreche.

An der oben erwähnten Stelle giebt Jacobi nur im Allgemeinen durch eine beigegebene Figur die Gestalt einer Enveloppe auf dem Ellipsoide an. Ich werde nun einmal näher ausführen, in welcher Weise eine solche Einhüllende zustande kommt, und werde dann die gestaltlichen Veränderungen betrachten, welche die Einhüllenden erleiden, wenn der Ausgangspunkt der sie erzeugenden geodätischen Linien einen Meridian durchläuft. Hierauf wende ich mich zur Betrachtung der Veränderungen, die durch den Uebergang des verlängerten

Ellipsoides durch die Kugel in das Sphäroid und durch die Deformation des zweischaligen Hyperboloides in den Kegel und das einschalige Hyperboloid hervorgerufen werden. Hiebei soll gezeigt werden, dass es doch auch auf dem einschaligen Hyperboloid Einhüllende giebt, trotzdem diese Fläche rein negatives Krümmungsmass besitzt, wenn man nämlich die geodätischen Linien das Unendliche durchlaufen und wieder auf der Fläche erscheinen lässt, wie es ihre analytische Betrachtung verlangt. Zum Schlusse weise ich nach, dass auf dem Paraboloide die Enveloppen sich auf den unendlich entfernten Kreis reduciren, so dass im Endlichen keine Einhüllende existirt, obgleich die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung positiv gekrümmt ist. Hiermit ist dann auch ein Beispiel für die Frage geliefert, welche Jacobi l. c. noch offen lässt, indem er sagt: es soll durch den bereits erwähnten Satz über negativ gekrümmte Flächen nicht ausgeschlossen sein, dass es nicht auch concav-concave Flächen gäbe, auf welchen keine Einhüllenden existiren.

§ 2.

Enveloppen auf Rotationsflächen überhaupt.

Bezieht man eine Rotationsfläche auf ein rechtwinkliges dreiaxiges Coordinatensystem, indem man $y = f(r)$ die Gleichung des Meridians bedeuten lässt, wo $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ und y die Rotationsaxe ist, so lassen sich die geodätischen Linien darstellen durch:

$$(1) \qquad \varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{r^2 - \nu^2}}.$$

Hiebei bedeutet φ den Drehungswinkel der Ebene des Meridians, r_0 den Radius des Parallelkreises, auf welchem die geodätische Linie beginnt und ν, wie man sich leicht überzeugt, den Halbmesser eines andern Parallelkreises, den die Linie in ihrem Laufe tangirt. Sind auf einer Fläche zwei solche Kreise ν vorhanden, so oscillirt die Linie periodisch auf dem zwischen diesen Parallelkreisen befindlichen Flächentheile, indem sie jenen Theil nicht betritt, für welchen $r < \nu$ ist. In diesem Falle giebt es auch immer zwei Kreise $r = r_0$, die ich künftig mit r_0 und r_0' bezeichne. Geht dann eine geodätische Linie von einem Punkte des Kreises r_0 aus, berührt ihren einen Grenzkreis $r = \nu$, durchschneidet dann abermals r_0 und trifft den andern Kreis r_0', so nenne ich das so beschriebene Stück der geodätischen Linie ihre *halbe Periode*.*) Ist nur ein Grenzkreis ν vorhanden, wie beim Paraboloid, so laufen die Linien auf einer Seite ins Unendliche. Für

*) In Figur 2 ist also AB die halbe Periode.

jede kürzeste Linie hat ν einen andern Werth; hält man daher r_0 fest und lässt ν variiren, so ergeben sich alle durch einen auf r_0 befindlichen Punkt A gehende Linien; mithin kann man die Einhüllende derselben erhalten, wenn man Gleichung (1) nach ν differentiirt, das erhaltene Integral:

$$(2) \qquad J = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{(r^2-\nu^2)^3}}$$

mit Null vergleicht und die Gleichungen (1) und $J = 0$ nebeneinander bestehen lässt. Giebt es nun für jeden Werth von ν einen Werth von r, welcher $J = 0$ befriedigt, so liefert dieser als obere Grenze des Integrales (1) genommen den jedesmal zugehörigen Werth von φ. Es kommt also darauf an, ob die Gleichung $J = 0$ reelle Lösungen besitzt oder nicht. Im ersten Falle existiren Enveloppen, im zweiten nicht. Im folgenden Paragraphen werde ich nun nachweisen, dass für die Rotationsflächen zweiten Grades in jedem Falle die Gleichung $J = 0$ reelle Lösungen besitzt.

§ 3.

Rotationsflächen zweiten Grades.

Für Rotationsflächen zweiten Grades ist y eine Function von r^2, da für zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von r ein und derselbe Werth von y folgen muss. Dasselbe gilt natürlich auch für $\sqrt{1+f'^2}$, so dass man r^2 als die Variable betrachten kann. Nun wird $\frac{\partial f}{\partial r} = f'$ für jenen einen Punkt der Meridiancurve unendlich, dessen Tangente parallel zur Rotationsaxe ist; $\sqrt{1+f'^2} = \frac{1+f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}$ besitzt somit zwei Verzweigungspunkte. Die beiden Integrale (1) und (2), welche ausserdem noch den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt $r^2 = \nu^2$ haben, sind mithin gleichverzweigte elliptische Integrale, und der Unendlichkeitspunkt kann als vierter Verzweigungspunkt aufgefasst werden.

Betrachtet man jetzt das Integral (2), so ergiebt sich sofort, dass es im Punkte $r^2 = \nu^2$ algebraisch unendlich wird und ein Integral zweiter Gattung ist, während (1) in diesem Punkte endlich bleibt. Da man ferner (2) in der Form schreiben kann:

$$J = -\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}} + \sqrt{\frac{1+f_0'^2}{r_0^2-\nu^2}} + \int_{r_0}^{r} \frac{f'f''dr}{\sqrt{r^2-\nu^2\cdot 1+f'^2}},$$

so erkennt man weiter, dass es in diesem Punkte $r^2 = \nu^2$ von $+\infty$ auf $-\infty$ überspringt, wenn r^2 von r_0^2 bis ν^2 abnimmt und dann wieder von ν^2 ab wächst. Denn das Unendlichwerden von J im Punkte

$r^2 = v^2$ hängt augenscheinlich nur von der Function $\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-v^2}}$ ab, in welcher $r^2 = v^2$ ein einfacher Verzweigungspunkt ist, bei dessen Umgehung die Function ihr Zeichen wechselt. In diesem Zeichenwechsel des Integrales J im Punkte $r^2 = v^2$ ist allein der Grund dafür zu suchen, dass J für reelle Werthe von r^2 zu Null werden kann, d. h. Enveloppen vorhanden sind.

Die Werthe, welche r in den Integralen (1) und (2) durchläuft, liegen für die beiden Ellipsoide und die Kugel zwischen dem Radius a des Aequators und dem Werthe Null, während r bei den Hyperboloiden einmal von Unendlich bis Null, das anderemal von Unendlich bis zum Radius a' des Kehlkreises sich bewegt. Man kann also bei allen Flächen ausser dem einschaligen Hyperboloide v von a bis Null oder von Unendlich bis Null abnehmen lassen und erhält immer solche geodätische Linien, welche zwischen den beiden, dem jedesmaligen Werthe von v entsprechenden Parallelkreisen um die Fläche oscilliren, wobei man sich natürlich das zweischalige Hyperboloid durch das Unendliche geschlossen denken muss. Nur auf dem einschaligen Hyperboloide giebt es verschiedene Gattungen von Linien. Setzt man nämlich $v > a'$ (a' = dem Radius des Kehlkreises), so erhält man die eben besprochene Gattung, setzt man aber $v < a'$, so ergeben sich geodätische Linien, die die ganze Fläche durchlaufen, ohne an Grenzkreisen umzukehren, da solche ja nicht mehr vorhanden sind, und deren ganze Züge sich periodisch wiederholen. Zwischen beiden Gattungen liegt eine specielle Linie, die man für $v = a'$ erhält, und die sich dem Kehlkreise in unzähligen Windungen asymptotisch nähert; dies erkennt man aus Gleichung (1). Denn ist $v^2 = a'^2$, so fallen die beiden Verzweigungspunkte $r^2 = v^2$ und $r^2 = a'^2$ in einen einzigen zusammen, und φ wird für $r^2 = a'^2$ logarithmisch unendlich.

Lässt man jetzt J im Punkte r_0 mit dem Werthe Null beginnen, so wird es in $r^2 = v^2$ positiv unendlich, springt auf $-\infty$ über und langt, nachdem r^2 bei den Ellipsoiden den Punkt a^2, bei den Hyperboloiden den Unendlichkeitspunkt durchschritten, wieder im Punkte r_0 (eigentlich r_0') mit irgend einem Werthe J_0 an, der nichts anderes als *der reelle Periodicitätsmodul des Integrales* ist. Hat dieser nun einen positiven Werth, so muss J, bevor es wieder nach r_0 gelangt ist, durch Null hindurch gegangen sein, da es in $r^2 = v^2$ negativ unendlich war; ist hingegen J_0 negativ, so muss J nach der abermaligen Ueberschreitung von r_0 verschwinden, da es in $r^2 = v^2$ wieder positiv unendlich wird. In jedem der beiden Fälle sind also reelle Nullpunkte vorhanden, es existiren Enveloppen. Ausserdem ergiebt sich der Satz: *Besitzt der Periodicitätsmodul das positive Vorzeichen, so schneiden sich je zwei benachbarte geodätische Linien vor Vollendung ihrer halben*

Perioden, besitzt er hingegen das negative, so tritt der Schnitt erst nach Vollendung derselben ein. Der Zwischenfall $J = 0$ erledigt sich von selbst. Hat nämlich das Integral J keine reelle Periode, so schneiden sich die benachbarten geodätischen Linien sämmtlich in Punkten des Parallelkreises $r = r_0'$.

Die im Vorstehenden gewonnenen allgemeinen Gesichtspunkte wenden wir nun auf die speciellen Flächen zweiten Grades an.

§ 4.

Die beiden Ellipsoide und die Kugel.

Ich beginne mit den Gestalten der Enveloppen auf den beiden Ellipsoiden. Sei:

$$\frac{y^2}{(ca)^2} + \frac{r^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung derselben, so erhält man das verlängerte Ellipsoid für $c^2 > 1$, die Kugel für $c^2 = 1$ und das Sphäroid für $c^2 < 1$. Der reelle Periodicitätsmodul J_0 aber ist:

$$J_0 = \frac{c^2 - 1}{a^2 - v^2} \cdot \int_v^a \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \cdot d(r^2)}{\sqrt{r^2 - v^2} \cdot (c^2 - 1) r^2 + a^2}, \tag{3}$$

woraus man sieht, dass J_0, im Falle $c^2 > 1$, für jeden Werth von v positiv ist, dagegen verschwindet, wenn $c^2 = 1$, und für $c^2 < 1$ einen negativen Werth annimmt. *Also schneiden sich auf dem verlängerten, beziehungsweise abgeplatteten Ellipsoide je zwei unendlich benachbarte geodätische Linien vor, beziehungsweise nach Vollendung ihrer halben Perioden, während sie sich auf der Kugel mit Vollendung derselben treffen.*

Lässt man die geodätischen Linien von einem Punkte A des Aequators $r = a$ ausgehen, so giebt es augenscheinlich zwei, die dem Aequator unendlich benachbart sind, und diese schneiden denselben wegen der herrschenden Symmetrie in zwei zu beiden Seiten ihres Ausgangspunktes gelegenen Punkten C und D, welche somit als Anfangspunkte der Enveloppe zu betrachten sind (man vergl. Figur 1 auf der beigegebenen Tafel). Die nachfolgenden beiden Linien schneiden die vorausgehenden einzeln in je zwei Punkten und zwar bevor sie ihre halbe Periode vollenden, d. h. hier, den Aequator abermals erreichen. Man sieht also, dass jede geodätische Linie die unmittelbar vorhergehende in zwei Punkten trifft, die natürlich auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, und da es immer zwei symmetrische Linien durch den Ausgangspunkt giebt, so entstehen im Ganzen vier Zweige, welche die Einhüllende bilden. Diese setzen sich, wie die Entstehung zeigt, in zwei Spitzen am Aequator an und enden in zwei Spitzen,

die auf jenem Meridiane liegen, der durch A geht, da ja dieser ebenfalls geodätische Linie ist, und die übrigen Linien sich ihm zu beiden Seiten des Aequators von je zwei Richtungen her immer näher anschliessen, indem ihre Culminationspunkte, d. h. ihre Berührungspunkte mit den zugehörigen Kreisen $r^2 = v^2$, den beiden Polen sich nähern.

Lässt man jetzt Punkt A auf einem Meridian weiter rücken bis auf einen Parallelkreis $r = r_0$ (vgl. Fig. 2), so treten an die Stelle des Aequators einerseits die zwei auf beiden Seiten des letzteren gelegenen Parallelkreise $r = r_0$ und $r = r_0'$, andererseits jene geodätische Linie, welche durch A geht und den Kreis r_0 in A berührt. Diese hat mit r_0' zwei Berührungspunkte und in ihnen befinden sich jetzt die beiden Spitzen, die früher auf dem Aequator gelegen, wie sich aus Gleichung (2) unschwer ergiebt, wenn man daselbst $v = r_0$ setzt. Ausserdem sind natürlich wieder zwei Spitzen auf dem Meridiane vorhanden, die jedoch diesmal jenem Pole der Fläche näher liegen, bei dem sich der Parallelkreis r_0' befindet. Lässt man nunmehr A dem einen Pole der Fläche näher rücken, so werden r_0 und r_0' immer kleiner, und die Einhüllende zieht sich immer mehr in der Nähe des andern Poles zusammen, bis sie in diesen übergeht, sobald A den ersten Pol erreicht hat, und die geodätischen Linien sämmtlich Meridiane geworden sind.

Nähert sich nun das verlängerte Ellipsoid der Kugel, indem die Grösse c^2 gegen die Eins abnimmt, so wird J_0, wie man aus Gleichung (3) sieht, immer kleiner. Das heisst aber nach der in § 3. angestellten Betrachtung nichts anderes, als sämmtliche Punkte der Enveloppe, die dem Ausgangspunkte A auf dem Parallelkreise r_0 entspricht, rücken r_0' immer näher. Zu gleicher Zeit bewegen sich aber auch die auf r_0' befindlichen Spitzen gegeneinander,*) so dass die ganze Enveloppe

*) Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Um die Spitzen zu finden, hat man die Berührungspunkte der für $v = r_0$ resultirenden geodätischen Linie mit dem zweiten Kreise r_0' zu suchen, d. h.

$$\varphi_0 = 2r_0 \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2 - v^2}} = 2r_0 \int_{r_0}^{a} \frac{dr\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}{r\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}$$

zu bilden. Dieses Integral zerlegt sich in die beiden:

$$\varphi_0 = 2r_0 a^2 \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{r\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}$$

$$+ 2r_0(c^2-1) \int_{r_0}^{a} \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}.$$

Nähert sich nun c^2 der Einheit, so rückt das erste dieser beiden Integrale dem

immer kleiner wird und, sobald die Kugel erreicht ist, in einen Punkt übergeht. Das gilt natürlich für jeden Werth von r_0, d. h. für alle auf einem Meridian gelegene Punkte A als Ausgangspunkte kürzester Linien (man vergl. Fig. 1 und Fig. 3).

Fährt man mit der Deformation fort, indem man die Kugel in ein abgeplattetes Ellipsoid übergehen lässt, so wird $c^2 < 1$, und alsbald treten wieder Einhüllende auf, die immer grösser werden, je mehr c^2 abnimmt, und die nämliche Gestalt haben, wie die des verlängerten Ellipsoides (vergl. Fig. 1 u. 3). Sie kommen jedoch, wie man aus der Figur erkennt, auf eine andere Weise zustande, indem jetzt der Schnitt zweier Nachbarlinien erst nach Vollendung der halben Perioden eintritt.

§ 5.

Die beiden Hyperboloide und der Kegel.

Es stelle $\frac{y^2}{(a'c)^2} - \frac{r^2}{a'^2} = 1$ die Gleichung der Hyperboloide dar, dann erhält man für ein reelles a' das zweischalige, für ein rein imaginäres a' das einschalige Hyperboloid und für $a' = 0$ den Kegel. Der Periodicitätsmodul J_0 ist ausgedrückt durch:

$$(4) \qquad J_0 = c^2 a'^2 \int_{\nu}^{\infty} \frac{d(r^2)}{\sqrt{(a'^2 + r^2)^3 \cdot (r^2 - \nu^2)} \, (a'^2 + (c^2+1) r^2)},$$

woraus man unmittelbar ersieht, dass derselbe für die erste der genannten Flächen positiv, für die zweite negativ wird, für den Kegel aber verschwindet. Man sieht also: *Auf dem zweischaligen, beziehungsweise einschaligen Hyperboloide schneiden sich die von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien vor, beziehungsweise nach Vollendung ihrer halben Perioden, auf dem Kegel aber mit Vollendung derselben.*

Da sich das zweischalige Hyperboloid ganz an das verlängerte Rotationsellipsoid anschliesst, indem es ebenfalls zwei Pole hat, denen sich die Culminationspunkte der einzelnen geodätischen Linien immer mehr nähern (vergl. § 4.), und J_0 ebenfalls das positive Zeichen besitzt, so sind hier die Gestalten der Einhüllenden die nämlichen wie dort, nur sind die einzelnen Theile durch das Unendliche zusammengeschlossen oder die Enveloppe verläuft wie in Fig. 4 ganz auf dem einen Flächentheile, auf welchem der Ausgangspunkt der geodätischen Linien sich nicht befindet. Von Jacobi's Standpunkte aus giebt es dann in diesem letzteren Falle auch auf dem zweischaligen Hyperboloide keine Einhüllenden*).

Werthe π immer näher, das zweite aber der Null, so dass φ_0 für $c^2 = 1$, d. h. für die Kugel, den Werth π annimmt. Das heisst die beiden Spitzen fallen auf dem Meridian, auf welchem A liegt, in einen Punkt zusammen.

*) Da nach den Erörterungen des § 4., je mehr A sich dem einen Pole der Fläche nähert, desto näher die zwei auf dem Meridiane durch A gelegenen Spitzen

Fasst man jetzt irgend eine Einhüllende ins Auge, für welche der Ausgangspunkt A wieder auf dem Parallelkreise $r = r_0$, zwei Spitzen aber auf r_0' liegen, und lässt die Fläche dem Asymptotenkegel sich nähern, so wird J_0 immer kleiner. Das heisst nach § 3., sämmtliche Punkte der Enveloppe rücken dem Kreise $r = r_0$ näher. Berechnet man aber die Lage der Spitzen auf r_0' für den Kegel ähnlich, wie es in der Anmerkung zu § 4. geschehen, so wird der Drehungswinkel φ für diese: $\varphi_0 = \pm\sqrt{1+c^2}\cdot\pi$. Das heisst die Spitzen fallen nicht mehr, wie bei der Kugel in einen Punkt zusammen, der auf dem durch A laufenden Meridiane liegt, sondern sie haben die Entfernung $2\pi - 2\pi\sqrt{1+c^2}$ von einander. Geht also das Hyperboloid vollständig in einen Kegel über, so artet die Enveloppe in jenes doppelgezählte Stück des Parallelkreises r_0' aus, welches sich zwischen den beiden eben bestimmten Punkten erstreckt, während die geodätischen Linien zur einen Hälfte durch den ersten, zur andern Hälfte durch den zweiten dieser Punkte hindurchlaufen. Ebenfalls kann die Erzeugende, welche an Stelle des Meridians tritt, insofern mit zu der Enveloppe gerechnet werden, als auf ihr kurz vor Uebergang des Hyperboloids in den Kegel noch die zwei weitern Spitzen der Enveloppe lagen, die jetzt beim Kegel in den Durchschnitt dieser Erzeugenden mit dem Parallelkreise r_0' zusammengefallen sind.

Es muss noch bemerkt werden, dass natürlich hier von Enveloppen auf dem Kegel nur insofern die Rede sein konnte, als die auf der einen Flächenhälfte entspringenden Linien erst nach Durchlaufung des Unendlichen auf der andern Flächenhälfte sich trafen.

Lässt man den Kegel in ein einschaliges Hyperboloid übergehen, so erweitert sich der Doppelpunkt (vergl. Fig. 4 u. 5) zu einem Kehlkreis und es tritt an Stelle der genannten Erzeugenden eine geodätische Linie, die sich demselben, wie bereits § 3. erwähnt, asymptotisch anschliesst und zu seinen beiden Seiten ins Unendliche verläuft; diese ersetzt den Meridian, auf welchem bei dem zweischaligen Hyperboloide zwei Spitzen der Einhüllenden lagen. Der Meridian gehört also hier gar nicht mit in das System jener geodätischen Linien, welche zur Erzeugung der Enveloppe beitragen. In der That, von jenen geodä-

---

dem andern Pole rücken, so wird es beim zweischaligen Hyperboloide eine Lage von A geben, für welche die eine dieser Spitzen gerade mit dem unendlich fernen Kreise zusammentrifft, diese erhält man, wenn man in J $\nu = 0$ und $r = \infty$ setzt und die untere Grenze r_0 als unbekannt betrachtet; dadurch ergiebt sich für die vorliegende Fläche:

$$0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \cdot r^2(1+c^2) + a'^2}{r^2\sqrt{(r^2+a'^2)\cdot(r^2(1+c^2)+a'^2)}}\,,$$

woraus man r_0 findet.

tischen Linien, für welche $v < a'$ ist, d. h., die sich über die ganze Fläche hinziehen ohne an bestimmten Grenzkreisen $r = v$ umzukehren, schneiden sich zwei benachbarte nicht mehr. Setzt man nämlich $v < a'$ voraus, so kann r im Integral J den Werth v gar nicht mehr erreichen, da a' der kleinste Parallelkreis ist, folglich kann von einem Unendlichwerden und einer Zeichenumkehr des J für die in Betracht kommenden Werthe von r, d. h. von Enveloppen, keine Rede sein. Die andern Curven durch A hingegen schliessen sich immer mehr an die statt des Meridians eintretende Grenzlinie an, die sich dem Kehlkreise asymptotisch nähert, folglich rücken ihre successiven Schnittpunkte, die Punkte der Enveloppe, diesem Kehlkreise der Fläche ebenfalls immer näher. Dasselbe ergiebt sich auch analytisch aus der Betrachtung von J_0. Dieses wächst, je mehr v gegen a' abnimmt, und wird für $v = a'$ unendlich; da J_0 ferner negativ ist, also der Nullpunkt von J jedesmal zwischen $r = r_0$ und $r = v$ liegen muss, so erkennt man aus den Betrachtungen des § 3. augenblicklich, dass dieser Nullpunkt mit v dem Werthe a' sich nähert. Also tritt hier an Stelle der beiden Spitzen auf dem Meridiane die Eigenthümlichkeit, dass die Einhüllende sich asymptotisch dem Kehlkreise anschliesst. Dies gilt natürlich, wo auch A liegen mag, da ja J_0 hievon unabhängig ist. *Es besteht somit eine Enveloppe auf dem einschaligen Hyperboloide aus einem zweispitzigen Zuge, dessen Spitzen auf jenem Kreise liegen, der den nämlichen Radius, wie der zum Ausgangspunkte der Linien gehörige besitzt, und dessen vier Aeste sich auf beiden Seiten dem Kehlkreise asymptotisch nähern, nachdem zwei davon das Unendliche passirt haben.*

Da nun gezeigt worden, dass es auf dem einschaligen Hyperboloide ebenso gut wie auf positiv gekrümmten Flächen Einhüllende giebt, muss noch erläutert werden, dass hiedurch doch keineswegs der von Jacobi aufgestellte und § 1. angeführte Satz seine Gültigkeit verliert. Es wurde nämlich bemerkt, dass für die in Rede stehende Fläche der Periodicitätsmodul J_0 immer das negative Zeichen besitzen muss, und deshalb der Schnittpunkt zweier Nachbarlinien erst nach Vollendung der halben Perioden eintritt. Eine Linie, die von einem Punkte A auf r_0 (vergl. Fig. 5) ausgeht, vollendet ihre halbe Periode, sobald sie r_0' erreicht, d. h. sie muss auf unserer Fläche in jedem Falle zuerst durch's Unendliche gegangen sein, bevor sie ihre Nachbarlinie trifft. *Beschränkt man sich also darauf, wie es Jacobi gethan, den Verlauf einer geodätischen Linie von einem Punkte aus in's Unendliche allein zu verfolgen, so existiren allerdings auf dem einschaligen Hyperboloide gar keine Enveloppen. Stellt man sich hingegen auf den allgemeinern Standpunkt, von welchem aus betrachtet die Flächen im Unendlichen zusammenhängen, so existiren auf dem einschaligen Hyperboloide so gut wie auf dem zweischaligen oder dem Ellipsoide Enveloppen.*

§ 6.
Das Paraboloid und der Cylinder.

Das Paraboloid kann man dadurch aus dem verlängerten Ellipsoide entstehen lassen, dass man den auf der einen Seite des Aequators befindlichen Flächentheil mit diesem ins Unendliche rücken lässt. Dabei verändern sich die Enveloppen in folgender Weise. Je mehr das Ellipsoid dem Paraboloid sich nähert, desto näher rücken jene zwei Spitzen dem Parallelkreise r_0', welche auf dem durch den Ausgangspunkt A gehenden Meridiane liegen, während die beiden auf r_0' selbst befindlichen Spitzen sich immer weiter von einander entfernen. Es schliesst sich also die Enveloppe enger und enger an den Parallelkreis r_0' an. Nun fällt aber, sobald das Paraboloid wirklich erreicht ist, r_0' mit dem unendlich entfernten Parallelkreise zusammen, und somit besteht jetzt die Enveloppe nur mehr aus diesem Kreise, dem sich natürlich sämmtliche geodätische Linien asymptotisch nähern. Analytisch erkennt man dies, wenn man den Meridian des Paraboloides in der Form $y = \frac{r^2}{2p}$ aufstellt. Die Gleichung der geodätischen Linien ist dann nach 1) § 1.:

$$\varphi = \frac{v}{p}\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr\sqrt{p^2+r^2}}{r\sqrt{r^2-v^2}},$$

welches Integral für $r = \infty$ logarithmisch unendlich wird. Der unendlich ferne Kreis wird somit von sämmtlichen geodätischen Linien berührt, er ist also ihre gemeinsame Enveloppe. Der Meridian hingegen, welcher auch zu den kürzesten Linien gehört, sondert sich wieder ab; natürlich, denn kurz vor Erreichung des Paraboloides lagen ja auf ihm noch zwei Spitzen der Einhüllenden, die jetzt in den Durchschnittspunkt dieses Meridians mit dem unendlich fernen Kreis zusammengefallen sind. Fassen wir das Resultat zusammen, so folgt: *Auf dem Rotationsparaboloide artet jede Enveloppe geodätischer Linien, die von einem Punkte ausgehen, in den unendlich fernen Kreis aus.*

Was schliesslich noch den Cylinder betrifft, so sind die geodätischen Linien auf ihm gerade Erzeugende und Schraubenlinien. Construirt man aber alle durch einen Punkt gehende Schraubenlinien, so haben je zwei unendlich benachbarte offenbar keinen weitern Schnittpunkt mit einander gemein, also ist hier von Einhüllenden keine Rede.

Dies ergiebt sich auch, wenn man den Cylinder aus dem Kegel dadurch entstehen lässt, dass der Doppelpunkt desselben ins Unendliche rückt. Mit ihm entfernt sich dann jenes Stück des Kreises r_0', das als Einhüllende auf dem Kegel aufzufassen war, ins Unendliche, und es bleibt nur noch die durch A laufende Erzeugende übrig.

München, im November 1878.

Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind*).

Von F. Neumann in Königsberg.

Mit grossem Erfolg hat man seit längerer Zeit sich der Reihen bedient, welche nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, um in den periodischen Phänomenen der Natur aus einer grossen Anzahl Beobachtungen Resultate zu ziehen. Die sichern Ergebnisse der Meteorologie beruhen fast ganz auf diesem Gebrauch. Ein vorzüglicher Vortheil, welchen die Anwendung dieser Reihen darbietet, ist der Umstand, dass der Werth der Coefficienten, welche man bestimmt hat, unabhängig von ihrer Anzahl ist. In der Physik der Erde ist es ein wichtiger Gesichtspunkt für die Phänomene, diese als Functionen ihres Ortes an der Erdoberfläche zu betrachten, d. i. als Functionen der geographischen Länge und Breite. Es würde unzweckmässig sein, diese Functionen zweier Winkel darzustellen durch ähnliche Reihen, welche nämlich nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen zweier Winkel fortschreiten. Auch hat niemand bis jetzt z. B. die Vertheilung der Temperatur auf der Erdoberfläche, oder die Vertheilung der Intensität des Erdmagnetismus, seiner Richtung etc. auf diese Weise in eine Formel zu bringen versucht; und mit Recht, denn in diesen und andern Fällen haben die theoretischen Beschäftigungen mit diesen Phänomenen schon längst die wahre Form, in welcher sie dargestellt werden müssen, gefunden, nämlich durch Reihen, welche fortgehn nach den Functionen, welche Laplace in der Theorie der Attraction der Sphäroide mit $Y^{(n)}$ bezeichnet hat.

Das Verfahren, eine Function, für welche man *alle* Werthe kennt, durch eine Reihe, welche nach den $Y^{(n)}$ fortschreitet, darzustellen, ist bekannt. Die Absicht dieser Mittheilung ist, das Verfahren anzugeben, welches man zu befolgen hat, wenn nur *einzelne* Werthe der darzustellenden Function gegeben sind. Es ist ganz analog demjenigen, welches man bei den Reihen der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen

---

*) Dieser im Jahre 1838 in Schumacher's Astronomischen Nachrichten (Bd. 15, Seite 313) publicirte Aufsatz wird mit Erlaubniss des Herrn Verfassers hier von Neuem abgedruckt.

eines Bogens anwendet, und bietet dieselben Vortheile, welche dort so geschätzt werden.

Bezeichnet man die geographische Länge mit ω, und die Breite mit φ und setzt: $\sin\varphi = \mu$, bezeichnet man ferner das Glied in $Y^{(n)}$, welches unabhängig von ω ist, mit $X^{(n)}$, so ist der allgemeine Ausdruck für $Y^{(n)}$ folgender:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
Y^{(n)} = B_0^{(n)} X^{(n)} &+ \left(A_1^{(n)} \sin\omega + B_1^{(n)} \cos\omega\right) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{dX^{(n)}}{d\mu} \\
&+ \left(A_2^{(n)} \sin 2\omega + B_2^{(n)} \cos 2\omega\right) \frac{1-\mu^2}{n(n-1)} \frac{d^2X^{(n)}}{d\mu^2} \\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+ \left(A_i^{(n)} \sin i\omega + B_i^{(n)} \cos i\omega\right) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[i-1])} \frac{d^iX^{(n)}}{d\mu^i} \\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\,,
\end{aligned}
\right.
$$

und der Werth von $X^{(n)}$ ist dieser:

$$
(2)\quad X^{(n)} = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \cdots\cdot
$$

Die Grössen $B_0^{(n)} B_1^{(n)} \cdots A_1^{(n)} A_2^{(n)} \cdots$ sind willkürliche, welche so bestimmt werden sollen, dass, wenn man durch $V(\omega,\mu)$ den beobachteten Werth einer Function an dem durch ω und μ bezeichneten Ort darstellt, der Gleichung

$$
(3)\qquad V(\omega,\mu) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \cdots + Y^{(p)}
$$

für alle Beobachtungen genügt wird.

Die bekannten Eigenschaften der Functionen $Y^{(n)}$, welche ihnen eine so ausgebreitete Anwendung verschafft haben, und auf welchen auch das Wesentliche der hier anzugebenden Methode beruht, sind diese:

$$
\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y^{(n)} Y^{(n')} d\omega\, d\mu = 0
$$

so lange n und n' verschieden sind. Setzt man in dies Doppelintegral die Werthe für die Y's aus (1), und führt die Integration nach ω aus, so ergiebt sich sogleich

$$
(4)\qquad \int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 0
$$

oder allgemein

$$
(5)\qquad \int (1-\mu^2)^i \frac{d^iX^{(n)}}{d\mu^i} \frac{d^iX^{(n')}}{d\mu^i} = 0,
$$

so lange n und n' verschieden sind. Wenn $n = n'$, so erhält man

$$(6)\qquad \int_{-1}^{+1}(X^{(n)})^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2$$

und allgemein

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[i-1])}\right)^2\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^i\left(\frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}\right)^2 d\mu$$
$$= \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2\left(\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[i-1])}\right).$$

Die gegebenen Werthe $V(\omega,\mu)$ mögen auf der Erdoberfläche vertheilt sein auf eine Anzahl gleich weit von einander abstehender Meridiane, und in jedem Meridiau auf Breiten, für welche μ die Werthe: $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots$ hat. Um die Gleichung (3) bis $Y^{(p)}$ inclusive darzustellen, müssen die Meridiane von einander um den Winkel $\frac{1}{p}\pi = \alpha$ entfernt sein, und in Beziehung auf die Werthe von μ will ich vorläufig annehmen, dass sie von μ_1 bis μ_{2p+1} gehen, so dass ihre Anzahl ist: $2p+1$ (ich werde später zeigen, dass bei einer schicklichen Wahl der μ die viel geringere Anzahl: $p+1$ schon hinreicht).

Das gegebene System der Beobachtungen sei also folgendes:

$$(8)\qquad \begin{cases} V(0,\mu_1) & V(0,\mu_2) & V(0,\mu_3) & \cdots V(0,\mu_{2p+1}) \\ V(\alpha,\mu_1) & V(\alpha,\mu_2) & V(\alpha,\mu_3) & \cdots V(\alpha,\mu_{2p+1}) \\ V(2\alpha,\mu_1) & V(2\alpha,\mu_2) & V(2\alpha,\mu_3) & \cdots V(2\alpha,\mu_{2p+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V((2p-1)\alpha,\mu_1) & V((2p-1)\alpha,\mu_2) & V((2p-1)\alpha,\mu_3) & \cdots V((2p-1)\alpha,\mu_{2p+1}). \end{cases}$$

Die horizontalen Reihen enthalten die Beobachtungen in denselben Meridianen, die verticalen diejenigen in denselben Parallelkreisen. Bringt man (3) in die Form:

$$V(\omega,\mu) = C_0 + C_1\cos\omega + S_1\sin\omega + C_2\cos 2\omega + S_2\sin 2\omega + \cdots$$

so erhält man nach dem bekannten Verfahren aus jeder verticalen Reihe von (8) die numerischen Werthe von $C_0, C_1 \cdots S_1, S_2 \cdots$ z. B. aus der ersten verticalen Reihe:

$$(9)\qquad \begin{cases} C_0 = \frac{1}{2p}\sum\limits_{m=0}^{m=2p-1} V(m\alpha,\mu_1), \\ C_1 = \frac{1}{p}\sum\cos m\alpha\, V(m\alpha,\mu_1), \quad S_1 = \frac{1}{p}\sum\sin m\alpha\, V(m\alpha,\mu_1), \\ \cdots\cdots \\ C_p = \frac{1}{p}\sum\cos pm\alpha\, V(m\alpha,\mu_1), \quad S_p = \frac{1}{p}\sum\sin pm\alpha\, V(m\alpha,\mu_1). \end{cases}$$

Man erhält, indem man für μ_1 nach und nach setzt $\mu_2, \mu_3 \cdots$, für jedes C und jedes S die Anzahl: $2p+1$ Werthe, die ich in der

Bezeichnung nicht weiter unterscheiden will, um die Zeichen nicht zu sehr zu häufen. Die analytischen Werthe dieser $C_0, C_1, C_2 \cdots S_1, S_2 \cdots$ sind folgende:

$$(10)\quad \begin{cases} C_0 = B_0^{(0)} X^{(0)} + B_0^{(1)} X^{(1)} + B_0^{(2)} X^{(2)} + B_3^{(3)} X^{(3)} + B_0^{(4)} X^{(4)} + \cdots + B_0^{(p)} X^{(p)} \\ C_1 = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\mu} \left\{ B_1^{(1)} X^{(1)} + \frac{B_1^{(2)} X^{(2)}}{2} + \frac{B_1^{(3)} X^{(3)}}{3} + \frac{B_1^{(4)} X^{(4)}}{4} + \cdots + \frac{B_1^{(p)} X^{(p)}}{p} \right\} \\ C_2 = (1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} \left\{ \frac{B_2^{(2)} X^{(2)}}{1\cdot 2} + \frac{B_2^{(3)} X^{(3)}}{2\cdot 3} + \frac{B_2^{(4)} X^{(4)}}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{B_2^{(p)} X^{(p)}}{(p-1)p} \right\} \\ C_3 = (1-\mu^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^3}{d\mu^3} \left\{ \frac{B_3^{(3)} X^{(3)}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{B_3^{(4)} X^{(4)}}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{B_3^{(p)} X^{(p)}}{(p-2)(p-1)p} \right\} \\ C_4 = (1-\mu^2)^2 \frac{d^4}{d\mu^4} \left\{ \frac{B_4^{(4)} X^{(4)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{B_4^{(p)} X^{(p)}}{(p-3)(p-2)(p-1)p} \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_p = (1-\mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p}{d\mu^p} \left\{ \frac{B_p^{(p)} X^{(p)}}{1\cdot 2 \cdots p} \right\} \end{cases}$$

Die Werthe von $S_1, S_2 \cdots$ erhält man aus denen für $C_1, C_2 \cdots$, wenn überall statt B gesetzt wird: A. Je nachdem $C_0, C_1, C_2 \cdots S_1, S_2, \cdots$ aus der ersten, zweiten etc. verticalen Reihe der Beobachtungen (8) bestimmt worden sind, hat man auf der rechten Seite dieser Gleichungen (10) zu setzen: μ_1, μ_2 etc., so dass die Anzahl von jeder dieser Gleichungen $2p+1$ ist, und die Anzahl sämmtlicher Gleichungen ist $2p(2p+1)$.

Es handelt sich nun darum, aus diesem System von Gleichungen die Coefficienten $B_0^{(0)}, B_0^{(1)}, B_0^{(2)} \cdots B_1^{(1)}, B_1^{(2)} \cdots B_2^{(2)} \cdots A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \cdots A_2^{(2)} \cdots$ zu bestimmen. Dies geschieht auf folgende sehr einfache Weise. Es sei $a_1, a_2, a_3 \cdots a_{2p+1}$ ein System willkürlicher Grössen, und es werde die Summe $a_1\mu_1^n + a_2\mu_2^n + a_3\mu_3^n + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1}^n$ bezeichnet mit $\Sigma a \mu^n$. Man genüge nun durch die a's und μ's folgendem System von $(2p+1)$ Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma a = 1 \\ \Sigma a\mu = 0 \\ \Sigma a\mu^2 = \frac{1}{3} \\ \Sigma a\mu^3 = 0 \\ \Sigma a\mu^4 = \frac{1}{5} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Sigma a\mu^{2p} = \frac{1}{2p+1} \\ \Sigma a\mu^{2p+1} = 0. \end{cases}$$

In diesem Systeme, welches viel mehr Grössen, über welche man verfügen kann, enthält, als Gleichungen, können die μ's bis auf eins

willkürlich gewählt, und die Bestimmung der a's von ihnen abhängig gemacht werden. Ich werde hernach zeigen, welche Werthe der μ's die vortheilhaftesten sind.

In Bezug auf (11) gelten nun folgende Sätze:

$$(12)\qquad \sum a X^{(n)} X^{(n')} = 0,$$

diese Summe genommen in Beziehung auf das ganze System der μ's und respectiven a's, durch welches den Gleichungen (11) genügt ist, so lange n und n' verschieden sind und $n + n'$ nicht grösser, als $2p + 1$. Wenn $n = n'$, so hat man für diese Summe

$$(13)\qquad \sum a (X^{(n)})^2 = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2.$$

Eben so hat man, die Summe in demselben Sinne genommen, allgemein:

$$(14)\qquad \sum a (1-\mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}\frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} = 0,$$

so lange n und n' verschieden und ihre Summe kleiner als $2p + 1$ ist. Wenn $n = n'$, so ist

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-[i-1])}\right)^2 \sum a(1-\mu^2)^i \left(\frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \left(\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}{n(n-1)\cdots(n-[i-1])}\right).\end{aligned}\right.$$

Den Beweis für diese Sätze (12), (13), (14), (15) zieht man unmittelbar aus denen in (4), (5), (6), (7). In der That substituiren wir in

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu$$

für $X^{(n)}$ und $X^{(n')}$ ihre Werthe aus (2), führen dann die Multiplication aus, so erhalten wir eine Reihe von der Form:

$$(16)\qquad X^{(n)} X^{(n')} = \mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} \ldots.$$

Integriren wir diese Gleichungen nach μ zwischen -1 und $+1$, so verschwindet das Integral von selbst, wenn $n + n'$ eine ungerade Zahl ist; wenn dies aber eine grade Zahl ist, erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 2\left(\frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} - \cdots\right).$$

Diese Grösse ist nach (4) $= 0$. Nehmen wir jetzt die Summe

$$\sum a X^{(n)} X^{(n')} = \sum a(\mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} - \cdots)$$

in Beziehung auf das ganze System der μ's und respectiven a's, durch welches den Gleichungen (11) Genüge geschieht, unter der Voraussetzung, dass $n + n' < 2p + 1$. Substituirt man auf der rechten

Seite für $\Sigma a \mu^{n+n'}$, $\Sigma a \mu^{n+n'-2}$, etc. ihre Werthe aus (11), so ergiebt sich, dass diese Summe von selbst verschwindet, wenn $n+n'$ ungrade ist, und wenn $n+n'$ grade ist, wird sie

$$\sum a X^{(n)} X^{(n')} = \left(\frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} + \cdots\right).$$

Diese Grösse ist aber, wie wir eben gesehen haben $= 0$.

Ganz auf dieselbe Weise beweist sich (14) aus (5), und man übersieht sehr leicht, dass die Summen (13) und (15) die halben Werthe von den entsprechenden Integralen (6) und (7) haben.

Mittelst dieser Sätze (12), (13), (14), (15) bestimmt man die Coefficienten aus den Gleichungen (10) und denen ihnen zugehörigen ganz auf dieselbe Weise, wie bei den Sinus- und Cosinus-Reihen. Man findet

$$B_0^{(n)} = \frac{2n+1}{2}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)^2 \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}} a\, C_0\, X^{(n)}$$

oder wenn für C_0 sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$\text{(17a)}\quad B_0^{(n)} = \left(\frac{2n+1}{4p}\right)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)^2 \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}}\left(\sum_{m=0}^{m=2p-1} a\, V(m\alpha,\mu)\, X^{(n)}\right)$$

und allgemein

$$B_i^{(n)} = (2n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[i-1])}{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}\right)$$
$$\times \sum \frac{a\, C_i (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1)\cdots(n-[i-1])}\, \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}$$

oder, wenn für C_i sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$\text{(17b)}\quad B_i^{(n)} = \frac{2n+1}{p}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-[i-1])}{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}\right)$$
$$\times \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}}\left(\sum_{m=0}^{m=2p-1} \frac{a \cos im\alpha\, (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1)\cdots(n-[i-1])}\, \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}\, V(m\alpha,\mu)\right).$$

Die Werthe für $A_i^{(n)}$ haben dieselbe Form als $B_i^{(n)}$, man hat nur statt C_i zu setzen: S_i, oder statt $\cos im\alpha$ zu setzen: $\sin im\alpha$.

Ich habe bis jetzt angenommen, dass auf jedem Meridian $2p+1$ willkürlich gelegene Beobachtungen gegeben sind, und dass diese Meridiane den Aequator in $2p$ gleiche Theile theilen. Dadurch wurde zunächst der Zweck erreicht, dass alle Constanten der $Y^{(n)}$ bis $Y^{(p)}$ inclusive vollständig bestimmt wurden. Indess habe ich diese Annahme gemacht, mehr um die Vorstellung zu fixiren, als weil der Umstand, ob die $Y^{(n)}$ alle vollständig, oder ob einige nur theilweise bestimmt werden, nicht unerheblich wäre. Bei der Anwendung wird sich häufig der Fall finden, wo es sogar zweckmässig ist, von den höhern $Y^{(n)}$ nur

das von ω unabhängige Glied, und die zunächst darauf folgenden zu bestimmen. Ich werde daher jetzt die Gleichungen (11) unter dem allgemeinen Gesichtspunkt näher untersuchen, wo die Meridiane von q Parallelkreisen getheilt werden, q mag eine grade oder ungrade Zahl sein. Diese Gleichungen entwickelt geschrieben sind dann folgende:

$$(18)\quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_q = 1 \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + \cdots + a_q\mu_q = 0 \\ a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + a_3\mu_3^2 + \cdots + a_q\mu_q^2 = \frac{1}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1\mu_1^q + a_2\mu_2^q + a_3\mu_3^q + \cdots + a_q\mu_q^q = \frac{1}{q+1} \text{ oder } 0, \end{cases}$$

wo in der letzten Gleichung rechter Hand, je nachdem q grade oder ungrade ist, zu setzen ist $\frac{1}{q+1}$ oder 0.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist $q+1$, die Anzahl der zur Verfügung stehenden Grössen ist $2q$, die μ's sind also nicht ganz willkürlich, sondern es existirt eine Relation zwischen ihnen. Man kann aber die letzte der Gleichungen in (18) ganz ohne erheblichen Nachtheil unberücksichtigt lassen, wodurch ihre Anzahl sich auf q reducirt, und die μ's also ganz willkürlich gewählt werden können.

Genügt man den Gleichungen auf diese Weise, so bestimmt man in (10) die B_i, wenn q ungrade ist, bis $B^{(\frac{1}{2}(q-1))}$ inclusive, und wenn q grade ist, bis $B^{(\frac{1}{2}q)}$ exclusive. Man kann aber statt die μ's willkürlich anzunehmen, den Gleichungen in (18) noch $q-1$ Bedingungen hinzufügen, und man kann diese Bedingungen dahin richten, dass in (10) alle B_i bis $B_i^{(q-1)}$ ihre Bestimmung erhalten, d. h. man kann durch eine zweckmässige Verfügung über die willkürlichen μ's dieselbe Anzahl Glieder in (10) durch die halbe Anzahl Beobachtungen bestimmen. Diese Bedingungen werden dadurch ausgedrückt, dass man den Gleichungen (18) noch $q-1$ ähnliche Gleichungen hinzufügt, d. h. sie fortsetzt bis zur $(2q-1)^{\text{ten}}$ Potenz der μ's. Sie verwandeln sich demnach in folgende:

$$(19)\quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_q = 1 \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + \cdots + a_q\mu_q = 0 \\ a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + a_3\mu_3^2 + \cdots + a_q\mu_q^2 = \frac{1}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1\mu_1^{2q-1} + a_2\mu_2^{2q-1} + a_3\mu_3^{2q-1} + \cdots + a_q\mu_q^{2q-1} = 0 \end{cases}$$

aus welchen die μ's und a's zu bestimmen sind. Die Theile dieser Gleichungen rechter Hand haben die Form der Glieder einer recurrenten

Reihe, woraus erhellt, dass die μ's die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom q^{ten} Grade sind. Es sei diese Gleichung:

$$x^q + \alpha_1 x^{q-1} + \alpha_2 x^{q-2} + \cdots + \alpha_q = 0. \tag{20}$$

Unterscheiden wir vorläufig die zwei Fälle: erstens, wo q eine grade Zahl, zweitens wo q eine ungrade Zahl ist.

1. q sei eine grade Zahl. Die Coefficienten aller ungraden Potenzen von x in (20) werden $= 0$; die Coefficienten der graden Potenzen werden zufolge der bekannten Eigenschaften recurrirender Reihen durch folgende Relationen bestimmt:

$$\tag{21} \begin{cases} 0 = \frac{1}{q+1} + \frac{\alpha_2}{q-1} + \frac{\alpha_4}{q-3} + \cdots + \frac{\alpha_q}{1} \\ 0 = \frac{1}{q+3} + \frac{\alpha_2}{q+1} + \frac{\alpha_4}{q-1} + \cdots + \frac{\alpha_q}{3} \\ 0 = \frac{1}{q+5} + \frac{\alpha_2}{q+3} + \frac{\alpha_4}{q+1} + \cdots + \frac{\alpha_q}{5} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = \frac{1}{2q-1} + \frac{\alpha_2}{2q-3} + \frac{\alpha_4}{2q-5} + \cdots + \frac{\alpha_q}{q-1} \end{cases}$$

2. q sei eine ungrade Zahl. Jetzt sind in (20) die Coefficienten aller graden Potenzen von x gleich 0, so dass in diesem Falle eine Wurzel von (20) immer $= 0$ ist. Für die Coefficienten der ungraden Potenzen: α_2, $\alpha_4 \cdots$ erhält man folgende Relationen:

$$\tag{22} \begin{cases} 0 = \frac{1}{q+2} + \frac{\alpha_2}{q} + \frac{\alpha_4}{q-2} + \cdots + \frac{\alpha_{q-1}}{3} \\ 0 = \frac{1}{q+4} + \frac{\alpha_2}{q+2} + \frac{\alpha_4}{q} + \cdots + \frac{\alpha_{q-1}}{5} \\ 0 = \frac{1}{q+6} + \frac{\alpha_2}{q+4} + \frac{\alpha_4}{q+2} + \cdots + \frac{\alpha_{q-1}}{7} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = \frac{1}{2q-1} + \frac{\alpha_2}{2q-3} + \frac{\alpha_4}{2q-5} + \cdots + \frac{\alpha_{q-1}}{q} \end{cases}$$

Ich werde jetzt nachweisen, dass die Gleichung (20), deren Wurzeln die durch (19) bestimmt werdenden μ's sind, immer, q mag grade oder ungrade sein, identisch ist mit

$$X^{(q)} = 0$$

Aus dem Satz (4):

$$\int_{-1}^{+1} X^{(q)} X^{(q')} d\mu = 0$$

vorausgesetzt, dass q und q' verschieden sind, leitet man, indem für $X^{(q')}$ nach und nach $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)} \ldots X^{(q-1)}$ gesetzt wird, leicht ab:

$$(23)\qquad \int_{-1}^{+1} X^{(q)} \mu^{q'} d\mu = 0$$

wenn q' irgend eine ganze Zahl, die aber kleiner sein muss als q, bedeutet. Der Umstand, dass $X^{(q)}$ eine ganze algebraische Function von der Ordnung q ist, verbunden mit der Eigenschaft (23) bestimmt diese Function vollständig bis auf einen constanten Factor, auf den es hier nicht weiter ankommt. Es sei nun q eine grade Zahl, $X^{(q)}$ enthält alsdann nur grade Potenzen von μ und es sei

$$X^{(q)} = \mu^q + A_2 \mu^{q-2} + A_4 \mu^{q-4} + \cdots + A_q.$$

Multipliciren wir diese Gleichung nach und nach mit $\mu^0, \mu^2, \mu^4 \cdots \mu^{q-2}$ und nehmen jedesmal das Integral zwischen $\mu = -1$ und $\mu = +1$, so erhalten wir zufolge (23):

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{q+1} + \frac{A_2}{q-1} + \frac{A_4}{q-3} + \cdots + \frac{A_q}{1} \\ 0 = \frac{1}{q+3} + \frac{A_2}{q+1} + \frac{A_4}{q-1} + \cdots + \frac{A_q}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{1}{2q-1} + \frac{A_2}{2q-3} + \frac{A_4}{2q-4} + \cdots + \frac{A_q}{q-1} \end{cases}$$

Dies ist aber dasselbe System Gleichungen, als in (21), woraus folgt, dass $X^{(q)} = 0$ identisch ist mit der Gleichung (20).

Wenn q ungerade ist, enthält $X^{(q)}$ nur ungrade Potenzen von μ; es sei

$$X^{(q)} = \mu^q + A_2 \mu^{q-2} + \cdots + A_{q-1}\mu$$

Multipliciren wir diese Gleichung nach und nach mit $\mu^1, \mu^3 \cdots \mu^{q-2}$, integriren jedesmal zwischen -1 und $+1$, so erhalten wir nach (23) ein System Gleichungen zwischen $A_2, A_4 \cdots$, welches übereinstimmt mit (22), so dass also auch in diesem Falle die Identität zwischen (20) und $X^{(q)} = 0$ nachgewiesen ist.

Ich will jetzt noch bemerken, dass wenn eine Function: $F(x)$, für welche, zwischen $x = A$ und $x = B$, q einzelne Werthe gegeben sind, zwischen diesen Grenzen A und B dargestellt werden soll, man in vielen Fällen sich der Reihe

$$(24)\qquad F(x) = B^{(0)} X^{(0)} + B^{(1)} X^{(1)} + B^{(2)} X^{(2)} + \cdots$$

als einer sehr zweckmässigen Interpolations-Formel bedienen wird. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B)\mu$, so verwandelt sich $F(x)$ in eine Function von μ, welche zwischen $\mu = -1$ und $\mu = +1$ darzustellen ist. Wenn nun die x, in Beziehung auf welche die Werthe gegeben sind, so gewählt sind, dass die ihnen entsprechenden μ die Wurzeln der Gleichung $X^{(q)} = 0$ sind, so giebt die Anwendung der entwickelten Methode in (24) alle Coefficienten bis $B^{(q)}$ exclusive. Die

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Coefficienten in (24) führt zu keinem andern Verfahren, und man ist also überhoben der so lästigen Auflösung der sonst durch diese Methode gegebenen Gleichungen. Wenn $F(x)$ eine algebraische ganze Function von der Ordnung $q-1$ ist, so wird sie durch (24) vollständig bestimmt; wenn dies nicht der Fall ist, muss man sich $F\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\mu\right)$ in eine Reihe nach den steigenden Potenzen von μ entwickelt denken, die hinlänglich convergirt, um die q^{te} und die höhern Potenzen vernachlässigen zu können. Diese vernachlässigten Glieder üben einen Einfluss auf die Werthe, welche man für $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}\cdots$ erhält, aus, der aber um so geringer ist, je niedriger die Stellenzahl der B ist. So ist $B^{(0)}$ genau bis auf diejenigen Glieder, deren Exponent in der Entwickelung von $F\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\mu\right)$ gleich oder grösser als $2q$ ist, und allgemein: $B^{(m)}$ ist genau bis auf die Glieder, deren Exponent gleich oder grösser als $2q-m$ ist. Grade aus diesem Umstande, dass die ersten Glieder mit viel grösserer Genauigkeit bestimmt werden, lässt sich oft nicht unerheblicher Nutzen ziehen. Wenn z. B. das Integral $\int F(x)\,dx$ zwischen A und B aus den gegebenen q Beobachtungen gefunden werden soll, so ist dieses $=(B-A)B^{(0)}$ und also genau bis auf die Glieder in der Entwickelung von $F\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\mu\right)$ von der Ordnung $2q$, vorausgesetzt, dass die gegebenen Werthe von $F(x)$ auf Abscissen fallen, deren zugehörige μ's die Wurzeln von $X^{(q)}=0$ sind. Es seien diese gegebenen Werthe $M_1, M_2, \cdots M_q$, so ist also

$$\int_A^B F(x)\,dx=(B-A)\left\{a_1 M_1+a_2 M_2+\cdots+a_q M_q\right\}$$

wo die a's aus (18) bestimmt werden müssen. Diese Integrationsmethode, die sich hier gleichsam von selbst darbietet, ist genau dieselbe, welche Herr Hofrath Gauss in seiner Abhandlung: Methodus nova integralium etc. (Comm. Soc. Reg. Gött. recent. Vol. III) entwickelt hat, ausgehend grade von der Forderung, dies Integral bis auf Glieder von der Ordnung $2q$ genau zu erhalten. In dieser Abhandlung findet man die Wurzeln der Gleichungen, von denen die μ's abhängen, bis $X^{(7)}=0$, und zugleich die Werthe der entsprechenden a's. Diese a's sind in der erwähnten Abhandlung mit $R, R'\cdots$ bezeichnet, und unsere $\mu', \mu''\cdots$ erhält man aus den dortigen $a, a', a''\cdots$, indem man diese a's verdoppelt und von 1 abzieht.

Ueber vortheilhafte Anordnung der Rechnung bei Anwendung der entwickelten Methode, einige Hülfstafeln u. dgl. werde ich mich in einer spätern Mittheilung, wo ich diese Methode auf die Darstellung der Vertheilung des Erdmagnetismus anwenden werde, auslassen.

Fig. 3.

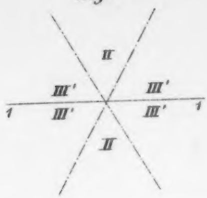
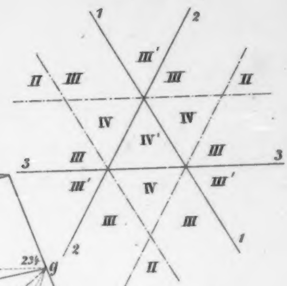


Fig. 2.



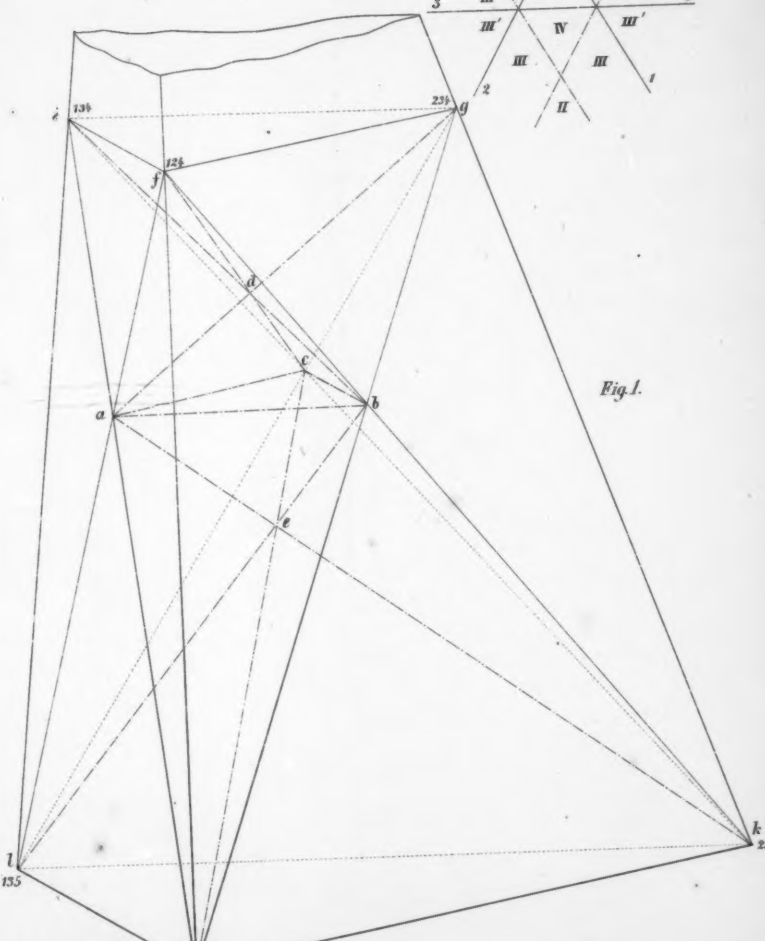


Fig. 1.

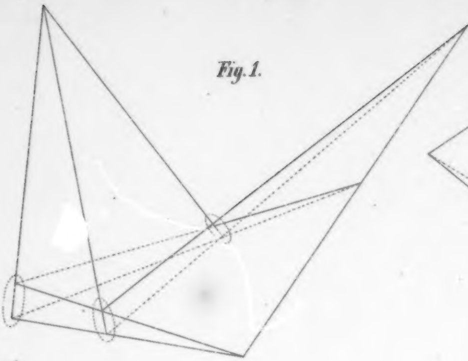


Fig. 1.

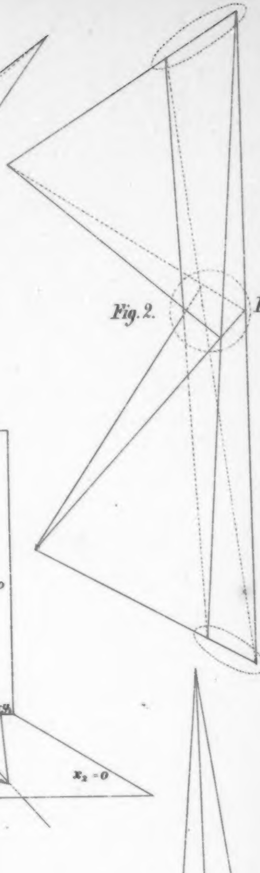


Fig. 2.

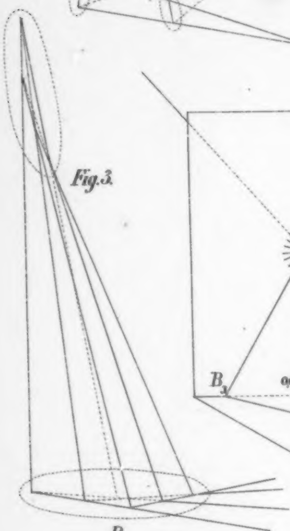


Fig. 3.

B_3

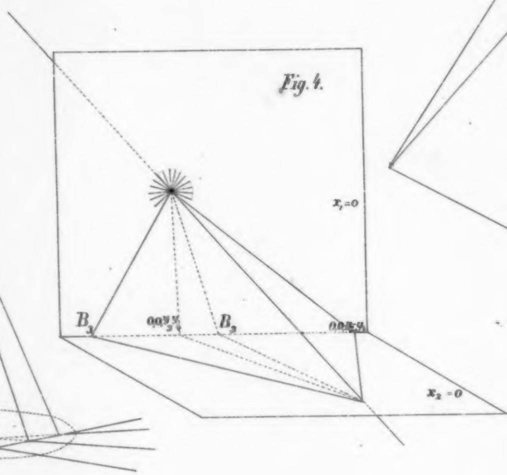


Fig. 4.

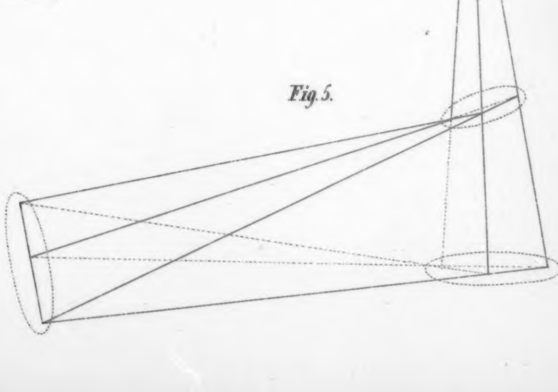


Fig. 5.

Fig. 1.

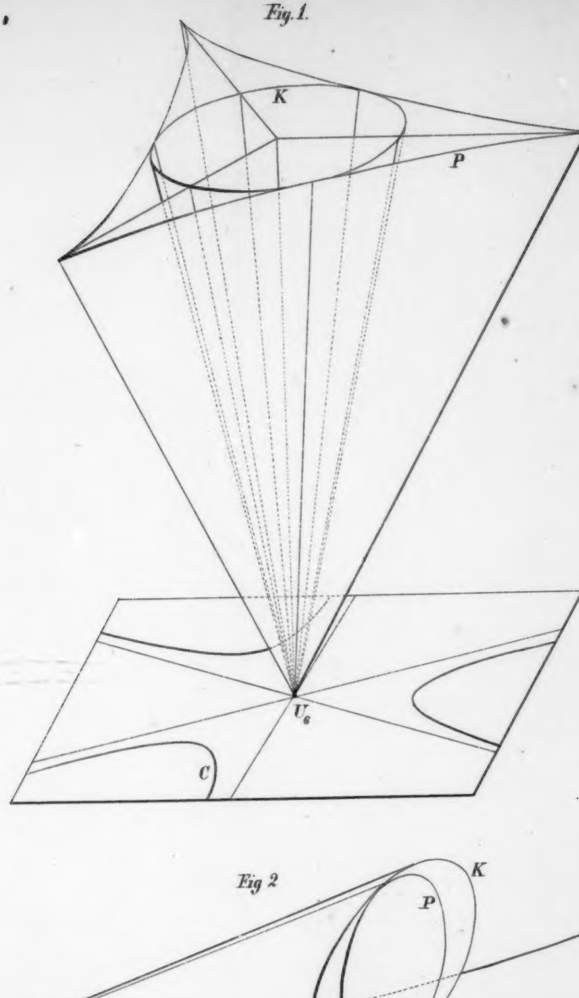
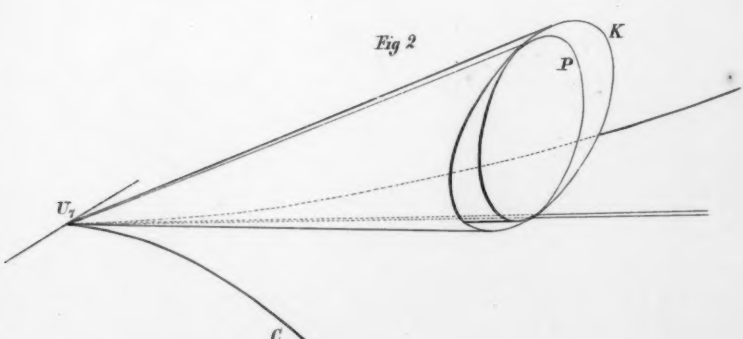


Fig 2



$n = 5$

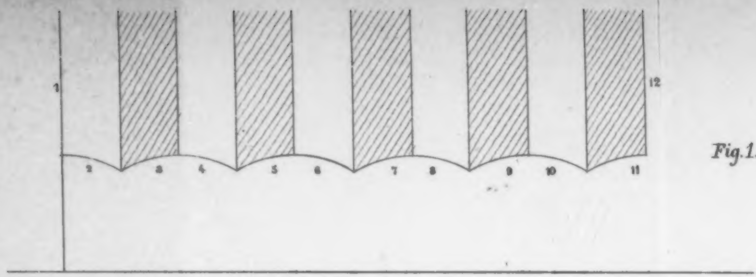


Fig. 1.

$n = 5$

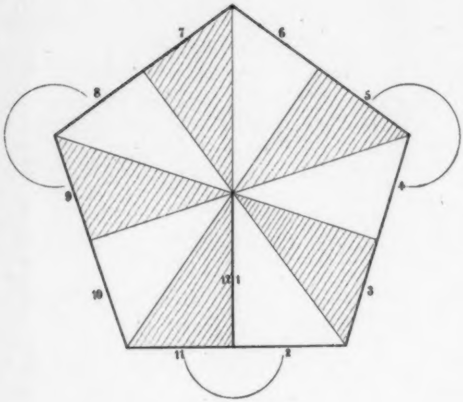


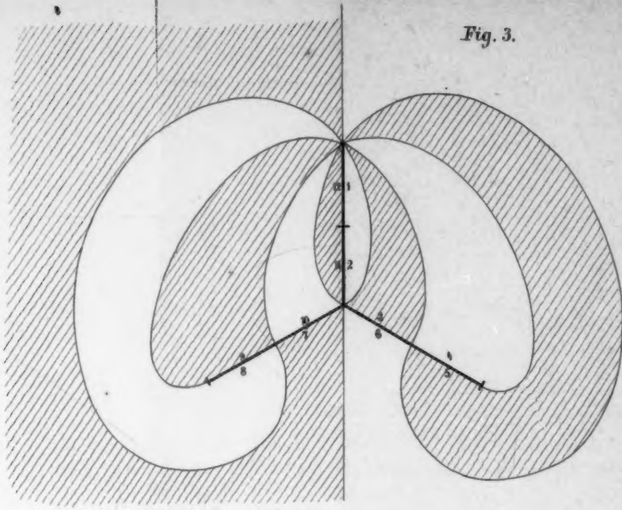
Fig. 2.

$n = 7$

Fig. 4.

$n = 5$

Fig. 3.



$n = 7$

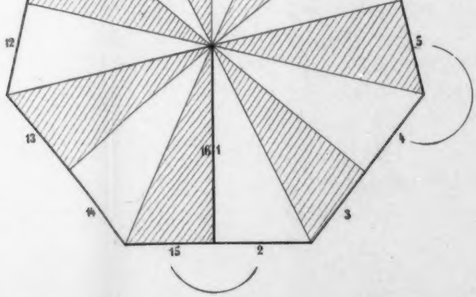
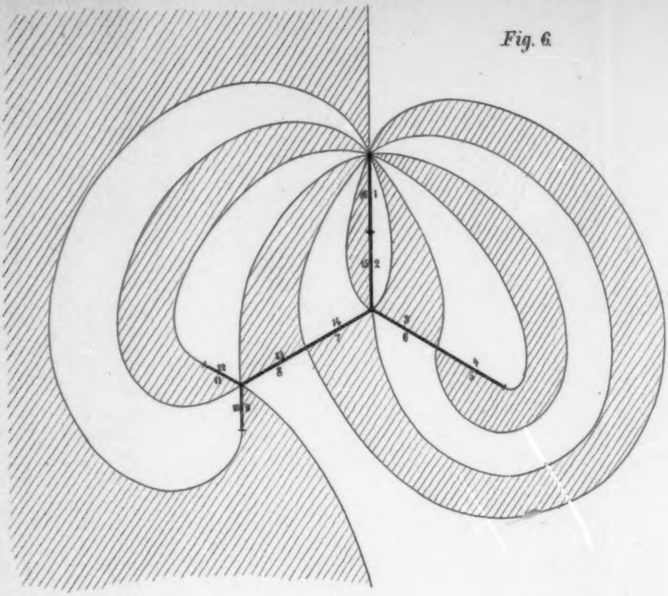


Fig. 5.

$n = 7$

Fig. 6.



$n = 11$

Fig. 8.

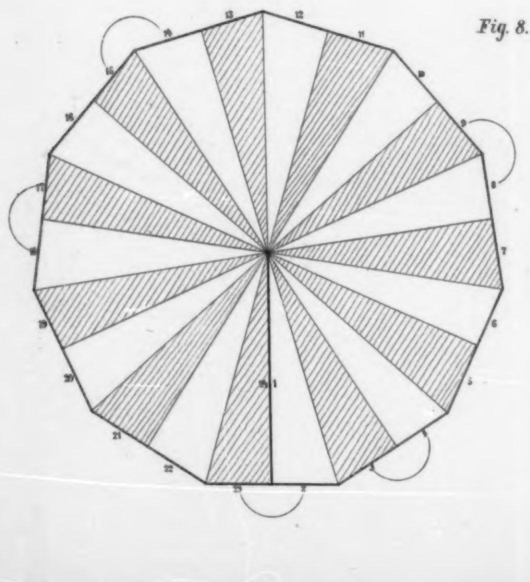


Fig. 7.

$n = 11$

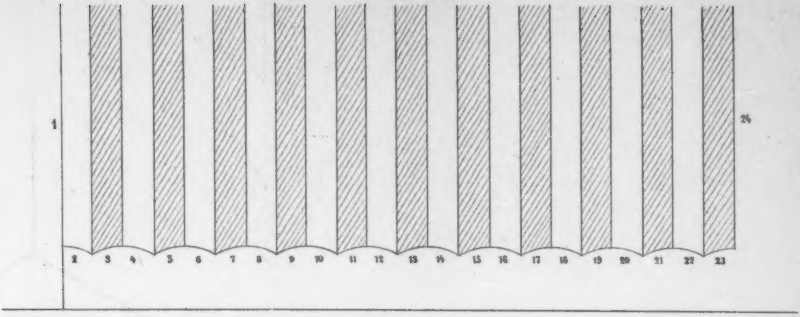
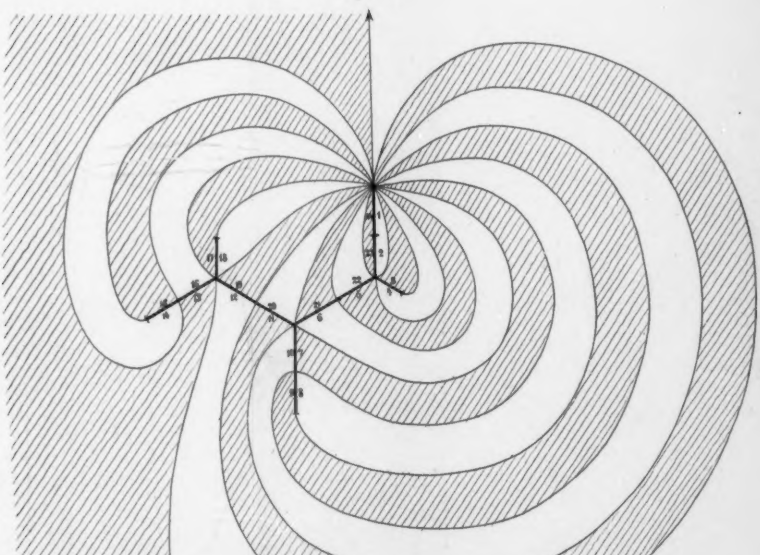
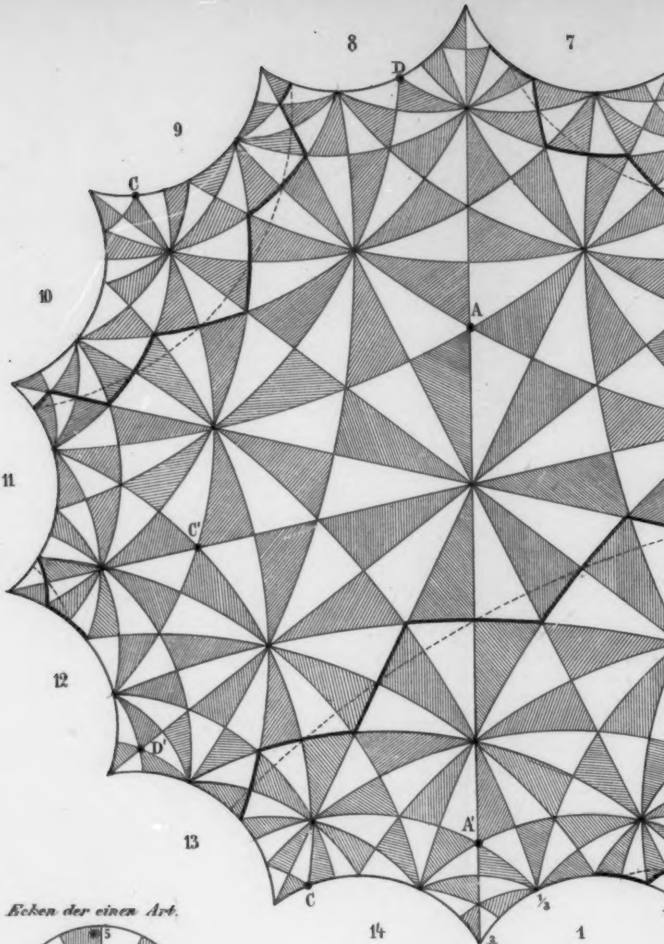


Fig. 9.

$n = 11.$

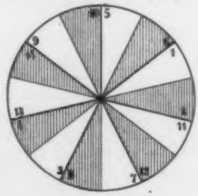




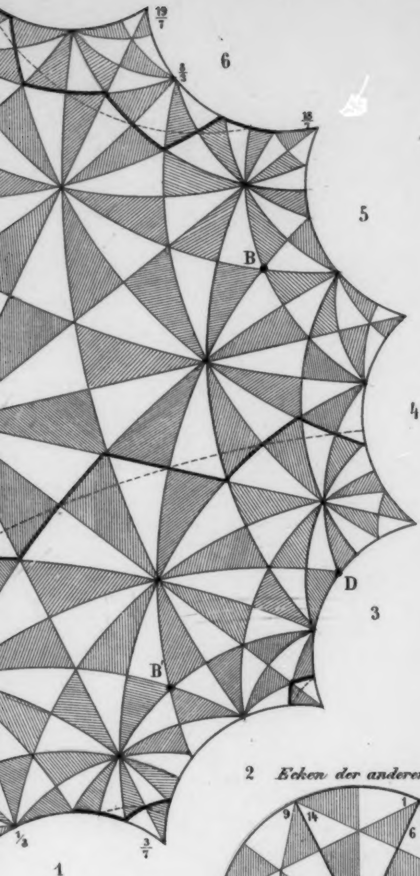
Zusammengehörigkeit der Kanten

1 an 6
3 „ 8
5 „ 10
7 „ 12
9 „ 14
11 „ 2
13 „ 4

Ecken der einen Art.



F. Klein. Transformation siebenter Ordnung.
Mathematische Annalen Bd. XIV.



2 *Ecken der anderen Art*

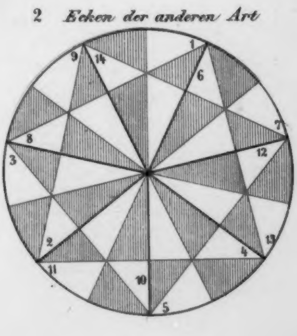


Fig. 1.

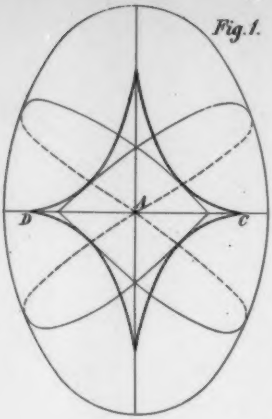


Fig. 2.

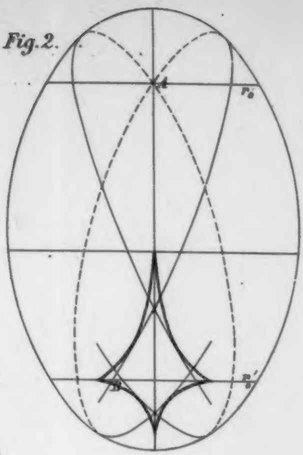


Fig. 3.

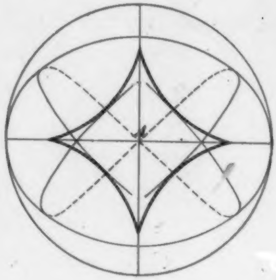


Fig. 4.

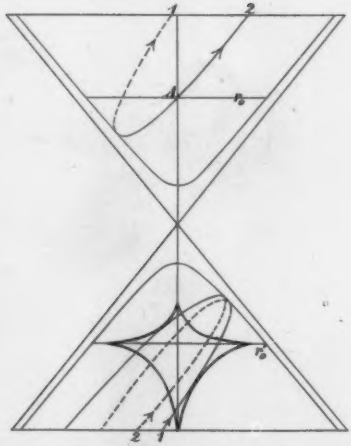
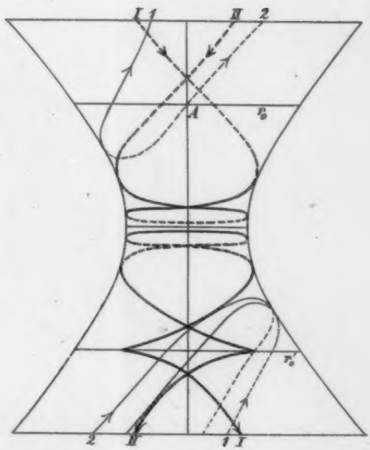
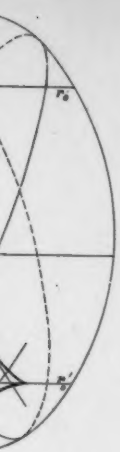


Fig. 5.



Lith. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



…nebach & Schaefer, Leipzig.

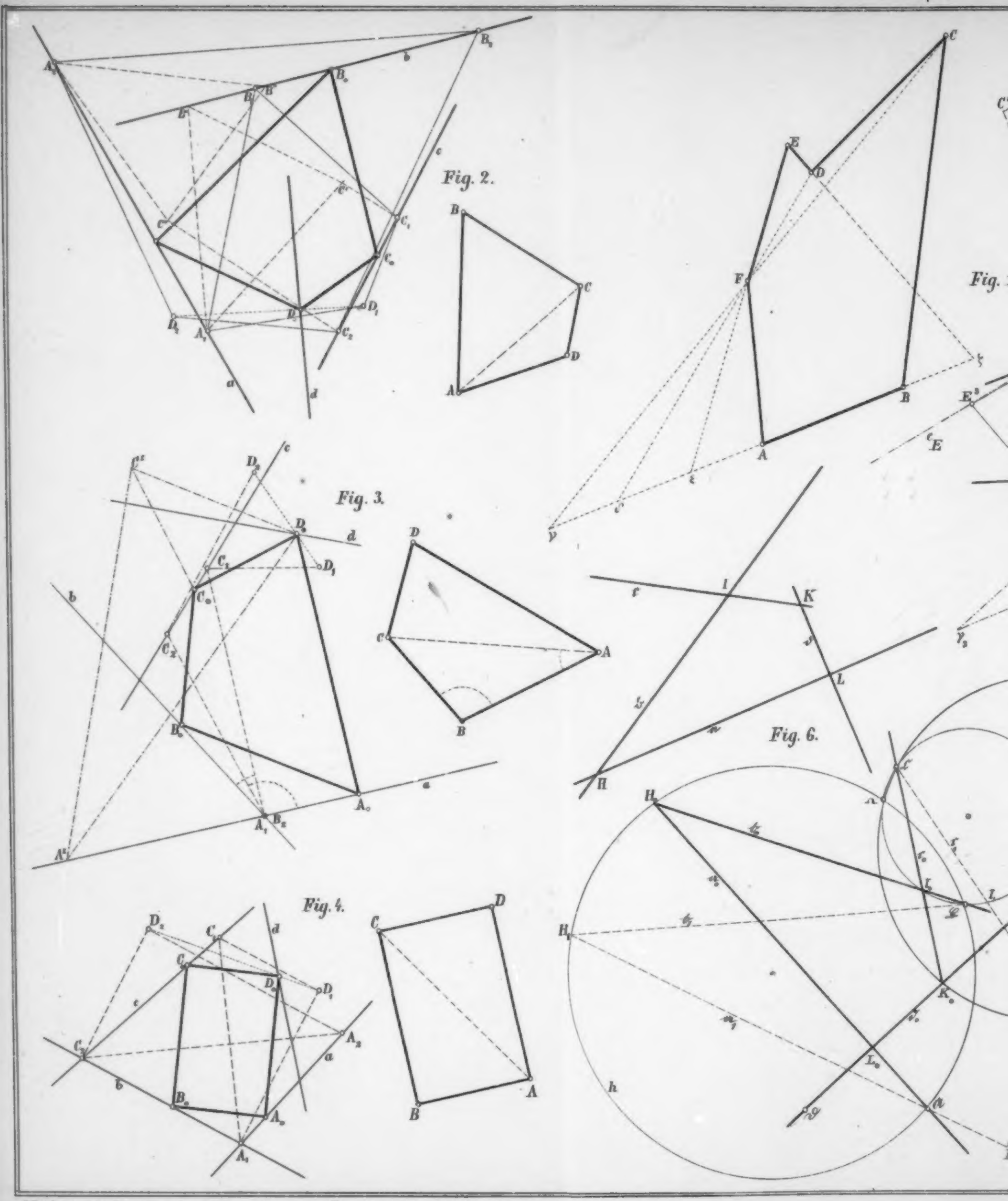


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.

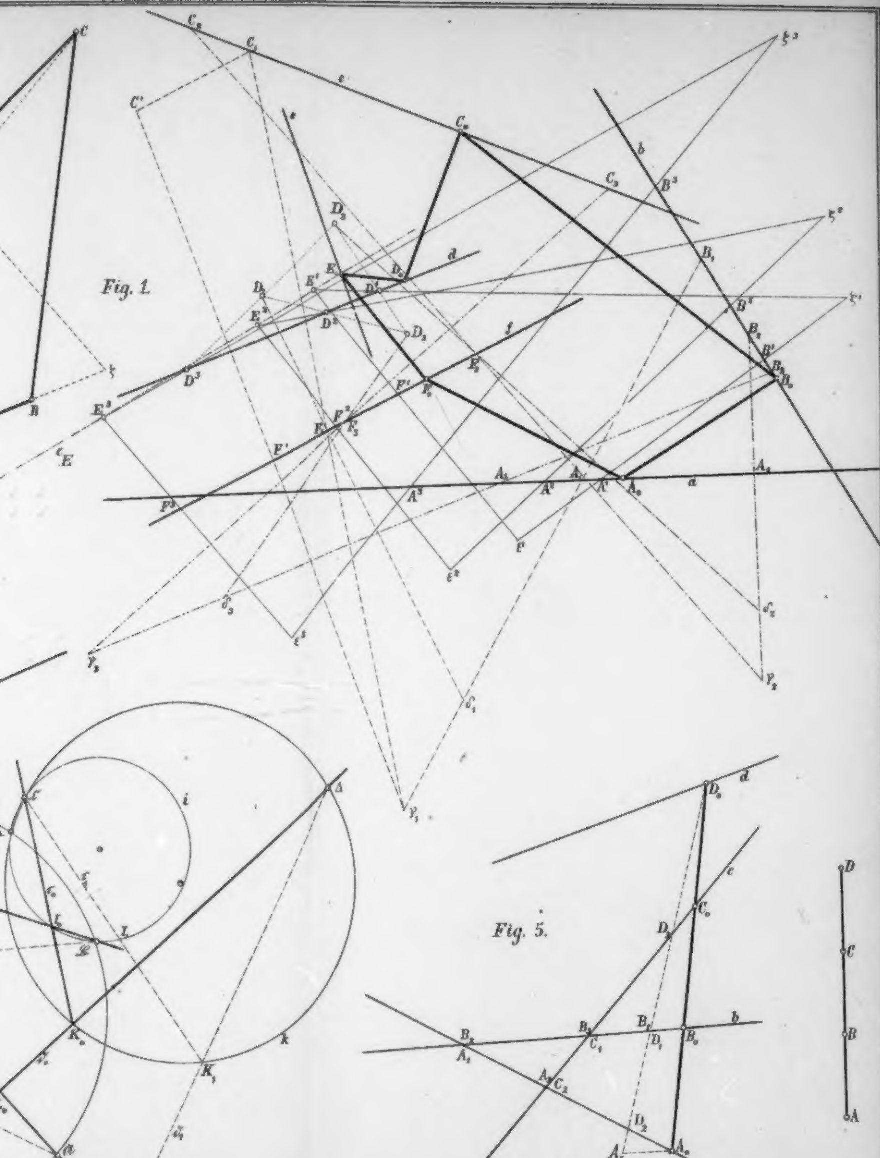


Fig. 1.

Fig. 5.